近代鞅论

胡迪鹤 甘师信 著

鞅论是概率论中的一个重要分支，其理论与方法已广泛应用到概率论的其它分支乃至其它学科，并繁衍出一些像鞅与Banach空间几何理论等边缘学科。



武汉大学学术丛书

WUHANUNIVERSITYACADEMICLIBRARY

武汉大学出版社

近代鞅论

胡迪鹤　甘师信　著

国家自然科学基金
国家教委博士点基金 资助项目

武汉大学出版社

(鄂)新登字09号

近代軼论

*

武汉大学出版社出版发行

(430072 武昌 珞珈山)

湖北京山县印刷厂印刷

*

850×1168 1/32 13.125印张 插页4 335千字

1993年10月第1版 1993年10月第1次印刷

印数：1—1000(内含精装200册)

ISBN 7-307-01646-x/O·138(平)

ISBN 7-307-01647-8/O·139(精)

定价：(平)12.30元
(精)17.80元

序 言

自本世纪40年代，J.L.D0Ob奠定了经典鞅论的理论基础以来，中间曾出现过一个短暂的发展较慢的时期．但是，自从六、七十年代以D.L.Burkholder为代表的美国数学家，和以P.Meyer为代表的法国数学家的有关鞅论的杰出工作发表以后，鞅论的研究又大大活跃起来．鞅论不仅作为概率论的一个分支快速地发展起来，而且渗透到调和分析、Banach空间几何学以及随机分析中去，互相促进，产生一些新兴的研究分支．目前，“鞅论方法”已经广泛地应用到概率论与数理统计、调和分析、Banach空间的结构理论和其它许多工程技术中去，显示了鞅论的巨大作用．

本书共分八章，内容涉及各种鞅型过程的基本理论．从鞅型过程的种类来分，本书包含了鞅、拟鞅、渐近鞅、概率渐近鞅、极限鞅、Mil和概率极限鞅等；从鞅型过程的状态空间来分，包含了实值的和一般的B值的鞅型过程；从指标集来分，包含了鞅型序列、两指标鞅型过程和定向集上的鞅型过程；从研究的问题来看，涉及鞅不等式、收敛定理、停时理论、分解理论（Doob-Meyer分解、Riesz分解等）、极限理论（大数定律和中心极限定理等）、鞅与Banach空间几何学以及鞅变换等等专题．

本书相当一部分内容是我们课题研究组在近年所获得的成果．为了内容的完整性，自然地，本书也包含了许多其它作者的成果．

本书第一至六章、第八章由甘师信执笔，第七章由胡述鹤执笔，在撰写乃至校样的过程中，我们经常交换意见，力求完美与统一．

由于作者们的水平有限，本书的缺点错误在所难免，敬请不吝指教，以期改进．

著　者

1992年于武汉大学

目　录

第一章 预备知识

本书采用近代随机过程论中所通用的术语及符号.

例如,设 Ω 为任一非空集合,其元素称之为点,以 ω 记之.设 A 为 Ω 的子集,若 ω 属于 A,则记为 $\omega \in A$,否则,记为 $\omega \bar{\in} A$.不含任何元素的集合称为空集,记为 $\varnothing$.设 B 是 A 的子集,则记为 $B \subset A$ 或 $A \supset B$.对于集合运算,$\cup$ 表示求并,$\cap$ 表示求交,A^c 表示 A 的余集,$A - B(A \backslash B)$ 及 $A \Delta B$ 分别表示 A 与 B 的差和对称差,I_A 表示集合 A 的示性函数.

R^n 恒表 n 维欧氏空间,特别地,$R = R^1$,记 $R_+ = [0,\infty)$,$\overline{R} = [-\infty,\infty]$,$\overline{R}_+ = [0,\infty]$,$N = \{0,1,2,\cdots\}$,$\overline{N} = \{0,1,2,\cdots,\infty\}$.对任何 $a,b \in \overline{R}$,$a \vee b = \max\{a,b\}$,$a \wedge b = \min\{a,b\}$,特别地 $a^+ = a \vee 0$,$a^- = (-a) \vee 0$.若 $\tau_n \in \overline{R}$,$\tau_n \leqslant \tau_{n+1}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n = \tau$,则记为 $\tau_n \uparrow \tau$,类似地,可定义 $\tau_n \downarrow \tau$.

若有二集 E_1、E_2,由 E_1 到 E_2 的变换(或函数)f 记作 $f: E_1 \to E_2$.对任何 $A \subset E_2$,$B \subset E_1$,记 $f^{-1}(A) = \{x: x \in E_1, f(x) \in A\}$,$f(B) = \{y: y = f(x), x \in B\}$.若 E_3 为另一集合,$g: E_2 \to E_3$,则由 E_1 到 E_3 的复合变换 $g(f)$ 有时记作 $g \circ f$.

§1 可测函数

设 $\mathbf{B}$ 为实的 Banach 空间,其范数用 $\|\cdot\|$ 表示,$\mathbf{B}^*$ 表示 $\mathbf{B}$ 的共轭空间,设 $\mathscr{B}$ 为 $\mathbf{B}$ 中全体开集产生的 σ 代数,称为 Borel σ 代数,$\mathscr{B}$ 中的集合称为 Borel 集.为方便起见,并不失普遍性,本书无特

殊声明，恒设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为完备的概率空间.

定义 1.1 称函数$X:\Omega\to\mathbf{B}$为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的弱可测函数(或标量可测函数)，如果对任何$f\in\mathbf{B}^*$，实值函数$f(X)$是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的可测函数.

定义 1.2 称函数$X=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iI_{A_i}$为$\Omega$上的简单函数(或阶梯函数)，如果$A_i\in\mathscr{F}$，$x_i\in\mathbf{B}$，$i=1,2,\cdots,n$，$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$. 称函数$X=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_iI_{A_i}$为$\Omega$上的初等函数(或可数值函数)，如果$A_i\in\mathscr{F}$，$x_i\in\mathbf{B}$，$i=1,2,\cdots$，$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$.

显然，简单函数为初等函数.

定义 1.3 称函数$X:\Omega\to\mathbf{B}$为$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的(强)可测函数，如果存在简单函数列$\{X_n\}$几乎处处强收敛于X(强收敛指依范数收敛，以后如无特别声明，收敛总指强收敛)，即

$$\exists\ \Lambda\in\mathscr{F},P(\Lambda)=0,\forall\ \omega\in\Omega-\Lambda$$

有

$$\|X_n(\omega)-X(\omega)\|\to 0(n\to\infty).$$

此时，记为$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X$ a.e. 或 $X_n\to X$ a.e.. 以后，几乎处处成立的等式或不等式，常省去几乎处处的记号 a.e..

定理 1.1 函数X可测的充要条件是存在初等函数列几乎处处收敛于X.

证 必要性显然，下证充分性. 设$\{X_n\}$为初等函数列，几乎处处收敛于X，即$\exists\ \Lambda_0\in\mathscr{F},P(\Lambda_0)=0,\forall\ \omega\in\Omega-\Lambda_0$有

$$\lim_{n\to\infty}\|X_n(\omega)-X(\omega)\|=0.$$

对每个n，不妨设$X_n=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_n^kI_{E_n^k}$，其中$E_n^k\in\mathscr{F}$，$x_n^k\in\mathbf{B}$，$k=1,2,\cdots$且有$m_n$，使得

$$P\left(\bigcup_{k=m_n+1}^{\infty} E_n^k\right) < \frac{1}{n^2}.$$

令

$$\overline{X}_n = \begin{cases} X_n, & \text{当 } \omega \in \bigcup_{k=1}^{m_n} E_n^k, \\ 0, & \text{反之}, \end{cases}$$

于是，$\{\overline{X}_n\}$ 为简单函数列，且

$$P(\overline{X}_n \neq X_n) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

记 $A_1 = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\{\overline{X}_n \neq X_n\}$，由 Borel－Cantelli 引理知 $P(A_1) = 0$，对任一 $\omega \in \Omega - (A_0 \cup A_1)$，存在 $M > 0$，当 $n > M$ 时，$\omega \in \{\overline{X}_n = X_n\}$，故

$$\lim_{n\to\infty} \| \overline{X}_n(\omega) - X(\omega) \| = \lim_{n\to\infty} \| X_n(\omega) - X(\omega) \| = 0.$$

即简单函数列 $\{\overline{X}_n\}$ 几乎处处收敛于 X，故 X 是可测的.

定理 1.2 设 X 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的可测函数，则 X 是弱可测函数，$\| X \|$ 是实值可测函数.

证 因 X 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的可测函数，于是，存在简单函数列 $X_n = \sum\limits_{i=1}^{k_n} x_n^i I_{A_n^i}$，$n \geqslant 1$，使得

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \quad a.e..$$

对于简单函数 $X_n = \sum\limits_{i=1}^{k_n} x_n^i I_{A_n^i}$，注意到 $f \in \mathbf{B}^*$，

$$f(X_n) = \sum_{i=1}^{k_n} f(x_n^i) I_{A_n^i},$$

$$\| X_n \| = \sum_{i=1}^{k_n} \| x_n^i \| I_{A_n^i}$$

均为实值简单函数，且

$$f(X_n) \to f(X) \quad a.e.,$$

$$\| X_n \| \to \| X \| \quad a.e..$$

因此,X 是弱可测函数,$\|X\|$ 是实值可测函数.

定义 1.4 称函数 $X:\Omega\to\mathbf{B}$ 为可分值的,如果 $\{X(\omega):\omega\in\Omega\}$ 是 $\mathbf{B}$ 的可分子集,称 X 是几乎可分值的,如果存在 $\Omega_0\subset\Omega,\Omega_0\in\mathscr{F},P(\Omega_0)=0$,使得 $\{X(\omega):\omega\in\Omega-\Omega_0\}$ 是 $\mathbf{B}$ 的可分子集.

引理 1.3 设 X 为 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的弱可测函数,若 X 是几乎可分值的,则 $\|X\|$ 是实值可测函数.

证 由于 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是完备的,则改变实值函数 $\|X(\cdot)\|$ 在零测集上的值并不影响其可测性,故不妨设 X 是可分值的,必要时再用 $\overline{\mathrm{span}\{X(\omega):\omega\in\Omega\}}$ 代替 $\mathbf{B}$,其中 $\overline{\mathrm{span}\{X(\omega):\omega\in\Omega\}}$ 表示由集合 $\{X(\omega):\omega\in\Omega\}$ 张成的闭线性子空间. 因此,不失一般性,可设 $\mathbf{B}$ 本身是可分空间. 设可列集 $\{x_i\}$ 在 $\mathbf{B}$ 中稠且 $x_i\neq 0$,则由 Hahn－Banach 定理可知:对每一 x_i,存在 $f_i\in\mathbf{B}^*$,$\|f_i\|=1$,使得 $f_i(x_i)=\|x_i\|$,由稠密性,对任何固定的 $x\in\mathbf{B}$ 及任意 $\varepsilon>0$,必有 j 使得 $\|x-x_j\|<\varepsilon$,从而

$$\|x\|-\varepsilon<\|x_j\|=f_j(x_j)\leqslant\sup_k|f_k(x_j)|$$
$$\leqslant\sup_k|f_k(x)|+\varepsilon,$$

由 ε 的任意性得

$$\|x\|\leqslant\sup_k|f_k(x)|,$$

而 $$|f_k(x)|\leqslant\|f_k\|\,\|x\|=\|x\|,\quad(\forall\ k\geqslant 1),$$

故 $$\sup_k|f_k(x)|\leqslant\|x\|,$$

即 $$\|x\|=\sup_k|f_k(x)|.$$

由 x 的任意性得:

$$\|X(\omega)\|=\sup_k|f_k(X(\omega))|,\forall\ \omega\in\Omega.$$

由于 X 是弱可测的,故对每一 $k\geqslant 1$,$f_k(X)$ 为实值可测函数,从而,$\|X\|$ 为实值可测函数.

定理 1.4 (B. J. Pettis) 设 $X:\Omega\to\mathbf{B}$,则下列陈述等价:

(1) X 是可测的;

(2) X 是弱可测的且是几乎可分值的.

证 (1) ⇒(2). 由定理1.2知X是弱可测的，再由定理1.1可取初等函数列$\{X_n\}$及零概集A使得

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \forall\ \omega \in \Omega - A.$$

记

$$\mathbf{B}_1 = \overline{\{X_n(\omega):\omega \in \Omega - A, n = 1,2,\cdots\}},$$

则$\mathbf{B}_1$是可分子集，显然

$$\{X(\omega):\omega \in \Omega - A\} \subset \mathbf{B}_1.$$

因此，X是几乎可分值的，这就证明了(2)成立.

(2) ⇒(1). 不妨设X是可分值的，从而可取$x_k \in \mathbf{B}$, $k = 1, 2,\cdots$ 使得$\{X(\omega),\omega \in \Omega\} \subset \overline{\{x_k,k \geqslant 1\}}$.

记

$$\Omega_{nk} = \{\omega: \| X(\omega) - x_k \| < \frac{1}{n}\}.$$

因$X(\cdot) - x_k$是弱可测的且可分值的，由引理1.3知Ω_{nk}为可测集，又对每一$n \geqslant 1$，有

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_{nk}.$$

令 $$A_{nk} = \Omega_{nk} - \bigcup_{j=1}^{k-1} \Omega_{nj}, k = 1,2,\cdots,$$

则 $\{A_{nk},k \geqslant 1\}$两两不相交且$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk} = \Omega$. 定义$X_n$如下：

$$X_n(\omega) = x_k, \omega \in A_{nk}, k = 1,2,\cdots,$$

则X_n是初等函数，又由X_n的定义知：对任意$\omega \in \Omega$，有

$$\| X(\omega) - X_n(\omega) \| = \| X(\omega) - x_k \| < \frac{1}{n},$$

故$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$. 由定理1.1知$X$是可测的，即(1)成立.

推论 1.5 $X:\Omega \to \mathbf{B}$为可测的充要条件是存在初等函数列$\{X_n\}$和一零概集A使得在$\Omega - A$上$\{X_n\}$一致收敛于X.

证 由定理1.1知充分性显然成立. 下证必要性. 设X是可测的，则由定理1.4知X是几乎可分值的，于是存在零概集A，类

似于定理 1.4 的证明，构造出初等函数列$\{X_n\}$，使得对一切$\omega \in \Omega - \Lambda$，有

$$\| X_n(\omega) - X(\omega) \| < \frac{1}{n}.$$

即$\{X_n\}$在$\Omega - \Lambda$上一致收敛于X.

推论 1.6 若$\mathbf{B}$是可分的，$X:\Omega \to \mathbf{B}$，则X是可测的与X是弱可测的等价.

推论 1.7 设$X:\Omega \to \mathbf{B}$是可测的，α为实值可测函数，则αX为可测函数.

证 $\forall f \in \mathbf{B}^*$，由定理 1.4 知$f(X)$是实值可测函数，从而$f(\alpha X) = \alpha f(X)$为实值可测函数，即$\alpha X$是弱可测的，又由定理 1.4 知$X$是几乎可分值的，设$\Lambda \in \mathscr{F}, P(\Lambda) = 0, \omega_n \in \Omega, n = 1, 2, \cdots$满足$\{X(\omega_n), n = 1, 2, \cdots\}$稠密于$\{X(\omega), \omega \in \Omega - \Lambda\}$，记$\{r_k: k = 1, 2, \cdots\}$为有理数全体及$S = \{r_j X(\omega_i): i, j = 1, 2, \cdots\cdots\}$，则$S$是$\mathbf{B}$的可分子集，且满足

$$\{\alpha(\omega)X(\omega): \omega \in \Omega - \Lambda\} \subset \overline{S}$$

这表明αX是几乎可分值的，由定理 1.4 知αX是可测的.

定理 1.8 设$X_n:\Omega \to \mathbf{B}, n \geq 1$，是可测函数列，$X:\Omega \to \mathbf{B}$，且$X_n$几乎处处弱收敛于$X$，即$\exists \Lambda \in \mathscr{F}, P(\Lambda) = 0, \forall f \in \mathbf{B}^*, \forall \omega \in \Omega - \Lambda$，有

$$\lim_{n \to \infty} f(X_n(\omega)) = f(X(\omega)),$$

则X是可测的.

证 对每一$n \geq 1$，$f(X_n)$是实值可测函数，从而$f(X)$是可测的，故X是弱可测的. 又对每个$n \geq 1$，因X_n是可测的，由定理 1.4 知存在$\{x_n^j\}_{j \geq 1} \subset \mathbf{B}, \Lambda_n \in \mathscr{F}, P(\Lambda_n) = 0$，使得$\{x_n^j\}_{j \geq 1}$在$\{X_n(\omega): \omega \in \Omega - \Lambda_n\}$中稠密. 令

$$\mathbf{B}_0 = \overline{\operatorname*{span}_{n,j}\{x_n^j\}},$$

则$\mathbf{B}_0$是闭且可分的线性子空间，$\mathbf{B}_0$也是弱闭的，由X_n几乎处处弱收敛于X知

$$\{X(\omega);\omega\in\Omega-(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\}\subset \mathbf{B}_0,$$

但 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n))=0$,故 X 是几乎可分值的,再用定理 1.4 知 X 是可测的.

推论 1.9 设 $X_n:\Omega\to\mathbf{B},n\geqslant 1$ 是可测函数列,$X:\Omega\to\mathbf{B}$ 且 X_n 几乎处处收敛于 X,则 X 是可测的.

证 注意到 X_n 几乎处处收敛于 X 蕴含 X_n 几乎处处弱收敛于 X,再用定理 1.8 知 X 是可测的.

定理 1.10 设 $X:\Omega\to\mathbf{B}$ 是可测函数,则存在简单函数列 $\{X_n\}$,使得

(1) $\|X_n\|\leqslant 2\|X\|,n\geqslant 1$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X,a.e.$.

证 由可测函数的定义知存在简单函数列 $\{Y_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}Y_n=X,a.e.$.

令

$$X_n=\begin{cases}Y_n, & \|Y_n\|\leqslant 2\|X\|;\\ 0, & \text{反之}.\end{cases}\quad(n\geqslant 1)$$

则 $\{X_n\}$ 为简单函数列且满足(1) 与(2).

为方便起见,以后总称定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的取值于 $\mathbf{B}$ 的可测函数为 $\mathbf{B}$ 值随机变量,当 $\mathbf{B}=R$ 时,则称 R 值随机变量为实值随机变量.

设 $\{X_n\}$ 为实值随机变量序列,若存在 $A\in\mathscr{F},P(A)=0$,使得

$$X_1(\omega)\leqslant X_2(\omega)\leqslant\cdots,\quad\forall\,\omega\in\Omega-A,$$

则称 $\{X_n\}$ 为递增的(或非降的). 记为 $X_n\uparrow,a.e.$ (在无混淆的情况下,简记为 $X_n\uparrow$).

若存在 $A\in\mathscr{F},P(A)=0$,使得

$$X_1(\omega)<X_2(\omega)<\cdots,\forall\,\omega\in\Omega\text{-}A,$$

则称$\{X_n\}$为严格递增的，记为$X_n\uparrow\uparrow, a.e.$. 类似地可定义递减的(非升的)及严格递减的.

设$\{X_t, t\in\Delta\}$为任一实值随机变量族，我们总用$\sigma\{X_t, t\in\Delta\}$表示由$\{X_t, t\in\Delta\}$产生的$\sigma$代数.

若X是**B**值随机变量，$\mathscr{B}$是$\mathscr{F}$的任一子σ代数，X关于$\mathscr{B}$是可测的，以后常简写成$X\in\mathscr{B}$.

§2　Bochner 积分与条件期望

本节总假定$\mathscr{F}$的子σ代数是完备的.

定义 2.1　设X为**B**值随机变量且$\int_\Omega\|X\|dP<\infty$.

(1) 若$X=\sum_{i=1}^n x_i I_{A_i}$是简单函数，则定义$X$(在$\Omega$上)的 Bochner 积分为$\sum_{i=1}^n x_i P(A_i)$，记为

$$\int_\Omega XdP=\sum_{i=1}^n x_i P(A_i).$$

(2) 若X是任一**B**值随机变量，则由定理 1.10 可取简单函数列$\{X_n\}$使得

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X,$$
$$\|X_n\|\leqslant 2\|X\|,\quad n\geqslant 1,$$

则定义X(在Ω上)的 Bochner 积分为

$$\int_\Omega XdP=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n dP.$$

下面的定理保证了定义 2.1 的合理性.

定理 2.1　设X是**B**值随机变量且$\int_\Omega\|X\|dP<\infty$，则对任何简单函数列$\{X_n\}$，只要

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X,$$
$$\| X_n \| \leqslant 2 \| X \|, \quad n \geqslant 1,$$

必有

(1) 存在 $h \in \mathbf{B}$,使得

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n dP = h,$$

若还有简单函数列$\{\widetilde{X}_n\}$,亦满足

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{X}_n = X, \| \widetilde{X}_n \| \leqslant 2 \| X \|, n \geqslant 1,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n dP = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widetilde{X}_n dP.$$

(2) $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \| X - X_n \| dP = 0.$

证 (1) 由定理 1.10 可取简单函数列$\{X_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X, \tag{2.1}$$
$$\| X_n \| \leqslant 2 \| X \|, \quad n \geqslant 1, \tag{2.2}$$

用控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}
&\lim_{n,m\to\infty} \left\| \int_\Omega X_n dP - \int_\Omega X_m dP \right\| \\
&\leqslant \lim_{n,m\to\infty} \int_\Omega \| X_n - X_m \| dP \\
&\leqslant \lim_{n,m\to\infty} \left(\int_\Omega \| X_n - X \| dP + \int_\Omega \| X - X_m \| dP \right) \\
&= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \| X_n - X \| dP + \int_\Omega \lim_{m\to\infty} \| X - X_m \| dP \\
&= 0.
\end{aligned}$$

由 Banach 空间 $\mathbf{B}$ 的完备性得知:存在 $h \in \mathbf{B}$,使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n dP = h.$$

若还有简单函数列$\{\tilde{X}_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{X}_n = X,$$

$$\|\tilde{X}_n\| \leqslant 2\|X\|, \quad n \geqslant 1,$$

令

$$Y_n = \begin{cases} X_n, 当\ n\ 为奇数, \\ \tilde{X}_n, 当\ n\ 为偶数. \end{cases}$$

则$\{Y_n\}$为简单函数列且满足(2.1)、(2.2)式，所以必存在$h \in \mathbf{B}$，使

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega Y_n dP = h,$$

而$\{\int_\Omega X_n dP\}$、$\{\int_\Omega \tilde{X}_n dP\}$皆为$\{\int_\Omega Y_n dP\}$的子序列，所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n dP = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \tilde{X}_n dP.$$

(2) 用控制收敛定理立即得证.

定义 2.2 若X是$\mathbf{B}$值随机变量且$\int_\Omega \|X\| dP < \infty$，则称$X$(在$\Omega$上)是 Bochner 可积的，在无混淆的情况下，简称为可积的.

若X是可积的$\mathbf{B}$值随机变量，对$A \in \mathscr{F}$，则定义X在A上的积分为

$$\int_A X dP = \int_\Omega X I_A dP.$$

若X是可积的$\mathbf{B}$值随机变量，则称积分$\int_\Omega X dP$为X的数学期望(简称为期望)，记为EX.

关于 Bochner 积分有如下基本性质.

定理 2.2 设X_i是可积的$\mathbf{B}$值随机变量，α_i是实数，$i = 1,2$,

$\cdots,n$,则

(1) $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i$ 是可积的,且

$$\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i\right)dP=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\int_\Omega X_i dP;$$

(2) 若 $A_n\in\mathscr{F}, A_n\cap A_m=\varnothing(1\leqslant n\neq m<\infty)$,

$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$,则

$$\int_A X_i dP=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}X_i dP;$$

(3) $\left\|\int_\Omega X_i dP\right\|\leqslant\int_\Omega\|X_i\|dP$;

(4) 设 u 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的实值可积随机变量,则对任意 $x\in$ **B**,有

$$\int_\Omega ux dP=x\int_\Omega u dP.$$

证 我们只证(4). 取实值简单函数列$\{u_n\}$,使 $u_n\to u$,且 $|u_n|\leqslant 2|u|$, $n\geqslant 1$.记

$$u_n=\sum_{i=1}^{k_n}a_n^i I_{A_n^i},\ A_n^i\in\mathscr{F},\ A_n^i\cap A_n^j=\varnothing(i\neq j)$$

$$\bigcup_{i=1}^{k_n}A_n^i=\Omega, a_n^i\in R,\ n\geqslant 1,$$

则 $u_n x$ 是**B**值简单函数,$\lim_{n\to\infty}u_n x=ux$, $\|u_n x\|\leqslant 2|u|\,\|x\|$,由定义 2.1 有

$$\int_\Omega u_n x dP=\sum_{i=1}^{k_n}a_n^i xP(A_n^i)=x\sum_{i=1}^{k_n}a_n^i P(A_n^i)$$

$$=x\int_\Omega u_n dP;$$

又 $\int_\Omega|u|\,\|x\|dP=\|x\|\int_\Omega|u|dP<\infty$,由定义 2.1,在上式中

令 $n \to \infty$ 得

$$\int_\Omega uxdP = x\int_\Omega udP.$$

定理 2.3 设$(\Omega,\mathscr{G},P)$是任一完备的概率空间，Y是任一$\mathbf{B}$值$\mathscr{G}$可测的可积随机变量，若$\forall A \in \mathscr{G}$，有$\int_A YdP = 0$，则$Y = 0$，$a.e.$.

证 由定理 1.10 及定理 2.1 可取简单函数列$\{Y_n\}$，使

$$Y_n = \sum_{i=1}^{k_n} y_n^i I_{A_n^i},\ n \geqslant 1,$$

$$A_n^i \in \mathscr{G}, A_n^i \cap A_n^j = \varnothing\ (i \neq j,\ 1 \leqslant i,j \leqslant k_n, n \geqslant 1)$$

$$\bigcup_{i=1}^{k_n} A_n^i = \Omega, y_n^i \in \mathbf{B}(i = 1,2,\cdots,k_n,n \geqslant 1),$$

$$\|Y_n\| \leqslant 2\|Y\|,\ n \geqslant 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = Y, a.e.,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \|Y - Y_n\| dP = 0 \tag{2.3}$$

由假设条件及定理 2.2，有

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \|Y_n\| dP &= \sum_{i=1}^{k_n}\int_{A_n^i} \|Y_n\| dP = \sum_{i=1}^{k_n} \|y_n^i\| P(A_n^i) \\
&= \sum_{i=1}^{k_n} \left\|\int_{A_n^i} Y_n dP\right\| \\
&= \sum_{i=1}^{k_n} \left\|\int_{A_n^i} Y_n dP - \int_{A_n^i} YdP\right\| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k_n}\int_{A_n^i} \|Y_n - Y\| dP \\
&= \int_\Omega \|Y_n - Y\| dP
\end{aligned}$$

这样，$\int_\Omega \| Y \| dP \leqslant \int_\Omega \| Y_n - Y \| dP + \int_\Omega \| Y_n \| dP$

$$\leqslant 2\int_\Omega \| Y_n - Y \| dP \tag{2.4}$$

在(2.4)式中令 $n \to \infty$ 并注意到(2.3)式得

$$\int_\Omega \| Y \| dP = 0.$$

因此，$Y = 0,\ a.e.$.

定理 2.4 设 $X_n, n \geqslant 1$ 是 **B** 值随机变量序列，Y 是非负实值可积随机变量，若

$$\lim_{n \to \infty} X_n = X,$$

$$\| X_n \| \leqslant Y,\ n \geqslant 1,$$

则 X 是可积的，且 $\forall\ A \in \mathscr{F}$，有

$$\int_A X dP = \lim_{n \to \infty} \int_A X_n dP.$$

证 显然 X 是可积的，注意到 $\| X_n - X \| \to 0$，$\| X_n - X \| \leqslant \| X_n \| + \| X \| \leqslant 2Y (\forall\ n \geqslant 1)$，利用实值随机变量情形积分的控制收敛定理得

$$\left\| \int_A X dP - \int_A X_n dP \right\| = \left\| \int_A (X - X_n) dP \right\|$$

$$\leqslant \int_A \| X - X_n \| dP \to 0,\ (n \to \infty),$$

即
$$\lim_{n \to \infty} \int_A X_n dP = \int_A X dP.$$

定义 2.3 设 X 是一 **B** 值可积随机变量，$\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数，如果存在 $\mathscr{G}$ 可测的 **B** 值可积随机变量 Y，使得

$$\int_A X dP = \int_A Y dP, \forall\ A \in \mathscr{G},$$

则称 Y 是 X 关于 $\mathscr{G}$ 的条件期望，并记为

$$Y = E(X | \mathscr{G}).$$

定理 2.5 设 X 是 B 值可积随机变量，$\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数，则 $Y = E(X|\mathscr{G})$ 在 $a.e.$ 意义下唯一存在.

证 若 $X = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}$ 是简单函数，其中 $x_i \in \mathbf{B}, A_i \in \mathscr{F}, i = 1,2,\cdots,n, A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j), \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，令 $Y = \sum_{i=1}^{n} x_i E(I_{A_i}|\mathscr{G})$，则 Y 满足定义 2.3 中的条件，这就是说，当 X 为简单函数时 $Y = E(X|\mathscr{G})$ 存在，若 X 是任一 B 值随机变量，由定理 1.10 及定理 2.1 知存在简单函数列 $\{X_n = \sum_{i=1}^{k_n} x_n^i I_{A_n^i}\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X,$$

$$\| X_n \| \leqslant 2 \| X \| \quad (\forall \ n \geqslant 1),$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \| X - X_n \| dP = 0.$$

令 $Y_n = E(X_n|\mathscr{G}) = \sum_{i=1}^{k_n} x_n^i E(I_{A_n^i}|\mathscr{G})$，则 Y_n 关于 $\mathscr{G}$ 可测，$E\| Y_n \| < \infty$，又

$$X_n - X_m = \sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=1}^{k_m} (x_n^i - x_m^j) I_{A_n^i \cap A_m^j},$$

$$Y_n - Y_m = \sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=1}^{k_m} (x_n^i - x_m^j) E(I_{A_n^i \cap A_m^j}|\mathscr{G}),$$

所以，

$$\begin{aligned}\int_\Omega \| Y_n - Y_m \| dP &\leqslant \sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=1}^{k_m} \| x_n^i - x_m^j \| \int_\Omega E(I_{A_n^i \cap A_m^j}|\mathscr{G}) dP \\ &= \sum_{i=1}^{k_n}\sum_{j=1}^{k_m} \| x_n^i - x_m^j \| P(A_n^i \cap A_m^j) \\ &= \int_\Omega \| X_n - X_m \| dp,\end{aligned}$$

因此，$\lim\limits_{n,m\to\infty}\int_{\Omega}\|Y_n - Y_m\|dP = 0$. 即$\{Y_n\}$是$L^1$收敛意义下的哥西序列，而$L^1(\Omega,\mathscr{G},P;\mathbf{B}) \equiv \{Y:\Omega\to\mathbf{B}, Y$关于$\mathscr{G}$可测且$\int_{\Omega}\|Y\|dP < \infty\}$关于$L^1$收敛是完备的. 于是存在$Y\in L^1(\Omega,\mathscr{G},P;\mathbf{B})$使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\|Y - Y_n\|dP = 0.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\Omega}\|X - X_n\|dP = \lim\limits_{n\to\infty}\int_{\Omega}\|Y - Y_n\|dP = 0$， 故

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A}\|X - X_n\|dP = \lim_{n\to\infty}\int_{A}\|Y - Y_n\|dP = 0,$$

$$\forall A\in\mathscr{G}.$$

因此

$$\int_A YdP = \lim_{n\to\infty}\int_A Y_n dP = \lim_{n\to\infty}\int_A X_n dP$$

$$= \int_A XdP,\ \forall A\in\mathscr{G}.$$

这就证明了条件期望的存在性.

下面证明唯一性，若还存在Y'，Y'亦满足定义 2.3 中的条件，则$Y - Y'$关于$\mathscr{G}$可测，且$\int_{\Omega}\|Y - Y'\|dP < \infty$，又对一切$A\in\mathscr{G}$，有

$$\int_A (Y - Y')dP = 0,$$

再用定理 2.3 得$Y = Y'$ $a.e.$.

条件期望有下面一些基本性质.

定理 2.6 设X_i是$\mathbf{B}$值可积随机变量，C_i是实数，$i = 1,2,\cdots,n$. $x\in\mathbf{B}$. $\mathscr{G}$是$\mathscr{F}$的子σ代数，则

(1) $E(x|\mathscr{G}) = x$;

(2) $E(\sum\limits_{i=1}^{n}C_iX_i|\mathscr{G}) = \sum\limits_{i=1}^{n}C_iE(X_i|\mathscr{G})$;

(3) $\| E(X_i|\mathscr{G}) \| \leqslant E(\| X_i \| \,|\mathscr{G})$.

证 (1) 与(2) 容易由条件期望的定义直接看出. 下证(3). 简记 X_i 为 X. 由于 $\| E(X|\mathscr{G}) \|$ 与 $E(\| X \| \,|\mathscr{G})$ 均为实值 $\mathscr{G}$ 可测函数, 故为证 (3), 只需证

$$\int_A \| E(X|\mathscr{G}) \| dP \leqslant \int_A E(\| X \| \,|\mathscr{G}) dP = \int_A \| X \| dP,$$

$$\forall A \in \mathscr{G}. \qquad (2.5)$$

当 $X = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}$ 为简单函数时, $E(X|\mathscr{G}) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(I_{A_i}|\mathscr{G})$, 注意到 $\| X \| = \sum_{i=1}^{n} \| x_i \| I_{A_i}$, 即知(2.5) 式成立.

设 X 为任一 **B** 值可积随机变量, 取简单函数列 $\{X_n\}$, 使 $\lim_{n\to\infty} X_n = X$, $\| X_n \| \leqslant 2 \| X \|$ $(n \geqslant 1)$. 由控制收敛定理得知: $\forall A \in \mathscr{G}$, 有

$$\left| \int_A \| X \| dP - \int_A \| X_n \| dP \right| \leqslant \int_\Omega \big| \| X \| - \| X_n \| \big| dP$$

$$\leqslant \int_\Omega \| X_n - X \| dP \to 0, \ (n \to \infty).$$

据定理 2.5 的证明知

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \| E(X_n|\mathscr{G}) - E(X|\mathscr{G}) \| dP = 0.$$

所以, $\forall A \in \mathscr{G}$, 有

$$\int_A \| E(X|\mathscr{G}) \| dP$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \Big[\int_A \| E(X_n|\mathscr{G}) - E(X|\mathscr{G}) \| dP$$

$$+ \int_A \| E(X_n|\mathscr{G}) \| dP \Big]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_A \| E(X_n|\mathscr{G}) \| dP$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\int_A \|X_n\| dP = \int_A \|X\| dP.$$

定理 2.7 设 X 是 **B** 值可积随机变量，$\mathscr{G}_1$、$\mathscr{G}_2$ 皆为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数且 $\mathscr{G}_1 \subset \mathscr{G}_2$，则

$$E(E(X|\mathscr{G}_2)|\mathscr{G}_1) = E(E(X|\mathscr{G}_1)|\mathscr{G}_2) = E(X|\mathscr{G}_1).$$

证 由条件期望的定义立即知第二个等号成立. 因为 $E(X|\mathscr{G}_1)$ 是 $\mathscr{G}_1$ 可测的，又 $\forall A \in \mathscr{G}_1 \subset \mathscr{G}_2$，有

$$\int_A E(X|\mathscr{G}_1)dP = \int_A XdP = \int_A E(X|\mathscr{G}_2)dP,$$

由条件期望的定义知 $E(E(X|\mathscr{G}_2)|\mathscr{G}_1) = E(X|\mathscr{G}_1)$.

定理 2.8 设 $X_n, n \geqslant 1$ 是 **B** 值可积随机变量序列，$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$，$Y$ 是 **B** 值可积随机变量且 $\|X_n\| \leqslant \|Y\|$，$n \geqslant 1$，$\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数，则

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathscr{G}) = E(X|\mathscr{G}).$$

证 首先注意 $\|X\| \leqslant \|Y\|$，$\|X_n - X\| \leqslant 2\|Y\|$，利用实值随机变量情形条件期望的控制收敛定理，则有

$$\begin{aligned}
&\|E(X_n|\mathscr{G}) - E(X_m|\mathscr{G})\| \\
&= \|E((X_n - X_m)|\mathscr{G})\| \\
&\leqslant E(\|X_n - X_m\| \,|\mathscr{G}) \\
&\leqslant E(\|X_n - X\| \,|\mathscr{G}) + E(\|X_m - X\| \,|\mathscr{G}) \\
&\to 0 \quad (n, m \to \infty).
\end{aligned}$$

由 **B** 的完备性知存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n|\mathscr{G})$，对每个 $n \geqslant 1$，$E(X_n|\mathscr{G})$ 关于 $\mathscr{G}$ 可测，故 $\lim\limits_{n\to\infty} E(X_n|\mathscr{G})$ 关于 $\mathscr{G}$ 可测. 下面证明对任意 $A \in \mathscr{G}$，有

$$\int_A \lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathscr{G})dP = \int_A XdP.$$

事实上，

$$\|E(X_n|\mathscr{G})\| \leqslant E(\|X_n\| \,|\mathscr{G}) \leqslant E(\|Y\| \,|\mathscr{G}),$$

且 $\int_{\Omega} E(\|Y\| \mid \mathscr{G})dP = \int_{\Omega} \|Y\| dP < \infty.$

由定理 2.4 有

$$\int_A \lim_{n\to\infty} E(X_n \mid \mathscr{G})dP = \lim_{n\to\infty}\int_A E(X_n \mid \mathscr{G})dP$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_A X_n dP = \int_A \lim_{n\to\infty} X_n dP = \int_A X dP.$$

§3 B 值测度

如不特别声明，本节恒设 Ω 是任一非空集合，$\mathscr{F}$ 是 Ω 上的代数，对每一 $A \in \mathscr{F}$，令

$$\mathscr{F}(A) = \{B : B \in \mathscr{F}, B \subset A\},$$

则 $\mathscr{F}(A)$ 是 A 上的代数．称 $\pi = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 是 A 在 $\mathscr{F}$ 中的一个分划，如果 $\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \subset \mathscr{F}(A)$，$A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$，$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A$. 令 $\mathscr{P}(A)$ 是 A 在 $\mathscr{F}$ 中所有分划组成的集类.

定义 3.1 集函数 $\mu: \mathscr{F} \to \mathbf{B}$ 称为是有限可加 **B** 值测度（简称 **B** 值测度），如果对任意不相交集合 $A、B \in \mathscr{F}$，有 $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. μ 称为是有界的，如果 $\sup_{A \in \mathscr{F}} \|\mu(A)\| < \infty$. **B** 值测度 μ 称为完全可加的，如果 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$，其中 $\{A_n\}$ 为 $\mathscr{F}$ 中两两不相交的集合序列且 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$，而右端的级数表示 $\{\sum_{n=1}^{m} \mu(A_n)\}$ 按 **B** 中范数收敛的极限.

如不特别声明，本节所言测度均只满足有限可加性.

定义 3.2 设 $\mu: \mathscr{F} \to \mathbf{B}$ 是 **B** 值测度．对任意 $E \in \mathscr{F}$，令 $V_\mu(E) = \sup_{\pi \in \mathscr{P}(E)} \sum_{A \in \pi} \|\mu(A)\|$，则 V_μ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上取非负广义实值的集函数，称 V_μ 为 μ 的变差. 如果 $V_\mu(\Omega) < \infty$，则称 μ 是有界

变差的. 对任意 $E \in \mathscr{F}$，令

$$V_\mu^*(E) = \sup\{V_{f\circ\mu}(E): f \in B^*, \|f\| \leqslant 1\},$$

其中 $f\circ\mu$ 为如下定义的实值测度：$(f\circ\mu)(E) = f(\mu(E)), E \in \mathscr{F}$. 则 V_μ^* 是定义在 $\mathscr{F}$ 上取非负广义实值的集函数，称 V_μ^* 为 μ 的半变差. 如果 $V_\mu^*(\Omega) < \infty$，则称 μ 是有界半变差的. 直接验证可知：V_μ 是 $\mathscr{F}$ 上的非负可加的单调上升的广义实值集函数，而 V_μ^* 是 $\mathscr{F}$ 上的非负次可加的单调上升的广义实值集函数，且 $V_\mu^*(E) \leqslant V_\mu(E)$，$(\forall E \in \mathscr{F})$. 由[1](见命题 11，P4) 知：$\mu$ 有界的充要条件是 μ 为有界半变差的.

定理 3.1 有界变差的 **B** 值测度为完全可加的充要条件是它的变差为完全可加的.

证 充分性 设 μ 是有界变差的 **B** 值测度，其变差 V_μ 是完全可加的，设 $E_n \in \mathscr{F}, n \geqslant 1$，$\{E_n\}$ 两两不相交且 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{F}$，往证 $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$. 由于 $\mathscr{F}$ 为代数，$(E - \bigcup_{n=1}^{m} E_n) \in \mathscr{F}, \forall m \geqslant 1$，且 $(E - \bigcup_{n=1}^{m} E_n) \downarrow \varnothing$，于是

$$\|\mu(E) - \sum_{n=1}^{m} \mu(E_n)\| = \|\mu(E) - \mu(\bigcup_{n=1}^{m} E_n)\|$$

$$= \|\mu(E - \bigcup_{n=1}^{m} E_n)\| \leqslant V_\mu(E - \bigcup_{n=1}^{m} E_n) \to 0, \qquad m \to \infty.$$

则

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

必要性 设 μ 是有界变差的完全可加的 **B** 值测度，令 $\{E_n\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中两两不交的集合序列且 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathscr{F}, \pi = \{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$ 是 E 在 $\mathscr{F}$ 中的任一分划，则

$$\sum_{B\in\pi} \|\mu(B)\| = \sum_{B\in\pi} \|\mu(B \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n))\|$$

$$= \sum_{B\in\pi} \|\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap E_n)\| \leqslant \sum_{B\in\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \|\mu(B \cap E_n)\|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{B \in \pi} \| \mu(B \cap E_n) \| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} V_\mu(E_n),$$

从而，$V_\mu(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} V_\mu(E_n)$.

另一方面，由于 V_μ 是有限可加的且单调上升，故对每一 $n \geqslant 1$，有

$$\sum_{k=1}^{n} V_\mu(E_k) = V_\mu(\bigcup_{k=1}^{n} E_k) \leqslant V_\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k),$$

从而，$\sum_{k=1}^{\infty} V_\mu(E_k) \leqslant V_\mu(E)$，这就证明了 V_μ 是完全可加的.

定义 3.3 设 $\mu: \mathscr{F} \to \mathbf{B}$ 是 $\mathbf{B}$ 值测度，υ 是 $\mathscr{F}$ 上的实值测度，如果对任何 $A \in \mathscr{F}$，$\upsilon(A) = 0$，有 $\mu(A) = 0$，则称 μ 关于 υ 绝对连续，记作 $\mu \ll \upsilon$.

定理 3.2 设 $\mu: \mathscr{F} \to \mathbf{B}$ 是 $\mathbf{B}$ 值测度，υ 是 $\mathscr{F}$ 上的实值测度，则 $\mu \ll \upsilon \Leftrightarrow V_\mu \ll \upsilon$.

证 设 $\mu \ll \upsilon$. 若 $A \in \mathscr{F}$，$\upsilon(A) = 0$，则对任何 $B_i \in \mathscr{F}$，$B_i \subset A$，有 $\upsilon(B_i) = 0$，故 $\mu(B_i) = 0$，从而有

$$V_\mu(A) = \sup_{\pi \in \mathscr{P}(A)} \sum_{B \in \pi} \| \mu(B) \| = 0,$$

即 $V_\mu \ll \upsilon$.

设 $V_\mu \ll \upsilon$，若 $A \in \mathscr{F}$，$\upsilon(A) = 0$，则 $\| \mu(A) \| \leqslant V_\mu(A) = 0$，从而有 $\mu(A) = 0$，即 $\mu \ll \upsilon$.

定理 3.3 若 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的 σ 代数，$\mu: \mathscr{F} \to \mathbf{B}$ 是完全可加的 $\mathbf{B}$ 值测度，υ 是 $\mathscr{F}$ 上的完全可加的实值测度，则 $\mu \ll \upsilon$ 的充要条件是：对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $E \in \mathscr{F}$，$\upsilon(E) < \delta$ 时，$\| \mu(E) \| < \varepsilon$.

证 充分性是显然的，下证必要性. 首先，对 $f \in \mathbf{B}^*$，$f \circ \mu$ 是实值测度. 当 $\upsilon(E) = 0$ 时，$\mu(E) = 0$，所以 $(f \circ \mu)(E) = f(\mu(E)) = 0$，即 $f \circ \mu$ 关于 υ 绝对连续.

现假设结论不真，则必存在 $\varepsilon > 0$ 和 $\mathscr{F}$ 中的一列集合 $\{E_n\}$，使得

$$\| \mu(E_n) \| > 2\varepsilon, \upsilon(E_n) < \frac{1}{n^2}, n = 1, 2, \cdots, \tag{3.1}$$

显然

$$\lim_{k\to\infty} v(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n) = 0. \tag{3.2}$$

由(3.1)式及 Hahn — Banach 定理可取 $f_1 \in \mathbf{B}^*$，$\| f_1 \| = 1$，使得 $|f_1 \circ \mu(E_1)| > 2\varepsilon$，因为 $f_1 \circ \mu$ 关于 v 绝对连续，由(3.2)式，又可取 n_1，使得 $|f \circ \mu(\bigcup_{n=n_1}^{\infty} E_n)| < \varepsilon$. 令

$$\widetilde{E}_1 = E_1 - \bigcup_{n=n_1}^{\infty} E_n,$$

则有 $\| \mu(\widetilde{E}_1) \| \geqslant |f_1 \circ \mu(\widetilde{E}_1)| > \varepsilon$，且当 $n \geqslant n_1$ 时，$\widetilde{E}_1$ 与 E_n 不相交，用 E_{n_1} 代替 E_1 进行上述讨论，得 $n_2 > n_1$，$\widetilde{E}_2 = E_{n_1} - \bigcup_{n=n_2}^{\infty} E_n$，但 $\| \mu(\widetilde{E}_2) \| > \varepsilon$. 如此下去，得到 $\mathscr{F}$ 中一列互不相交的集合 $\{\widetilde{E}_n\}$，满足 $\| \mu(\widetilde{E}_n) \| > \varepsilon$. 此与 μ 的完全可加性矛盾，这就证明了必要性.

定理 3.4 设 X 是 $\mathbf{B}$ 值可积随机变量，令

$$\mu(E) = \int_E X dP, \quad (E \in \mathscr{F}),$$

则 μ 是有界变差的完全可加的关于 P 绝对连续的 $\mathbf{B}$ 值测度，且

$$V_\mu(E) = \int_E \| X \| dP, \quad (E \in \mathscr{F}),$$

证 易知 μ 是完全可加的关于 P 绝对连续的 $\mathbf{B}$ 值测度，设 π 是 E 在 $\mathscr{F}$ 中的一个分划，则

$$\begin{aligned}\sum_{A\in\pi} \| \mu(A) \| &= \sum_{A\in\pi} \| \int_A X dP \| \\ &\leqslant \sum_{A\in\pi} \int_A \| X \| dP \\ &= \int_E \| X \| dP,\end{aligned}$$

因此，$V_\mu(E) \leqslant \int_E \| X \| dP$.

反之，对任何 $\varepsilon > 0$，由定理 1.10 及定理 2.1 可取简单函数列 $\{X_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \| X_n - X \| dP = 0.$$

设 n_0 满足

$$\int_\Omega \| X_{n_0} - X \| dP < \varepsilon.$$

又设 π' 是 E 在 $\mathscr{F}$ 中的一个分划，在分划的每个可测子集上 X_{n_0} 取常值，π 是比 π' 更精细的分划，满足

$$V_\mu(E) - \sum_{A\in\pi} \| \int_A X dP \| < \varepsilon.$$

注意到

$$\int_E \| X_{n_0} \| dP = \sum_{A\in\Pi} \| \int_A X_{n_0} dP \| ,$$

所以

$$\begin{aligned} &|V_\mu(E) - \int_E \| X_{n_0} \| dP | \\ &\leqslant |V_\mu(E) - \sum_{A\in\pi} \| \int_A X dP \| | + \sum_{A\in\pi} | \| \int_A X dP \| \\ &\quad - \| \int_A X_{n_0} dP \| | \leqslant \varepsilon + \int_E \| X - X_{n_0} \| dP < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

综上便得

$$V_\mu(E) = \lim_{n\to\infty}\int_E \| X_n \| dP = \int_E \| X \| dP, (E \in \mathscr{F}).$$

定理得证.

设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为概率空间，对 A、$B \in \mathscr{F}$，规定

$$\rho(A,B) = P(A\Delta B).$$

如果把 $\mathscr{F}$ 中任何两个仅相差零概集的集合视为同一，记此集类为 $\mathscr{F}[P]$，则由[2](见引理 10.11) 知 ρ 是 $\mathscr{F}[P]$ 上的一个距离且 $\mathscr{F}[P]$ 关于 ρ 是完备的距离空间.

如果 $\mu:\mathscr{F}\to\mathbf{B}$ 是完全可加的 B 值测度,且 $\mu\ll P$,注意到

$$P(A\triangle B)=P(A-(A\cap B))+P(B-(A\cap B)),$$

$$\mu(A)-\mu(B)=\mu(A-(A\cap B))-\mu(B-(A\cap B)),$$

所以 $P(A\triangle B)=0$ 时,$\mu(A)=\mu(B)$,即 μ 可以看作 $\mathscr{F}[P]$ 上的函数.

又当 E、$E_n\in\mathscr{F}[P]$,$n=1,2,\cdots$,$\rho(E_n,E)\to 0$ 时,有 $\mu(E_n)\to\mu(E)$. 此即 μ 是由 $\mathscr{F}[P]$ 到 $\mathbf{B}$ 的依 ρ 连续的映射.

定理 3.5 (Vitali-Hahn-Saks) 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间,$\mu_n:\mathscr{F}\to\mathbf{B}$,$n=1,2,\cdots$ 为一列完全可加的 $\mathbf{B}$ 值测度,$\mu_n\ll P$,$\forall\ n\geqslant 1$,且对 $E\in\mathscr{F}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(E)$ 均存在,则

$$\lim_{P(E)\to 0}\sup_{n\geqslant 1}\|\mu_n(E)\|=0.$$

证 设 $\varepsilon>0$,记

$$\mathscr{F}_{n,m}=\{E:E\in\mathscr{F}[P],\ \|\mu_n(E)-\mu_m(E)\|\leqslant\varepsilon\},$$

$$\mathscr{F}_q=\bigcap_{n,m\geqslant q}\mathscr{F}_{n,m},\quad q=1,2,\cdots$$

因为 μ_n 在 $\mathscr{F}[P]$ 上连续,易见 $\mathscr{F}_{n,m}$,$\mathscr{F}_q$ 均为闭集. 又因为对任何 $E\in\mathscr{F}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(E)$ 存在,所以,$\mathscr{F}[P]=\bigcup\limits_{q=1}^{\infty}\mathscr{F}_q$,但 $\mathscr{F}[P]$ 是完备的,由 Baire 定理知:$\mathscr{F}[P]$ 是第二纲的,所以存在自然数 n_0,$A\in\mathscr{F}$ 及 $r>0$,使得

$$\{E:P(E\triangle A)<r\}\subset\bigcap_{n,m\geqslant n_0}\{E:\|\mu_n(E)-\mu_m(E)\|\leqslant\varepsilon\},$$

再由 $\mu_n\ll P$,$n\geqslant 1$,故可取 δ,$0<\delta<r$,使得 $P(E)<\delta$ 时,有

$$\|\mu_n(E)\|<\varepsilon,n=1,2,\cdots,n_0.$$

注意到

$$P((A\cup E)\triangle A)\leqslant P(E)<\delta,$$

$$P((A-E)\triangle A)\leqslant P(E)<\delta,$$

由

$$\mu_n(E)=\mu_{n_0}(E)+\{\mu_n(A\cup E)-\mu_{n_0}(A\cup E)\}$$

$$-\{\mu_n(A-E)-\mu_{n_0}(A-E)\}$$

即得 $\quad \|\mu_n(E)\|<3\varepsilon,\ n=n_0+1,n_0+2,\cdots.$

推论 3.6 在定理 3.5 的条件下，若 $\mu(E)=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(E)$，$\forall E\in\mathscr{F}$，则 μ 是 $\mathscr{F}$ 上的完全可加 **B** 值测度.

证 显然 μ 是有限可加的，为证它是完全可加的，只须证明：如果 $E_n\in\mathscr{F}$，$E_n\downarrow\varnothing$，则 $\mu(E_n)\to 0$. 事实上，因 $P(E_n)\to 0$，$n\to\infty$，由定理 3.5 知：对任何 $\varepsilon>0$，存在 $m(\varepsilon)>0$，当 $m\geqslant m(\varepsilon)$ 时，有

$$\sup_n\|\mu_n(E_m)\|<\varepsilon,$$

从而当 $m\geqslant m(\varepsilon)$ 时，$\|\mu(E_m)\|\leqslant\varepsilon$.

定理 3.7 (Carathéodory-Hahn-Kluvanek 扩张定理) 设 $\mathscr{F}_0$ 是 Ω 上的代数，$\mathscr{F}=\sigma(\mathscr{F}_0)$，$\mu:\mathscr{F}_0\to\mathbf{B}$ 是 $\mathscr{F}_0$ 上的有界的，完全可加的 **B** 值测度，则下列陈述等价：

(1) μ 可唯一地由 $\mathscr{F}_0$ 扩张到 $\mathscr{F}$ 上去而成一个完全可加的 **B** 值测度；

(2) 在 $\mathscr{F}_0$ 上存在一个实值测度 P，使 $\mu\ll P$.

证明可参见[1] ($P.27$).

§4 本性收敛与随机收敛

定义 4.1 设$(\Delta,\leqslant)$是一半序集，若对任意 $t_1,t_2\in\Delta$，存在 $t_3\in\Delta$，使得 $t_1\leqslant t_3$ 及 $t_2\leqslant t_3$，则称$(\Delta,\leqslant)$为向右定向集.

设$(\Delta,\leqslant)$为向右定向集. 任取 $t\in\Delta$，记 $\Delta(t)=\{s;s\in\Delta,t\leqslant s\}$. 取 $\infty\,\overline{\in}\,\Delta$ 令 $\overline{\Delta}=\Delta\cup\{\infty\}$，并约定对一切 $t\in\Delta$，$t\leqslant\infty$ 则$(\overline{\Delta},\leqslant)$仍为向右定向集.

定义 4.2 设 Δ 是任一指标集，$\{X_t,t\in\Delta\}$ 是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的广义实值随机变量族，若广义实值随机变量 Y 满足：

(1) $\forall t \in \Delta$ 有 $X_t \leqslant Y$ a.e.；

(2) 若另一广义实值随机变量 Y' 也满足：

$\forall t \in \Delta$ 有 $X_t \leqslant Y'$ a.e.，则 $Y \leqslant Y'$ a.e.，

则称 Y 为 $\{X_t, t \in \Delta\}$ 的本性上确界，记为 $\operatorname*{esup}_{t\in\Delta} X_t$.

$\{X_t, t \in \Delta\}$ 的本性下确界定义为

$$\operatorname*{einf}_{t\in\Delta} X_t = -\operatorname*{esup}_{t\in\Delta}(-X_t).$$

显然，$\{X_t, t \in \Delta\}$ 的本性下确界定义等价于下面的陈述：若广义实值随机变量 Y 满足

(1) $\forall t \in \Delta$ 有 $Y \leqslant X_t$ a.e.；

(2) 若广义实值随机变量 Y' 使得 $\forall t \in \Delta$，有 $Y' \leqslant X_t$ a.e.，则 $Y' \leqslant Y$ a.e..

由此立即知：对任意的广义实值随机变量族 $\{X_t, t \in \Delta\}$，总有

$$\operatorname*{einf}_{t\in\Delta} X_t \leqslant \operatorname*{esup}_{t\in\Delta} X_t.$$

若 $\{A_t, t \in \Delta\}$ 是一可测集合族，则 $\{A_t, t \in \Delta\}$ 的本性上确界定义为一可测集合，记为 $\operatorname*{esup}_{t\in\Delta} A_t$，使得 $I_{\operatorname*{esup}_{t\in\Delta} A_t} = \operatorname*{esup}_{t\in\Delta} I_{A_t}$. 其本性下确界定义为 $\operatorname*{einf}_{t\in\Delta} A_t$，使得 $I_{\operatorname*{einf}_{t\in\Delta} A_t} = \operatorname*{einf}_{t\in\Delta} I_{A_t}$.

定理 4.1 设 Δ 是任一指标集合，$\{X_t, t \in \Delta\}$ 是定义在 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一族广义实值随机变量，则

(1) 在 a.e. 相等意义下 $\operatorname*{esup}_{t\in\Delta} X_t$ 唯一存在；

(2) 存在序列 $\{X_{t_n}, n \geqslant 1\} \subset \{X_t, t \in \Delta\}$，使得

$$\operatorname*{esup}_{t\in\Delta} X_t = \sup_{n\geqslant 1} X_{t_n}.$$

(3) 如果 $\{X_t, t \in \Delta\}$ 是向右定向集，则 $\{X_{t_n}, n \geqslant 1\}$ 可选成上升的序列，使得 $\operatorname*{esup}_{t\in\Delta} X_t = \sup_{n\geqslant 1} X_{t_n} = \lim_{n\to\infty} X_{t_n}$.

证　因定理只涉及 $\overline{R}$ 中的序结构，故不妨设每一 X_t 取值于 $[0,1]$（否则可通过 $\overline{R}$ 到 $[0,1]$ 上的一个双方单值递增的变换如 $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}^{-1} x + \frac{\pi}{2}}{\pi}$ 将一般情形转化成这种情形）令 $\mathscr{G}$ 是由

$\{X_t, t \in \Delta\}$ 的全体可数子集组成的集类，对每一 $G \in \mathscr{G}$，令

$$X_G = \sup_{t \in G} X_t,$$

$$\alpha = \sup_{G \in \mathscr{G}} EX_G,$$

则存在 $\{G_n, n \geqslant 1\} \subset \mathscr{G}$ 使得 $EX_{G_n} \to \alpha$. 易见

$$G^* \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \in \mathscr{G}$$

$$\alpha \geqslant EX_{G^*} \geqslant EX_{G_n} \to \alpha$$

于是 $EX_{G^*} = \alpha$. 下面证明 $Y \equiv X_{G^*}$ 即为所求. 显然，Y 是随机变量，任取 X_t，令 $G = G^* \cup \{X_t\}$，则 $X_G = Y \vee X_t$. 于是，$\alpha = EY \leqslant E(Y \vee X_t) = EX_G \leqslant \alpha$. 由于 α 是有限的，故 $Y \vee X_t = Y\ a.e.$. 从而，$X_t \leqslant Y\ a.e.$. 设 Y' 是任一随机变量，使得对任一 $t \in \Delta$，有 $X_t \leqslant Y'\ a.e.$，则由 Y 的定义有

$$Y = X_{G^*} = \sup_{X_t \in G^*} X_t \leqslant Y'\ a.e.,$$

这就证明了 $\operatorname{esup}_{t \in \Delta} X_t$ 存在. 唯一性由定义立得.

因为 G^* 为可数集，故可将 G^* 表示成 $\{X_{t_n}, n \geqslant 1\}$. 于是 $\operatorname{esup}_{t \in \Delta} X_t = X_{G^*} = \sup_{n \geqslant 1} X_{t_n}\ a.e.$.

若 $\{X_t, t \in \Delta\}$ 是向右定向集，则可取 $X_1 = X_{t_1}, \cdots, X_{n+1} \geqslant X_n \vee X_{t_{n+1}}, X_{n+1} \in \{X_t, t \in \Delta\}, n \geqslant 1$，从而

$$\sup_{n \geqslant 1} X_{t_n} \leqslant \lim_{n \to \infty} X_n \leqslant \operatorname{esup}_{t \in \Delta} X_t\ a.e.,$$

即 $$\operatorname{esup}_{t \in \Delta} X_t = \lim_{n \to \infty} X_n\ a.e..$$

定义 4.3 设 Δ 为向右定向集. 广义实值随机变量族 $\{X_t, t \in \Delta\}$ 的本性上、下极限分别定义为

$$\operatorname{elimsup}_{t \in \Delta} X_t = \operatorname{einf}_{t \in \Delta} (\operatorname{esup}_{s \in \Delta(t)} X_s),$$

$$\operatorname{eliminf}_{t \in \Delta} X_t = \operatorname{esup}_{t \in \Delta} (\operatorname{einf}_{s \in \Delta(t)} X_s).$$

若 $\operatorname{elimsup}_{t \in \Delta} X_t = \operatorname{eliminf}_{t \in \Delta} X_t = X_\infty$，则称 $\{X_t, t \in \Delta\}$ 本性收敛，并称随机变量 X_∞ 为 $\{X_t, t \in \Delta\}$ 本性收敛的极限，并记为 $\operatorname{elim}_{t \in \Delta} X_t = X_\infty$.

显然，当 $\Delta = N$ 时，本性收敛的概念与 $a.e.$ 收敛的概念是一致的.

由于 $\operatorname*{esup}_{t\in\Delta} X_t$ $a.e.$ 唯一确定，从而 $\operatorname*{einf}_{t\in\Delta} X_t$、$\operatorname*{elimsup}_{t\in\Delta} X_t$，$\operatorname*{eliminf}_{t\in\Delta} X_t$，$\operatorname*{elim}_{t\in\Delta} X_t$ 亦 $a.e.$ 唯一确定，故涉及它们的等式或不等式，常省去 $a.e.$ 记号.

定理 4.2 设 Δ 为向右定向集，$\{X_t, t \in \Delta\}$ 与 $\{Y_t, t \in \Delta\}$ 均为广义实值随机变量族. 则

(1) 对任意 $c \geqslant 0$，有

$$\operatorname*{esup}_{t\in\Delta}(cX_t) = c \operatorname*{esup}_{t\in\Delta} X_t,$$
$$\operatorname*{einf}_{t\in\Delta}(cX_t) = c \operatorname*{einf}_{t\in\Delta} X_t;$$

(2) 若 $\{X_t, t \in \Delta\}$ 与 $\{Y_t, t \in \Delta\}$ 均本性收敛，

则 $\operatorname*{elim}_{t\in\Delta}(X_t + Y_t) = \operatorname*{elim}_{t\in\Delta} X_t + \operatorname*{elim}_{t\in\Delta} Y_t$；

(3) 若 $\{X_t, t \in \Delta\}$ 本性收敛，则对任意实数 a 有

$$\operatorname*{elim}_{t\in\Delta}(aX_t) = a \operatorname*{elim}_{t\in\Delta} X_t$$

证 (1) 当 $c = 0$ 时，(1) 显然成立. 设 $c > 0$，由于 $\forall\, t \in \Delta$，$X_t \leqslant \operatorname*{esup}_{t\in\Delta} X_t$，故 $cX_t \leqslant c \operatorname*{esup}_{t\in\Delta} X_t$. 从而，$\operatorname*{esup}_{t\in\Delta}(cX_t) \leqslant c \operatorname*{esup}_{t\in\Delta} X_t$. 再由 $(cX_t) \leqslant \operatorname*{esup}_{t\in\Delta}(cX_t)$ 得 $X_t \leqslant \frac{1}{c} \operatorname*{esup}_{t\in\Delta}(cX_t)$. 故 $\operatorname*{esup}_{t\in\Delta} X_t \leqslant \frac{1}{c} \operatorname*{esup}_{t\in\Delta}(cX_t)$. 即 $c \operatorname*{esup}_{t\in\Delta} X_t \leqslant \operatorname*{esup}_{t\in\Delta}(cX_t)$，这就证明了第一个等式成立. 又

$$\begin{aligned}\operatorname*{einf}_{t\in\Delta}(cX_t) &= -\operatorname*{esup}_{t\in\Delta}(c(-X_t)) = -c \operatorname*{esup}_{t\in\Delta}(-X_t) \\ &= c(-\operatorname*{esup}_{t\in\Delta}(-X_t)) \\ &= c \operatorname*{einf}_{t\in\Delta} X_t,\end{aligned}$$

即第二个等式成立.

(2) 设 $\operatorname*{elim}_{t\in\Delta} X_t = X$，$\operatorname{elim} Y_t = Y$. 由定理 4.1 易证存在 $\{t_n, n \geqslant 1\} \subset \Delta$，$t_n \uparrow$，使得

$$\operatorname*{elim\,sup}_{t\in\Delta} X_t = \lim_{n\to\infty}(\operatorname*{esup}_{t\in\Delta(t_n)} X_t),$$

$$\operatorname*{elimsup}_{t\in\Delta} Y_t = \lim_{n\to\infty}(\operatorname*{esup}_{t\in\Delta(t_n)} Y_t),$$

$$\operatorname*{elimsup}_{t\in\Delta}(X_t + Y_t) = \lim_{n\to\infty}(\operatorname*{esup}_{t\in\Delta(t_n)}(X_t + Y_t)).$$

由于

$$\begin{aligned}\operatorname*{elimsup}_{t\in\Delta}(X_t + Y_t) &\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}(\operatorname*{esup}_{t\in\Delta(t_n)} X_t + \operatorname*{esup}_{t\in\Delta(t_n)} Y_t)\\ &\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}(\operatorname*{esup}_{t\in\Delta(t_n)} X_t) + \overline{\lim_{n\to\infty}}(\operatorname*{esup}_{t\in\Delta(t_n)} Y_t)\\ &= \lim_{n\to\infty}(\operatorname*{esup}_{t\in\Delta(t_n)} X_t) + \lim_{n\to\infty}(\operatorname*{esup}_{t\in\Delta(t_n)} Y_t)\\ &= X + Y,\end{aligned}$$

仿之可证 $\quad \operatorname*{eliminf}_{t\in\Delta}(X_t + Y_t) \geqslant X + Y,$

故 $$\operatorname*{elim}_{t\in\Delta}(X_t + Y_t) = X + Y.$$

(3) 设 $\operatorname*{elim}_{t\in\Delta} X_t = X$. 当 $a = 0$ 时,(3) 显然成立,当 $a > 0$ 时,由已证的(1) 知:

$$\begin{aligned}\operatorname*{elimsup}_{t\in\Delta}(a X_t) &= \operatorname*{einf}_{t\in\Delta}(\operatorname*{esup}_{s\in\Delta(t)}(aX_s))\\ &= a \operatorname*{einf}_{t\in\Delta}(\operatorname*{esup}_{s\in\Delta(t)} X_s) = a \operatorname*{elimsup}_{t\in\Delta} X_t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname*{eliminf}_{t\in\Delta}(a X_t) &= \operatorname*{esup}_{t\in\Delta}(\operatorname*{einf}_{s\in\Delta(t)}(aX_s))\\ &= a \operatorname*{esup}_{t\in\Delta}(\operatorname*{einf}_{s\in\Delta(t)} X_s) = a \operatorname*{eliminf}_{t\in\Delta} X_t,\end{aligned}$$

故 $$\operatorname*{elim}_{t\in\Delta}(a X_t) = a \operatorname*{elim}_{t\in\Delta} X_t.$$

当 $a = -1$ 时. 往证 $\operatorname*{elim}_{t\in\Delta}(-X_t) = -X$.

事实上,$$\begin{aligned}\operatorname*{elimsup}_{t\in\Delta}(-X_t) &= \operatorname*{einf}_{t\in\Delta}(\operatorname*{esup}_{s\in\Delta(t)}(-X_s))\\ &= \operatorname*{einf}_{t\in\Delta}(-\operatorname*{einf}_{s\in\Delta(t)} X_s)\\ &= -\operatorname*{esup}_{t\in\Delta}(\operatorname*{einf}_{s\in\Delta(t)} X_s)\\ &= -\operatorname*{eliminf}_{t\in\Delta} X_t,\end{aligned}$$

类似可得 $\quad \operatorname*{eliminf}_{t\in\Delta}(-X_t) = -\operatorname*{elimsup}_{t\in\Delta} X_t,$

这样 $\underset{t\in\Delta}{\text{elimsup}}(-X_t)=\underset{t\in\Delta}{\text{eliminf}}(-X_t)=-X$,

即 $$\underset{t\in\Delta}{\text{elim}}(-X_t)=-X=-\underset{t\in\Delta}{\text{elim}}X_t.$$

对任意 $a<0$,则有

$$\underset{t\in\Delta}{\text{elim}}(a X_t)=\underset{t\in\Delta}{\text{elim}}(|a|(-X_t))=|a|\underset{t\in\Delta}{\text{elim}}(-X_t)$$

$$=-|a|\underset{t\in\Delta}{\text{elim}}X_t=a\underset{t\in\Delta}{\text{elim}}X_t.$$

定义 4.4 设 Δ 为向右定向集,$\{X_t,t\in\Delta\}$ 为广义实值随机变量族.称

$$\text{einf}\{Y;Y\text{ 是广义实值随机变量. 且 }\lim_{t\in\Delta}P(Y<X_t)=0\}$$

为 $\{X_t,t\in\Delta\}$ 的随机上极限,记为$\underset{t\in\Delta}{\text{slimsup}}X_t$,$\{X_t,t\in\Delta\}$ 的随机下极限定义为

$$\underset{t\in\Delta}{\text{sliminf}}X_t=-\underset{t\in\Delta}{\text{slimsup}}(-X_t)$$

若$\underset{t\in\Delta}{\text{slimsup}}X_t=\underset{t\in\Delta}{\text{sliminf}}X_t=X_\infty$,则称$\{X_t,t\in\Delta\}$ 随机收敛,称 X_∞ 为$\{X_t,t\in\Delta\}$ 的随机极限.并记为 $\underset{t\in\Delta}{\text{slim}}X_t=X_\infty$.

定义 4.5 设 Δ 为向右定向集,$\{X_t,t\in\Delta\}$ 为实值随机变量族,X 为实值随机变量,若对任意 $\varepsilon>0$,有

$$\lim_{t\in\Delta}P(|X_t-X|>\varepsilon)=0,$$

则称$\{X_t,t\in\Delta\}$ 依概率收敛于 X,并记为 $X_t\xrightarrow{P}X$,或者$\lim_{t\in\Delta}X_t=X$,[P].

上述定义等价于:$\forall\ \varepsilon>0,\delta>0$,存在 $t_0\in\Delta$,当 $t\in\Delta(t_0)$ 时,恒有

$$P(|X_t-X|>\delta)<\varepsilon.$$

显然,当 $\Delta=N$ 时,上述定义即为通常随机变量序列依概率收敛的定义.

定理 4.3 设 Δ 为向右定向集,$\{X_t,t\in\Delta\}$ 为实值随机变量族,则$\underset{t\in\Delta}{\text{slim}}X_t=X$ 等价于 $X_t\xrightarrow{P}X$.

证 设 $X_t \xrightarrow{P} X$ 则 $-X_t \xrightarrow{P} -X$，故为证 $\underset{t\in\Delta}{\mathrm{slim}} X_t = X$，只须证 $\underset{t\in\Delta}{\mathrm{slimsup}} X_t \leqslant X$，令 $\underset{t\in\Delta}{\mathrm{slimsup}} X_t = X'$，由于 $X_t \xrightarrow{P} X$，取 $\varepsilon_n \downarrow 0$，则对每一 $n \geqslant 1$，有

$$\lim_{t\in\Delta} P(|X_t - X| > \varepsilon_n) = 0.$$

更有

$$\lim_{t\in\Delta} P(X_t - \varepsilon_n > X) = 0.$$

而 $X + \varepsilon_n$ 是实值随机变量，所以 $X + \varepsilon_n$ 属于

$$\{Y: Y \text{ 是广义实值随机变量且} \lim_{t\in\Delta} P(Y < X_t) = 0\},$$

从而，$X' \leqslant X + \varepsilon_n$ $a.e.$ $(\forall \quad n \geqslant 1)$. 设使 $X' \leqslant X + \varepsilon_n$ 不成立的零概集为 A_n，令 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，显然 $P(A) = 0$，且对一切 $n \geqslant 1$，均有 $X' \leqslant X + \varepsilon_n$（在 $\Omega - A$ 上），令 $n \to \infty$，则有 $X' \leqslant X$，$a.e.$.

设 $\underset{t\in\Delta}{\mathrm{slim}} X_t = X$，往证 $X_t \xrightarrow{P} X$. 首先证

"$\underset{t\in\Delta}{\mathrm{slimsup}} X_t = X, \varepsilon_n \downarrow 0 \Rightarrow$ 对每一固定的 $n \geqslant 1$，$\liminf_{t\in\Delta} P(X \leqslant X_t + \varepsilon_n) = 1$". 令

$$A = \{Y: Y \text{ 是广义实值随机变量}, \lim_{t\in\Delta} P(Y \geqslant X_t) = 1\},$$

则 $X = \underset{Y\in A}{\mathrm{einf}}\, Y$，易证 $(A, \leqslant)$ 为向左定向集，所以存在 $Y_k \in A, Y_k \downarrow$ 使得 $X = \lim_{k\to\infty} Y_k$，于是 $P(X \leqslant X_t - \varepsilon_n) \geqslant P(Y_k \leqslant X_t + \varepsilon_n) \geqslant P(Y_k \leqslant X_t)$，所以 $\liminf_{t\in\Delta} P(X \leqslant X_t + \varepsilon_n) = 1$.

仿之可证："$\underset{t\in\Delta}{\mathrm{sliminf}}\, X_t = X, \varepsilon_n \downarrow 0 \Rightarrow$ 对每一固定的 $n \geqslant 1$，$\liminf_{t\in\Delta} P(X \geqslant X_t - \varepsilon_n) = 1$."

总之，$\liminf_{t\in\Delta} P(|X - X_t| \leqslant \varepsilon_n) = 1$，对任意 $\varepsilon > 0$，总可取 $\varepsilon_n < \varepsilon$. 对一切 $t \in \Delta$，总有

$$P(|X - X_t| \leqslant \varepsilon_n) \leqslant P(|X - X_t| \leqslant \varepsilon),$$

这样 $1 = \lim_{t\in\Delta} P(|X - X_t| \leqslant \varepsilon_n) \leqslant \liminf_{t\in\Delta} P(|X - X_t| \leqslant \varepsilon)$

$$\leqslant \limsup_{t\in\Delta} P(|X - X_t| \leqslant \varepsilon) \leqslant 1,$$

即 $\lim\limits_{t\in\Delta} P(|X - X_t| \leqslant \varepsilon) = 1$. 这就证明了 $X_t \xrightarrow{P} X$.

定理 4.4 设 Δ 为向右定向集，$\{X_t, t \in \Delta\}$ 为实值随机变量族. 若 $\operatorname{elim}\limits_{t\in\Delta} X_t = X$，则 $\operatorname{slim}\limits_{t\in\Delta} X_t = X$.

证 因为 $\operatorname{elim}\limits_{t\in\Delta} X_t = X$，所以 $\operatorname{elim}\limits_{t\in\Delta}\sup X_t = \operatorname{einf}\limits_{t\in\Delta}(\operatorname{esup}\limits_{s\in\Delta(t)} X_s) = X$，令 $Y_t = \operatorname{esup}\limits_{s\in\Delta(t)} X_s$，显然，

$$Y_t \in A = \{Y: Y \text{ 为广义实值随机变量}, \lim_{t\in\Delta} P(Y < X_t) = 0\},$$

所以，$\operatorname{einf}\limits_{t\in\Delta} Y_t \geqslant \operatorname{einf}\limits_{Y\in A} Y = \operatorname{slimsup}\limits_{t\in\Delta} X_t$，故

$$\operatorname{slimsup}_{t\in\Delta} X_t \leqslant X.$$

仿之由 $\operatorname{eliminf}\limits_{t\in\Delta} X_t = \operatorname{esup}\limits_{t\in\Delta}(\operatorname{einf}\limits_{s\in\Delta(t)} X_s) = X$ 可推出 $\operatorname{sliminf}\limits_{t\in\Delta} X_t \geqslant X$，从而，$\operatorname{slim}\limits_{t\in\Delta} X_t = X$.

上述定理的逆命题不成立，这只要注意在 $\Delta = N$ 的情形，存在有依概率收敛的序列，但它不是 $a.e.$ 收敛的，从而可知本性收敛是比随机收敛强的一种收敛性.

§5 停时

在本节中恒设$(\Omega, \mathscr{F})$为一可测空间.

（一） 设$\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$是 $\mathscr{F}$ 中的上升子 σ 代数族，即"$t, s \in R_+, t \leqslant s \Rightarrow \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_s$". 令

$$\mathscr{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s,\ t \in R_+,$$

$$\mathscr{F}_{t-} = \bigvee_{s<t} F_s = \sigma(\bigcup_{s<t} \mathscr{F}_s),\ 0 < t < \infty,$$

$$\mathscr{F}_{0-} = \mathscr{F}_0,$$

$$\mathscr{F}_\infty = \mathscr{F}_{\infty-} = \mathscr{F}_{\infty+} = \mathscr{F}.$$

显然，$\{\mathscr{F}_{t+}, t \in \overline{R}_+\}$与$\{\mathscr{F}_{t-}, t \in \overline{R}_+\}$均为 $\mathscr{F}$ 的上升子 σ 代数族，且 $F_{t-} \subset \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_{t+}$，$\forall\, t \in \overline{R}_+$

定义 5.1 称 $\mathscr{F}$ 中的上升子 σ 代数族 $\{\mathscr{F}_t, t\in R_+\}$ 是右连续的，如果

$$\mathscr{F}_{t+} = \mathscr{F}_t, \forall\, t \in R_+. \tag{5.1}$$

显然，$\{\mathscr{F}_{t+}, t \in R_+\}$ 是右连续的，从而，任意上升的子 σ 代数族 $\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$ 总可以将它右连续化. 本节讨论的子 σ 代数族 $\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$ 总假定是单调上升的.

定义 5.2 称 Ω 到 $\overline{R}_+$ 的映射 τ 是 $\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$ 停时，在不引起混淆的情况下，简称为停时，如果

$$\{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t, \forall\, t \in R_+, \tag{5.2}$$

或等价地，$\{\tau > t\} \in \mathscr{F}_t, \forall\, t \in R_+$.

定理 5.1 设 $\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$ 是任一上升子 σ 代数族. 则

(1) τ 是 $\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$ 停时 $\Rightarrow \tau$ 是 $\{\mathscr{F}_{t+}, t \in R_+\}$ 停时.

(2) τ 是 $\{\mathscr{F}_{t+}, t \in R_+\}$ 停时的充要条件是

$$\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t, \forall\, t \in R_+ \tag{5.3}$$

或

$$\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t\ , \forall\, t \in R_+ \tag{5.4}$$

证 (1) 显然. 下面证(2). 注意到

$$\{\tau \leqslant t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\tau < t + \frac{1}{n}\}, \forall\, t \in R_+,$$

$$\{\tau < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau \leqslant t - \frac{1}{n}\}, \forall\, t \in R_+,$$

立即可知：τ 是 $\{\mathscr{F}_{t+}, t \in R_+\}$ 停时与 (5.3) 式或(5.4) 式等价.

由定理 5.1 知：若 τ 是 $\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$ 停时，则对每一 $t \in R_+$，有 $\{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t$，但逆命题不一定成立.

定理 5.2 若 τ_1, τ_2 均为 $\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$ 停时，则 $\tau_1 + \tau_2$，$\max\{\tau_1, \tau_2\}$，$\min\{\tau_1, \tau_2\}$ 亦为 $\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$ 停时.

证 由 $\{\max\{\tau_1, \tau_2\} \leqslant t\} = \{\tau_1 \leqslant t\} \cap \{\tau_2 \leqslant t\}$ 及 $\{\min\{\tau_1, \tau_2\} \leqslant t\} = \{\tau_1 \leqslant t\} \cup \{\tau_2 \leqslant t\}$ 立即可知：$\max\{\tau_1, \tau_2\}$，$\min\{\tau_1, \tau_2\}$ 均为 $\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$ 停时. 下面证：$\tau_1 + \tau_2$ 是 $\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$ 停时.

$\forall t \in R_+$，我们有

$$\begin{aligned}\{\tau_1+\tau_2>t\} &= \{\tau_1+\tau_2>t, 0<\tau_1<t\} \\ &\qquad \cup \{\tau_1+\tau_2>t, \tau_1=0\} \\ &\qquad \cup \{\tau_1+\tau_2>t, \tau_1>t, \tau_2=0\} \\ &\qquad \cup \{\tau_1+\tau_2>t, \tau_1\geqslant t, \tau_2>0\} \\ &= \{\tau_1+\tau_2>t, 0<\tau_1<t\} \cup \{\tau_2>t, \tau_1=0\} \\ &\qquad \cup \{\tau_1>t, \tau_2=0\} \cup \{\tau_1\geqslant t, \tau_2>0\} \\ &\xlongequal{\text{记作}} A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4,\end{aligned}$$

所以，若令 Q 是有理数集，则有

$$A_1 = \bigcup_{r\in(0,t)\cap Q} (\{r<\tau_1<t\} \cap \{\tau_2>t-r\}) \in \mathscr{F}_t,$$

$$A_2 = \{\tau_1=0\} \cap \{\tau_2>t\} \in \mathscr{F}_t,$$

$$A_3 = \{\tau_1>t\} \cap \{\tau_2=0\} \in \mathscr{F}_t,$$

$$A_4 = \{\tau_2\geqslant t\} \cap \{\tau_2>0\} \in \mathscr{F}_t.$$

因此，$\tau_1+\tau_2$ 是 $\{\mathscr{F}_t, t\in R_+\}$ 停时.

定理 5.3 若 $\{\tau_n\}$ 是一列 $\{\mathscr{F}_t, t\in R_+\}$ 停时，则 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\tau_n$ 是 $\{\mathscr{F}_t, t\in R_+\}$ 停时；若 $\{\mathscr{F}_t, t\in R_+\}$ 是右连续的，则 $\inf\limits_{n\geqslant 1}\tau_n$，$\liminf\limits_{n\to\infty}\tau_n$ 和 $\limsup\limits_{n\to\infty}\tau_n$ 皆为 $\{\mathscr{F}_t, t\in R_+\}$ 停时.

证　因为

$$\{\sup_{n\geqslant 1}\tau_n \leqslant t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{\tau_n\leqslant t\},$$

$$\{\inf_{n\geqslant 1}\tau_n < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\tau_n< t\},$$

$$\liminf_{n\to\infty}\tau_n = \sup_{k\geqslant 1}\inf_{n\geqslant k}\tau_n,$$

$$\limsup_{n\to\infty}\tau_n = \inf_{k\geqslant 1}\sup_{n\geqslant k}\tau_n.$$

由定理 5.1 知定理 5.3 成立.

定义 5.3 若 τ 是 $\{\mathscr{F}_t, t\in R_+\}$ 停时，定义

$$\mathscr{F}_\tau = \{A: A\in\mathscr{F}_\infty, A\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t, \forall t\in R_+\}.$$

易证 $\mathscr{F}_\tau$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数. 称 $\mathscr{F}_\tau$ 为 τ 前 σ 代数.

若 τ 是 $\{\mathscr{F}_{t-}, t \in R_+\}$ 停时，定义

$$\mathscr{F}_{\tau-} = \{A: A \in \mathscr{F}_\infty, A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_{t-}, \forall t \in R_+\},$$

易证 $\mathscr{F}_{\tau-}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数，且

$$\mathscr{F}_{\tau-} = \{A: A \in \mathscr{F}_\infty, A \cap \{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t, \forall t \in R_+\}.$$

定理 5.4 任给 $\mathscr{F}$ 的单调上升的子 σ 代数族 $\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$，则

(1) τ 是 $\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$ 停时 $\Rightarrow \tau$ 是 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的；

(2) τ_1, τ_2 皆为 $\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$ 停时，$\tau_1 \leqslant \tau_2 \Rightarrow \mathscr{F}_{\tau_1} \subset \mathscr{F}_{\tau_2}$；

(3) τ_n 是 $\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$ 停时 $(n \geqslant 1)$，$\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$ 右连续，$\tau = \inf\limits_{n \geqslant 1} \tau_n \Rightarrow \mathscr{F}_\tau = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_{\tau_n}$.

证 (1) 由 $\{\tau \leqslant a\} \cap \{\tau \leqslant t\} = \{\tau \leqslant a \wedge t\} \in \mathscr{F}_{a \wedge t} \subset \mathscr{F}_t (a \in R_+)$ 立得(1).

(2) 若 $A \in \mathscr{F}_{\tau_1}$，则 $A \cap \{\tau_2 \leqslant t\} = (A \cap \{\tau_1 \leqslant t\}) \cap \{\tau_2 \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t, \forall t \in R_+$，此即 $A \in \mathscr{F}_{\tau_2}$，(2) 得证.

(3) 由定理 5.3 知 τ 是 $\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$ 停时，故由(2)知 $\mathscr{F}_\tau \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{\tau_n}$；另一方面，若 $A \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{\tau_n}$，则

$$\begin{aligned} A \cap \{\tau < t\} &= A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau_n < t\}) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap \{\tau_n < t\}) \in \mathscr{F}_t, \forall t \in R_+. \end{aligned}$$

又因 $\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$ 是右连续的，故 τ 是 $\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$ 停时的充要条件是 τ 是 $\{\mathscr{F}_{t-}, t \in R_+\}$ 停时，再由 $F_{\tau-}$ 的等价表达式知 $A \in \mathscr{F}_\tau$，(3) 得证.

定理 5.5 设 τ_1, τ_2 皆为 $\{\mathscr{F}_t, t \in R_+\}$ 停时，则 $\{\tau_1 < \tau_2\}$、$\{\tau_2 < \tau_1\}$、$\{\tau_1 \leqslant \tau_2\}$、$\{\tau_2 \leqslant \tau_1\}$、$\{\tau_1 = \tau_2\}$ 皆属于 $\mathscr{F}_{\tau_1} \cap \mathscr{F}_{\tau_2}$.

证 令 Q 是有理数集. 则

$$\begin{aligned} &\{\tau_1 < \tau_2\} \cap \{\tau_2 \leqslant t\} \\ &= \bigcup_{\substack{r \in Q \\ r < t}} (\{\tau_1 < r\} \cap \{r < \tau_2 \leqslant t\}) \in \mathscr{F}_t, \forall t \in R_+, \end{aligned}$$

所以，$\{\tau_1 < \tau_2\} \in \mathscr{F}_{\tau_2}$. 又因为

$$\{\tau_1 < \tau_2\} \cap \{\tau_1 \leqslant t\}$$
$$= \bigcup_{r \in (Q \cap [0,t)) \cup \{t\}} (\{\tau_1 \leqslant r\} \cap \{r < \tau_2\}) \in \mathscr{F}_t, \forall t \in R_+$$

所以，$\{\tau_1 < \tau_2\} \in \mathscr{F}_{\tau_1}$. 故$\{\tau_1 < \tau_2\} \in \mathscr{F}_{\tau_1} \cap \mathscr{F}_{\tau_2}$.

由对称性有 $\{\tau_2 < \tau_1\} \in \mathscr{F}_{\tau_1} \cap \mathscr{F}_{\tau_2}$.

$$\{\tau_1 \leqslant \tau_2\} = \Omega - \{\tau_2 < \tau_1\} \in \mathscr{F}_{\tau_1} \cap \mathscr{F}_{\tau_2},$$
$$\{\tau_2 \leqslant \tau_1\} = \Omega - \{\tau_1 < \tau_2\} \in \mathscr{F}_{\tau_1} \cap \mathscr{F}_{\tau_2},$$
$$\{\tau_1 = \tau_2\} = \{\tau_1 \leqslant \tau_2\} - \{\tau_1 < \tau_2\} \in \mathscr{F}_{\tau_1} \cap \mathscr{F}_{\tau_2}.$$

（二）设$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$是$\mathscr{F}$中的上升子$\sigma$代数序列，令$\mathscr{F} = \mathscr{F}_\infty = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n$. 称$\Omega$到$\overline{N}$的映射$\tau$是$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$停时（在不引起混淆的情形下简称为停时），如果$\{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n, \forall n \in N$，或等价地，$\{\tau \leqslant n\} \in \mathscr{F}_n, \forall n \in N$. 若$\tau$是$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$停时，令

$$\mathscr{F}_\tau = \{A; A \in \mathscr{F}_\infty, A \cap \{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n, \forall n \in N\}.$$

显然，$\mathscr{F}_\tau$是$\mathscr{F}$的子σ代数. 称之为τ前σ代数或停时σ代数，且

$$\mathscr{F}_\tau = \{A; A \in \mathscr{F}_\infty, A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathscr{F}_n, \forall n \in N\}.$$

离散参数时，关于停时与停时σ代数有下面一些常用的性质：

（1）设τ是任一$\{\mathscr{F}_n\}$停时，则$A \in \mathscr{F}_\tau \Leftrightarrow A \in \mathscr{F}$且

$$\tau_A(\omega) = \begin{cases} \tau(\omega), \omega \in A, \\ \infty, \omega \in A^c \end{cases}$$

是停时.

（2）设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是概率空间，$\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为适应的广义实值随机变量序列，即$\{\mathscr{F}_n\}$是$\mathscr{F}$的单调上升的子$\sigma$代数序列，对每一$n \in N$，$X_n$是$\mathscr{F}_n$可测的广义实值随机变量. B是任一Borel 集，令

$T_B(\omega) = \inf\{n; n \in N, X_n(\omega) \in B\}$，约定$\inf\varnothing = \infty$. 则$T_B$为$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$停时.

若τ为停时，则

$$D_B^{\tau}(\omega) = \inf\{n; n > \tau(\omega), X_n(\omega) \in B\}$$

亦为停时. 记 D_B^0 为 D_B.

(3) 设 S 是一停时, T 是 $\mathscr{F}_S$ 可测的整值函数且 $S \leqslant T$, 则 T 也是停时, 特别, 对任意常数 $n \in N$, $S + n$ 是停时.

(4) 设 τ, σ 是两停时, 则 $\tau \vee \sigma = \max(\tau, \sigma)$ 与 $\tau \wedge \sigma = \min(\tau, \sigma)$ 也是停时, 进一步, 设 $\{\tau_k\}$ 是停时序列, 则 $\tau = \sup\limits_k \tau_k$, $\sigma = \inf\limits_k \tau_k$ 亦为停时.

(5) 设 τ, σ 是两个停时, 则 $\{\tau \leqslant \sigma\}$, $\{\sigma \leqslant \tau\}$, $\{\tau < \sigma\}$, $\{\sigma < \tau\}$, $\{\tau = \sigma\}$ 均属于 $\mathscr{F}_\tau \cap \mathscr{F}_\sigma$.

(6) 设 τ, σ 为两个停时, $A \subset \{\tau \leqslant \sigma\}$ 且 $A \in \mathscr{F}_\sigma$(或 $A \subset \{\tau = \sigma\}$, $A \in \mathscr{F}_\tau \cap \mathscr{F}_\sigma$), 则 $A \cap \mathscr{F}_\tau \subset A \cap \mathscr{F}_\sigma$(或 $A \cap \mathscr{F}_\tau = A \cap \mathscr{F}_\sigma$), 特别, 若 $\tau \leqslant \sigma$, 则 $\mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}_\sigma$.

(7) 设 $A \subset \{\tau \leqslant \sigma\}$, $A \in \mathscr{F}_\sigma$, 其中 τ, σ 是两个停时, 则对任意实值可积随机变量 X, 有

$$E(XI_A | \mathscr{F}_\tau) = E(E(XI_A | \mathscr{F}_\sigma) | \mathscr{F}_\tau).$$

(8) 设 τ 是 $\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$ 停时, 对任意可积实值随机变量 X, 令 $X_n = E(X | \mathscr{F}_n)$, $n \in N$, 定义

$$X_\tau = \begin{cases} X_n, \{\tau = n\}, \\ X, \{\tau = \infty\}, \end{cases}$$

则 $X_\tau = E(X | \mathscr{F}_\tau)$.

(9) 设 τ, σ 为 $\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$ 停时, 对任意可积实值随机变量 X, 有

$$E(X | \mathscr{F}_\tau) I_{\{\tau = \sigma\}} = E(X | \mathscr{F}_\sigma) I_{\{\tau = \sigma\}}.$$

(10) 设 τ 为 $\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$ 停时, 则

(i) $A \in \mathscr{F}_\tau$ 的充要条件是 A 可表为

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n \cap \{\tau = n\}) \cup (A_\infty \cap \{\tau = \infty\}),$$

其中 $A_n \in \mathscr{F}_n$, $n \in N$, $A_\infty \in \mathscr{F}_\infty$.

(ii) 随机变量 X 为 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的充要条件是 X 可表为

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} X_n I_{\{\tau=n\}} + X_\infty I_{\{\tau=\infty\}},$$

其中 X_n 为 $\mathscr{F}_n$ 可测的随机变量. X_∞ 为 $\mathscr{F}_\infty$ 可测的随机变量.

(11) 设 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为适应随机变量序列, τ 为停时, 则 $X_\tau I_{\{\tau<\infty\}}$ 是 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的; 若 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in \overline{N}\}$ 为适应随机变量序列, τ 为停时, 则 X_τ 为 $\mathscr{F}_\tau$ 可测.

(三) 设 $(\Delta, \leqslant)$ 是向右定向集, $\{\mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的上升子 σ 代数族. 即"$t, s \in \Delta, t \leqslant s \Rightarrow \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_s$". 在指标集为向右定向集的情形, 可类似定义停时及停时 σ 代数, 我们只叙述今后要用到的一些概念与记号.

一个定义在 Ω 上取值于 Δ 的映射 τ, 若 τ 至多取 Δ 中可列个值且对每一 $t \in \Delta$ 有 $\{\tau = t\} \in \mathscr{F}_t$, 则称 τ 是 $\{\mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 可列停时, 可列停时全体记为 T, 记 $T_f = \{\tau \in T: \tau$ 只取 Δ 中有限个值$\}$. T_f 中停时称为简单停时. 对 $\tau, \sigma \in T$, 若 $\tau \leqslant \sigma$ $a.e.$, 则记作 $\tau \leqslant \sigma$, 显然, 关于半序关系 $\leqslant$, T、T_f 仍为向右定向集. 对任意 $s \in \Delta$ 和 $\tau \in T$, 记

$$\Delta(s) = \{t \in \Delta: s \leqslant t\}, T(\tau) = \{\sigma \in T: \tau \leqslant \sigma\}.$$

对 $\tau \in T$, 令

$$\mathscr{F}_\tau = \{A \in \mathscr{F}: A \cap \{\tau = t\} \in \mathscr{F}_t, \forall\, t \in \Delta\}$$

易知 $\mathscr{F}_\tau$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数, 简称为 τ 前 σ 代数或停时 σ 代数.

§6 一致可积性

设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间, 令 $L^p(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B}) = \{X: X$ 是 Ω 上的 $\mathbf{B}$ 值随机变量, 且 $\int_\Omega \|X\|^p dP < \infty\}$, $p \geqslant 1$. $a.e.$ 相等的 $\mathbf{B}$ 值随机变量不加区别, 视为同一随机变量. Λ 表示任意的参数集合.

定义 6.1 称 $\mathbf{B}$ 值随机变量族 $\{X_t, t \in \Lambda\} \subset L^1(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B})$ 为一致可积的, 如果

$$\lim_{a\to\infty}\sup_{t\in\Lambda}\int_{\{\|X_t\|\geqslant a\}}\|X_t\|\,dP=0.$$

定理 6.1 设$\{X_t,t\in\Lambda\}$为一致可积的B值随机变量族，则下列条件成立：

(1) $\sup\limits_{t\in\Lambda}\int_\Omega\|X_t\|\,dP<\infty$；

(2) $\sup\limits_{t\in\Lambda}P(\|X_t\|\geqq a)\to 0(a\to\infty)$；

(3) $\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0$，对一切$E\in\mathscr{F}$，$P(E)<\delta$，有 $\sup\limits_{t\in\Lambda}\int_E\|X_t\|\,dP<\varepsilon$.

反之，若(1)与(3)或(2)与(3)成立，则$\{X_t,t\in\Lambda\}$为一致可积的.

证 设$\{X_t,t\in\Lambda\}$是一致可积的.

(1) 由一致可积的定义知：存在$a_0>0$，使得

$$\sup_{t\in\Lambda}\int_{\{\|X_t\|\geqq a_0\}}\|X_t\|\,dP<1,$$

因此，对一切$t\in\Lambda$，有

$$\int_\Omega\|X_t\|\,dP\leqslant a_0P(\|X_t\|<a_0)+1\leqslant a_0+1,$$

从而，$\sup\limits_{t\in\Lambda}\int_\Omega\|X_t\|\,dP\leqslant a_0+1<\infty$.

(2) 由(1)对每一$t\in\Lambda$及$a>0$，有

$$aP(\|X_t\|\geqslant a)\leqslant\sup_{t\in\Lambda}\int_\Omega\|X_t\|\,dP=c<\infty,$$

所以，$\sup\limits_{t\in\Lambda}P(\|X_t\|\geqslant a)\leqslant\dfrac{c}{a}$，

令$a\to\infty$得知(1)$\Rightarrow$(2).

(3) 令$E\in\mathscr{F}$，对$a>0$及一切$t\in\Lambda$，有

$$\int_E\|X_t\|\,dP=\int_{E\cap\{\|X_t\|\geqq a\}}\|X_t\|\,dP+\int_{E\cap\{\|X_t\|<a\}}\|X_t\|\,dP,$$

由一致可积性知：对任意 $\varepsilon>0$，可取 $a_0>0$ 使得对一切 $t\in\Lambda$ 均有

$$\int_{\{\|X_t\|\geq a\}}\|X_t\|\,dP<\frac{\varepsilon}{2},$$

这样，对充分大的 $a_0>0$ 及 $E\in\mathscr{F}$，有

$$\int_E\|X_t\|\,dP\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+a_0P(E),\forall\ t\in\Lambda.$$

对给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2a_0}$，对一切 $E\in\mathscr{F}$，$P(E)<\delta$，则有

$$\sup_{t\in\Lambda}\int_E\|X_t\|\,dP<\varepsilon.$$

反之，注意到(1)⇒(2)，我们只需证：若(2)与(3)成立，则 $\{X_t,t\in\Lambda\}$ 为一致可积的.

$\forall\ \varepsilon>0$，由(3)知：存在 $\delta>0$ 使得对一切 $E\in\mathscr{F}$，$P(E)<\delta$，有

$$\sup_{t\in\Lambda}\int_E\|X_t\|\,dP<\varepsilon.$$

又由(2)知：对给定的 $\delta>0$，存在 $a_0>0$，使得对一切 $a\geqslant a_0$ 及一切 $t\in\Lambda$，有

$$P(\|X_t\|\geq a)<\delta.$$

令 $E=\{\|X_t\|\geq a\}$，则对一切 $a\geq a_0$，一切 $t\in\Lambda$，有

$$\int_{\{\|X_t\|\geq a\}}\|X_t\|\,dP<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{a\to\infty}\sup\limits_{t\in\Lambda}\int_{\{\|X_t\|\geq a\}}\|X_t\|\,dP=0.$

推论 6.2 设 $\{X_t,t\in\Lambda\}$ 与 $\{Y_t,t\in\Lambda\}$ 均为 **B** 值可积随机变量族，若对每一 $t\in\Lambda$，$\|X_t\|\leqslant\|Y_t\|$，$a.e.$，且 $\{Y_t,t\in\Lambda\}$ 为一致可积，则 $\{X_t,t\in\Lambda\}$ 为一致可积. 特别，对一切 $t\in\Lambda$，$\|X_t\|\leqslant Y$，$a.e.$，Y 为可积的实值随机变量，则 $\{X_t,t\in\Lambda\}$ 为一致可积.

推论 6.3 设 $\{X_t,t\in\Lambda\}$ 与 $\{Y_t,t\in\Lambda\}$ 均为一致可积的 **B** 值

随机变量族，则$\{X_t \pm Y_t, t \in \Lambda\}$为一致可积的.

定理 6.4 设$\{X_n\}$为一可积的 B 值随机变量序列，X为一 B 值随机变量，则下列条件等价：

(1) $X_n \xrightarrow{L^1} X$，即$\int_\Omega \| X_n - X \| dP \to 0 (n \to \infty)$；

(2) $X_n \xrightarrow{P} X$，且$\{X_n\}$为一致可积.

证 (1)⇒(2). 设$X_n \xrightarrow{L^1} X$，首先注意到X是可积的，令$E \in \mathscr{F}$，我们有

$$\int_E \| X_n \| dP \leqslant \int_E \| X \| dP + \int_\Omega \| X_n - X \| dP.$$

给定$\varepsilon > 0$，选取一正整数M，使得当$n > M$时，有$\int_\Omega \| X_n - X \| dP \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$，再选取$\delta > 0$，使得对一切$E \in \mathscr{F}, P(E) \leqslant \delta$，有

$$\int_E \| X \| dP \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \int_E \| X_n \| dP \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad (n = 1, 2, \cdots, M),$$

于是，对一切$E \in \mathscr{F}, P(E) \leqslant \delta$，有

$$\sup_n \int_E \| X_n \| dP \leqslant \varepsilon.$$

此外，我们有$\sup_n \int_\Omega \| X_n \| dP < \infty$，故由定理 6.1 知$\{X_n\}$为一致可积的. 最后，显然有$X_n \xrightarrow{P} X$.

(2)⇒(1) 设$\{X_n\}$一致可积，且$X_n \xrightarrow{P} X$. 则存在子列$\{n_k\} \subset N$使得$X_{n_k} \xrightarrow{a.e.} X$，从而，$\| X_{n_k} \| \xrightarrow{a.e.} \| X \|$，由法都引理有

$$\int_\Omega \| X \| dP \leqslant \sup_k \int_\Omega \| X_{n_k} \| dP$$

$$\leqslant \sup_n \int_\Omega \| X_n \| dP < \infty,$$

故X可积，从而$\{X_n - X\}$一致可积，对任给$\varepsilon > 0$，由定理 6.1 知：

存在 $\delta > 0$,使得对一切 $E \in \mathscr{F}$,$P(E) < \delta$,有

$$\sup_n \int_E \| X_n - X \| dP \leqslant \varepsilon.$$

取 n_0 充分大,使得当 $n \geqq n_0$ 时,有 $P(\| X_n - X \| \geqslant \varepsilon) < \delta$,于是,当 $n \geqslant n_0$ 时,有

$$\int_\Omega \| X_n - X \| dP$$

$$= \int_{(\| X_n - X \| < \varepsilon)} \| X_n - X \| dP + \int_{(\| X_n - X \| \geqslant \varepsilon)} \| X_n - X \| dP \leqslant 2\varepsilon.$$ 这表明 $X_n \xrightarrow{L^1} X$.

定理 6.5 设 $\{X_t, t \in \Lambda\}$ 为可积的 B 值随机变量族,则下列条件等价:

(1) $\{X_t, t \in \Lambda\}$ 是一致可积的;

(2) 存在 $R_+ = [0, \infty)$ 上满足 $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{\psi(t)}{t} = \infty$ 的非负 Borel 函数 ψ,使得

$$\sup_{t \in \Lambda} \int_\Omega \psi(\| X_t \|) dP < \infty.$$

证 (1)⇒(2). 设 $\{X_t, t \in \Lambda\}$ 是一致可积的,由于对任何 $a > 0$,对任一 $t \in \Lambda$,有

$$\int_\Omega (\| X_t \| - a)^+ dP \leqslant \int_{(\| X_t \| > a)} \| X_t \| dP,$$

故存在自然数列 $n_k \uparrow \infty$,使得

$$\sup_{t \in \Lambda} \int_\Omega (\| X_t \| - n_k)^+ dP < 2^{-k}, k \geqq 1.$$

令 $\psi(t) = \sum\limits_{k \geq 1} (n - n_k)^+, n \leqslant t < n + 1, n = 0, 1, 2, \cdots$,则 ψ 为非负,单调非降,右连续,且由法都引理有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\psi(n)}{n} = \liminf_{n \to \infty} \sum_{k \geq 1} \left(1 - \frac{n_k}{n}\right)^+$$

$$\geqq \sum_{k \geqq 1} \liminf_{n \to \infty} (1 - \frac{n_k}{n})^+ = \infty.$$

从而$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\psi(n)}{n} = \infty$. 最后，对任一 $t \in \Lambda$，有

$$\int_\Omega \psi(\| X_t \|) dP = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (n - n_k)^+ P(n \leqslant \| X_t \| < n + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (n - n_k)^+ P(n \leqslant \| X_t \| < n + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega (\| X_t \| - n_k)^+ dP \leqslant 1,$$

故

$$\sup_{t \in \Lambda} \int_\Omega \psi(\| X_t \|) dP < \infty.$$

(2)⇒(1). 设 (2) 成立，对给定的 $\varepsilon > 0$，令 $c = \dfrac{\sup\limits_{t \in \Lambda} \int_\Omega \psi(\| X_t \|) dP}{\varepsilon}$，选取 $\delta_0 > 0$ 及充分大的 a，使得当 $t \geqslant a$ 时，有 $\dfrac{\psi(t)}{t} \geqslant c + \delta_0$，则对每一 $t \in \Lambda$，有

$$\int_{\{\| X_t \| \geqq a\}} \| X_t \| dP \leqslant \frac{1}{c + \delta_0} \int_{\{\| X_t \| \geqq a\}} \psi(\| X_t \|) dP.$$

于是

$$\sup_{t \in \Lambda} \int_{\{\| X_t \| \geqq a\}} \| X_t \| dP \leqslant \frac{1}{c + \delta_0} \sup_{t \in \Lambda} \int_\Omega \psi(\| X_t \|) dP < \varepsilon,$$

即$\{X_t, t \in \Lambda\}$为一致可积的.

推论 6.6 设$\{X_t, t \in \Lambda\} \subset L^p(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B})$ $(p > 1)$，若 $\sup\limits_{t \in \Lambda} \int_\Omega \| X_t \|^p dP < \infty$，则$\{X_t, t \in \Lambda\}$是一致可积的.

定理 6.7 设 X 为任一可积的 **B** 值随机变量，$\{\mathscr{G}_t, t \in \Lambda\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的任意一族子 σ 代数. 则$\{E(X | \mathscr{G}_t), t \in \Lambda\}$为一致可积族.

证　因为对每一 $t \in \Lambda$，$\| E(X | \mathscr{G}_t) \| \leqslant E(\| X \| | \mathscr{G}_t)$，为证

$\{E(X|\mathscr{G}_t), t\in\Lambda\}$ 是一致可积的，只需证$\{E(\|X\||\mathscr{G}_t), t\in\Lambda\}$为一致可积的实值随机变量族，而对每一$t\in\Lambda$，有

$$\int_{\{E(\|X\||\mathscr{G}_t)\geqq a\}} E(\|X\||\mathscr{G}_t)dP = \int_{\{E(\|X\||\mathscr{G}_t)\geqq a\}} \|X\|dP$$

$$= \int_{\{E(\|X\||\mathscr{G}_t)\geqq a\}\cap\{\|X\|\leqslant c\}} \|X\|dP + \int_{\{E(\|X\||\mathscr{G}_t)\geqq a\}\cap\{\|X\|>c\}} \|X\|dP$$

$$\leqslant cp(E(\|X\||\mathscr{G}_t)\geqq a) + \int_{\{\|X\|>c\}} \|X\|dP$$

$$\leqslant \frac{c}{a}E\|X\| + \int_{\{\|X\|>c\}} \|X\|dP,$$

于是 $\lim\limits_{a\to\infty}\sup\limits_{t\in\Lambda}\int_{\{E(\|X_t\||\mathscr{G}_t)\geqq a\}} E(\|X_t\||\mathscr{G}_t)dP \leqslant \int_{\{\|X\|>c\}} \|X\|dP$. 再令 $c\to\infty$ 得

$$\lim_{a\to\infty}\sup_{t\in\Lambda}\int_{\{E(\|X_t\||\mathscr{G}_t)\geqq a\}} E(\|X_t\||\mathscr{G}_t)dP = 0.$$

定义 6.2 设Δ是向右定向集，$\{X_t, t\in\Delta\}$为可积的 **B** 值随机变量族.

(1) 称$\{X_t, t\in\Delta\}$是尾部 L^1 有界的，若存在 $t_0\in\Delta$，使得

$$\sup_{t\in\Delta(t_0)}\int_\Omega \|X_t\|dP < \infty;$$

(2) 称$\{X_t, t\in\Delta\}$是尾部一致绝对连续的，若对任意的$\varepsilon>0$，存在 $t_0\in\Delta$ 和 $\delta>0$，使对任意 $E\in\mathscr{F}$，$P(E)<\delta$，有

$$\sup_{t\in\Delta(t_0)}\int_E \|X_t\|dP < \varepsilon;$$

(3) 称$\{X_t, t\in\Delta\}$是尾部一致可积的，若对任意$\varepsilon>0$，存在$t_0\in\Delta$，$\lambda_0>0$，使对一切$\lambda>\lambda_0$，有

$$\sup_{t\in\Delta(t_0)}\int_{\{\|X_t\|>\lambda\}} \|X_t\|dP < \varepsilon.$$

显然，若$\{X_t, t\in\Delta\}$为一致可积族，则它必是尾部一致可积

的.

定理 6.8 B 值随机变量族$\{X_t, t \in \Delta\}$为尾部一致可积的充要条件是:

(1) $\{X_t, t \in \Delta\}$ 尾部 L^1 有界;

(2) $\{X_t, t \in \Delta\}$ 尾部一致绝对连续.

证 必要性,令 $A \in \mathscr{F}, \lambda > 0$,则有

$$\int_A \| X_t \| dP \leqslant \lambda P(A) + \int_{\{\| X_t \| > \lambda\}} \| X_t \| dP \qquad (6.1)$$

设$\{X_t, t \in \Delta\}$是尾部一致可积的,则对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $t_0 \in \Delta, \lambda_0 > 0$,当 $\lambda > \lambda_0$ 时,有

$$\sup_{t \in \Delta(t_0)} \int_{\{\| X_t \| > \lambda\}} \| X_t \| dP < \frac{\varepsilon}{2}.$$

在(6.1)式中取 $A = \Omega$,立即得条件(1),令 $\delta = \frac{\varepsilon}{2\lambda}$,立即得条件(2),这就证明了必要性.

充分性. 设条件(1)与(2)成立.由(1)知,存在 $t_1 \in \Delta$,使

$$\sup_{t \in \Delta(t_1)} \int_\Omega \| X_t \| dP < \infty,$$

由(2)知,$\forall \varepsilon > 0$,存在 $t_2 \in \Delta, \delta > 0$,使对任意 $A \in \mathscr{F}, P(A) < \delta$,有

$$\sup_{t \in \Delta(t_2)} \int_A \| X_t \| dP < \varepsilon,$$

取 $t_0 \in \Delta$,使 $t_0 \geqslant t_1, t_0 \geqslant t_2$,对上述 ε 及 δ 同时有

$$\sup_{t \in \Delta(t_0)} \int_\Omega \| X_t \| dP < \infty$$

及

$$\sup_{t \in \Delta(t_0)} \int_A \| X_t \| dP < \varepsilon \ (A \in \mathscr{F}, P(A) < \delta)$$

于是,当 $\lambda > \frac{a}{\delta}$ 时(其中 $a = \sup_{t \in \Delta(t_0)} \int_\Omega \| X_t \| dP < \infty$),对一切 $t \in$

$\Delta(t_0)$，有

$$P(\|X_t\|>\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda}E\|X_t\|\leqslant\frac{a}{\lambda}<\delta,$$

因此，

$$\sup_{t\in\Delta(t_0)}\int_{\{\|X_t\|>\lambda\}}\|X_t\|dP<\varepsilon.$$

这表明$\{X_t,t\in\Delta\}$尾部一致可积.

定理 6.9 B值随机变量族$\{X_t,t\in\Delta\}L^1$收敛于X的充要条件是：

(1) $\{X_t,t\in\Delta\}$依概率收敛于X且$E\|X\|<\infty$；

(2) $\{X_t,t\in\Delta\}$尾部一致可积.

证 必要性. (1) 显然成立，下证(2) 成立. 令$A\in\mathscr{F}$，则有

$$\int_A\|X_t\|dP\leqslant\int_A\|X\|dP+\int_\Omega\|X_t-X\|dP. \tag{6.2}$$

由于$X_t\xrightarrow{L^1}X$，对任意给定的$\varepsilon>0$，可选取$t_0\in\Delta$，使得当$t_0\leqslant t\in\Delta$时，有

$$\int_\Omega\|X_t-X\|dP<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令$A=\Omega$，则由(6.2)式立即知$\{X_t,t\in\Delta\}$尾部L^1有界，又由$E\|X\|<\infty$，故可选取$\delta>0$，当$A\in\mathscr{F}$，$P(A)<\delta$时，有

$$\int_A\|X\|dP<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是，

$$\sup_{t\in\Delta(t_0)}\int_A\|X_t\|dP<\varepsilon,$$

即$\{X_t,t\in\Delta\}$是尾部一致绝对连续的，由定理6.8知$\{X_t,t\in\Delta\}$尾部一致可积，即(2) 成立.

充分性. 设条件(1) 与(2) 成立. 任给$\varepsilon>0$，由(2) 知，存在$t_0\in\Delta$，$\lambda_0>0$，取定$\lambda>\lambda_0$，对一切$t\in\Delta(t_0)$，有

$$\int_{\{\|X_t\|>\lambda\}} \|X_t\| dP < \frac{\varepsilon}{4},$$

对上述 ε 及 λ，由(1) 知，存在 $t_1 \in \Delta$，当 $t \in \Delta(t_1)$ 时，有

$$P(\|X_t - X\| \geqq \frac{\varepsilon}{4}) < \frac{\varepsilon}{4\lambda}$$

又由(1) $\|X\|$ 是可积的，对上述 ε，存在 $\delta > 0$，当 $A \in \mathscr{F}$，$P(A) > \delta$ 时，有

$$\int_A \|X\| dP < \frac{\varepsilon}{4},$$

而对 δ，可选取 $t_2 \in \Delta$，对一切 $t \in \Delta(t_2)$，有

$$P(\|X_t - X\| \geqq \frac{\varepsilon}{4}) < \delta,$$

于是，可选取 $s \in \Delta, s \geqq t_0, s \geqq t_1, s \geqq t_2$，这时，对一切 $t \in \Delta(s)$，有

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|X_t - X\| dP \leqslant & \int_{\{\|X_t - X\| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\} \cap \{\|X_t\| > \lambda\}} \|X_t\| dP \\ & + \int_{\{\|X_t - X\| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\} \cap \{\|X_t\| \leqslant \lambda\}} \|X_t\| dP + \int_{\{\|X_t - X\| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\}} \|X_t\| dP \\ & + \int_{\{\|X_t - X\| < \frac{\varepsilon}{4}\}} \|X_t - X\| dP \\ \leqslant & \ \varepsilon,\end{aligned}$$

这表明 $X_t \xrightarrow{L^1} X$.

§7　条件一致可积性

设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$是概率空间，T 为任一参数集，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{F}$ 的任一子 σ 代数，令 $L^1_{\mathscr{B}}(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B}) = \{X: X$ 是 Ω 上之 $\mathbf{B}$ 值随机变量，并且 $E(\|X\| \mid \mathscr{B}) < \infty, a.e.\}$，简记 $L^1_{\mathscr{B}}(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B})$ 为 $L^1_{\mathscr{B}}$. 显然，

$L^1(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})\subset L^1_{\mathscr{B}}(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$.

定义 7.1 称B值随机变量族$\{X_t,t\in T\}$关于$\mathscr{B}$是条件一致可积的，如果

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|\geqslant k\}}|\mathscr{B})=0,\ a.e.. \tag{7.1}$$

显然，(7.1)式等价于

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>k\}}|\mathscr{B})=0,\ a.e.. \tag{7.2}$$

如果$\mathscr{B}=\{\varnothing,\Omega\}$，则上述关于$\mathscr{B}$条件一致可积就是通常的一致可积.

定理 7.1 设$\{X_t,t\in T\}$为B值随机变量族，$\mathscr{B}$为$\mathscr{F}$的任一子σ代数，则下列陈述等价：

(1) $\{X_t,t\in T\}$关于$\mathscr{B}$条件一致可积；

(2) 对任何实数$\varepsilon>0$，存在$\mathscr{B}$可测的实值随机变量$\lambda>0$，a.e.，使得

$$\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>\lambda\}}|\mathscr{B})<\varepsilon,\ a.e.;$$

(3) 对任何$\mathscr{B}$可测的实值随机变量$\varepsilon>0$, a.e.，存在$\mathscr{B}$可测的实值随机变量$\lambda>0$, a.e.，使

$$\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>\lambda\}}|\mathscr{B})<\varepsilon,\ a.e..$$

证 (1)⇒(2). $\forall\ \varepsilon>0$，由于

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>k\}}|\mathscr{B})=0,\ a.e.,$$

据叶果罗夫定理知：$\forall\ \delta>0$，$\exists\ E\in\mathscr{B}$，$P(\Omega-E)<\delta$，使得在E上$\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>k\}}|\mathscr{B})$一致收敛于0. 于是，可取$\delta_1=1$，$E_1\in\mathscr{B}$，$P(\Omega-E_1)<1$，使$\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>k\}}|\mathscr{B})$在$E_1$上一致收敛于0，即对上述$\varepsilon>0$，$\exists\ k_1\in N$，$\forall\ k\geqslant k_1$，$\forall\ \omega\in E_1$，有

$$\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>k\}}|\mathscr{B})<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取$\delta_2=\dfrac{1}{2}$，$E_2\in\mathscr{B}$，$P(\Omega-E_2)<\dfrac{1}{2}$，$\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>k\}}|\mathscr{B})$在$E_2$上一致收敛于0，不妨设$E_2\supset E_1$，否则取$E_2$为$E_1\cup E_2$. 这

样，对上述 $\varepsilon > 0$，$\exists\ k_2 \in N$，$\forall\ k \geqslant k_2$，$\forall\ \omega \in E_2$，有

$$\operatorname*{esup}_{t\in T} E(\|X_t\| I_{\{\|X_t\|>k\}} | \mathscr{B}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

按上法继续作下去，可取得 $\delta_m = \frac{1}{m}(m \geqslant 1)$，$E_m \in \mathscr{B}$，$P(\Omega - E_m) < \frac{1}{m}$，$E_m \uparrow$，$\operatorname*{esup}_{t\in T} E(\|X_t\| I_{\{\|X_t\|>k\}} | \mathscr{B})$ 在 E_m 上一致收敛于 0．对上述 $\varepsilon > 0$，$\exists\ k_m \in N$，$\forall\ k \geqslant k_m$，$\forall\ \omega \in E_m$，有

$$\operatorname*{esup}_{t\in T} E(\|X_t\| I_{\{\|X_t\|>k\}} | \mathscr{B}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $\lambda = k_1 I_{E_1} + k_2 I_{E_2 - E_1} + \cdots\cdots + k_m I_{E_m - E_{m-1}} + \cdots$，显然，$\lambda$ 是 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量，令 $A_1 = E_1$，$A_m = E_m - E_{m-1}$，$m \geqslant 2$，则集合序列 $\{A_n\}$ 两两不交且 $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$，这样，$\lambda > 0$，$a.e.$．又因为对每一 $t \in T$，对任何 $A \in \mathscr{B}$，有

$$\begin{aligned}
&\int_A E(\|X_t\| I_{\{\|X_t\|>\lambda\}} | \mathscr{B}) dP \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A\cap A_i} E(\|X_t\| I_{\{\|X_t\|>\lambda\}} | \mathscr{B}) dP \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A\cap A_i} \|X_t\| I_{\{\|X_t\|>\lambda\}} dP \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A\cap A_i} \|X_t\| I_{\{\|X_t\|>k_i\}} dP \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A\cap A_i} \frac{\varepsilon}{2} dP = \int_A \frac{\varepsilon}{2} dP.
\end{aligned}$$

从而，$E(\|X_t\| I_{\{\|X_t\|>\lambda\}} | \mathscr{B}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$，$a.e.$，于是

$$\operatorname*{esup}_{t\in T} E(\|X_t\| I_{\{\|X_t\|>\lambda\}} | \mathscr{B}) < \varepsilon,\ a.e..$$

(2)⇒(3)．对任一 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\varepsilon > 0$，$a.e.$，取常数序列 $\varepsilon_n \downarrow 0$，使得

$$P(\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon_n) < \frac{1}{2^n}.$$

由(2)知:对每一 $m \geqslant 1$,存在 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\lambda_m > 0$,$a.e.$,使得

$$\underset{t \in T}{\text{esup}} E(\| X_t \| I_{\{\| X_t \| > \lambda_m\}} | \mathscr{B}) < \varepsilon_m,\ a.e..$$

不妨设 $\lambda_m \uparrow \infty$,$a.e.$.令

$$\lambda = \lambda_1 I_{\{\frac{\varepsilon}{2} > \varepsilon_1\}} + \lambda_2 I_{\{\varepsilon_1 \geqslant \frac{\varepsilon}{2} > \varepsilon_2\}} + \cdots + \lambda_m I_{\{\varepsilon_{m-1} \geqslant \frac{\varepsilon}{2} > \varepsilon_m\}} + \cdots$$

再令 $A_1 = \{\frac{\varepsilon}{2} > \varepsilon_1\}$,$A_m = \{\varepsilon_{m-1} \geqslant \frac{\varepsilon}{2} > \varepsilon_m\}$,$m \geqslant 2$.显然,$\{A_n\}$ 两两不交,$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$,$\lambda > 0$,$a.e.$,且 λ 为 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量.又因 $\forall\, t \in T$,$\forall\, A \in \mathscr{B}$,有

$$\begin{aligned}
\int_A E(\| X_t \| I_{\{\| X_t \| > \lambda\}} | \mathscr{B}) dP &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A \cap A_i} E(\| X_t \| I_{\{\| X_t \| > \lambda\}} | \mathscr{B}) dP \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A \cap A_i} \| X_t \| I_{\{\| X_t \| > \lambda\}} dP = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A \cap A_i} \| X_t \| I_{\{\| X_t \| > \lambda_i\}} dP \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A \cap A_i} E(\| X_t \| I_{\{\| X_t \| > \lambda_i\}} | \mathscr{B}) dP \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A \cap A_i} \varepsilon_i dP \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A \cap A_i} \frac{\varepsilon}{2} dP = \int_A \frac{\varepsilon}{2} dP.
\end{aligned}$$

从而,$E(\| X_t \| I_{\{\| X_t \| > \lambda\}} | \mathscr{B}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$,$a.e.$.于是,

$$\underset{t \in T}{\text{esup}} E(\| X_t \| I_{\{\| X_t \| > \lambda\}} | \mathscr{B}) < \varepsilon,\ a.e..$$

这就证明了(3)成立.

(3)⇒(1),对任何常数 $\varepsilon > 0$,由(3)知:存在 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\lambda > 0$,$a.e.$,使得

$$\underset{t \in T}{\text{esup}} E(\| X_t \| I_{\{\| X_t \| > \lambda\}} | \mathscr{B}) < \varepsilon,\ a.e..$$

于是,取 $\varepsilon_1 = 1$,存在 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\lambda_1 > 0$,$a.e.$,使得

$$\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>\lambda_1\}}|\mathscr{B})<1,\ a.e..$$

取 $\varepsilon_2=\frac{1}{2}$ 存在 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\lambda_2>0, a.e.$，使得

$$\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>\lambda_2\}}|\mathscr{B})<\frac{1}{2},\ a.e..$$

这样继续作下去，可得一列 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\lambda_m>0, a.e.$ $(m\geqslant 1)$，使得

$$\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>\lambda_m\}}|\mathscr{B})<\frac{1}{m},\ a.e..$$

从而，$\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>\lambda_m\}}|\mathscr{B})\to 0,\ a.e.\ (m\to\infty)$，不妨设 $\lambda_m\uparrow\infty, a.e.$，于是，存在正整数序列 $M_k\uparrow\infty$，使得 $P(\lambda_k<M_k)\geqslant 1-\frac{1}{2^k}$. 令

$$\lambda'_m=\begin{cases}\lambda_m, & \lambda_m\leqslant M_m\\ M_m, & \lambda_m>M_m.\end{cases}$$

下面证明 $\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>\lambda'_m\}}|\mathscr{B})$

$$-\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>\lambda_m\}}|\mathscr{B})\xrightarrow{P}0,(m\to\infty).$$

事实上，

$$\begin{aligned}&\left|\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>\lambda'_m\}}|\mathscr{B})-\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>\lambda_m\}}|\mathscr{B})\right|\\ &\leqslant\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{M_m\leqslant\|X_t\|\leqslant\lambda_m\}}|\mathscr{B})\\ &\leqslant E(\lambda_m I_{\{M_m\leqslant\lambda_m\}}|\mathscr{B})=\lambda_m I_{\{M_m\leqslant\lambda_m\}},a.e..\end{aligned}$$

又因为 $P(\lambda_m I_{\{M_m\leqslant\lambda_m\}}>\varepsilon)\leqslant\frac{1}{2^m}$，从而，

$$\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>\lambda'_m\}}|\mathscr{B})-\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>\lambda_m\}}|\mathscr{B})\xrightarrow{P}0,(m\to\infty).$$

由于 $$\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>\lambda_m\}}|\mathscr{B})\xrightarrow{P}0,(m\to\infty),$$

故 $$\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>\lambda'_m\}}|\mathscr{B})\xrightarrow{P}0,(m\to\infty).$$

又由于 $0\leqslant\operatorname*{esup}_{t\in T}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>\lambda'_m\}}|\mathscr{B})\downarrow\ ,(m\to\infty).$

从而 $\underset{t\in T}{\text{esup}}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>\lambda'_m\}}|\mathscr{B})\longrightarrow 0, a.e.\ (m\to\infty)$.

又由于 $\lambda'_m\leqslant M_m$，故

$$\underset{t\in T}{\text{esup}}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>M_m\}}|\mathscr{B})\longrightarrow 0, a.e.\ (m\to\infty).$$

这就证明了(1)成立，定理证毕.

注 当 $T=N$ 时，即得[3]的相应定理.

定理 7.2 设 $\{X_t,t\in T\}$ 为 **B** 值随机变量族，$\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{F}$ 的任一子 σ 代数，则下列陈述等价：

(1) $\{X_t,t\in T\}$ 关于 $\mathscr{B}$ 条件一致可积；

(2) 下列两条件成立：

(a) $\underset{t\in T}{\text{esup}}E(\|X_t\||\mathscr{B})<\infty, a.e.$，

(b) 对任意 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\varepsilon>0, a.e.$，存在 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\delta>0, a.e.$，使得

$$E(I_A|\mathscr{B})<\delta, a.e.\Rightarrow\underset{t\in T}{\text{esup}}E(\|X_t\|I_A|\mathscr{B})<\varepsilon, a.e..$$

(3) 下列两条件成立：

(a) $\underset{t\in T}{\text{esup}}E(\|X_t\||\mathscr{B})<\infty, a.e.$，

(b) 对任意实数 $\varepsilon>0$，存在 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\delta>0, a.e.$，使得

$$E(I_A|\mathscr{B})<\delta, a.e.\Rightarrow\underset{t\in T}{\text{esup}}E(\|X_t\|I_A|\mathscr{B})<\varepsilon, a.e..$$

证 (1)$\Rightarrow$(2). 由定理 7.1 知：对任意 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\varepsilon>0, a.e.$，存在 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\lambda_0>0, a.e.$，使得

$$\underset{t\in T}{\text{esup}}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>\lambda_0\}}|\mathscr{B})<\frac{\varepsilon}{2}, a.e..$$

但对任意 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\lambda>0, a.e.$，总有

$$\begin{aligned}E(\|X_t\|I_A|\mathscr{B})&=E(\|X_t\|I_{A\cap\{\|X_t\|>\lambda\}}|\mathscr{B})\\&\quad+E(\|X_t\|I_{A\cap\{\|X_t\|\leqslant\lambda\}}|\mathscr{B})\\&\leqslant\underset{t\in T}{\text{esup}}E(\|X_t\|I_{\{\|X_t\|>\lambda\}}|\mathscr{B})+\lambda E(I_A|B).\end{aligned}$$

这样，取充分大的 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 λ，($\lambda\geqslant\lambda_0, a.e.$) 且 δ

$= \frac{\epsilon}{2\lambda}, a.e.$，则有"如果 $E(I_A|B) < \delta, a.e.$，那么

$$\underset{t\in T}{\mathrm{esup}} E(\|X_t\| I_A|\mathscr{B}) < \epsilon, a.e.",$$

即(2)的(b)成立．若令 $A = \Omega$，则有

$$\underset{t\in T}{\mathrm{esup}} E(\|X_t\| |\mathscr{B}) \leqslant \underset{t\in T}{\mathrm{esup}} E(\|X_t\| I_{\{\|X_t\|>\lambda\}}|\mathscr{B}) + \lambda < \infty, a.e.,$$

即(2)的(a)成立.

(2)⇒(3). 此乃显然.

(3)⇒(1). 设(3)成立. 因为对任意 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\lambda > 0, a.e.$，有

$$E(I_{\{\|X_t\|>\lambda\}}|\mathscr{B}) \leqslant \frac{1}{\lambda} E(\|X_t\| |\mathscr{B})$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda} \underset{t\in T}{\mathrm{esup}} E(\|X_t\| |\mathscr{B}), a.e.,$$

由(3)，对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\delta > 0, a.e.$，取 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\lambda > 0, a.e.$，且 $\lambda > \frac{\underset{t\in T}{\mathrm{esup}} E(\|X_t\| |\mathscr{B})}{\delta}$ $a.e.$，则有

$$E(I_{\{\|X_s\|>\lambda\}}|\mathscr{B}) < \delta, \ a.e., \ \forall s \in T.$$

于是，

$$\underset{t\in T}{\mathrm{esup}} E(\|X_t\| I_{\{\|X_t\|>\lambda\}}|\mathscr{B})$$

$$\leqslant \underset{s\in T}{\mathrm{esup}} (\underset{t\in T}{\mathrm{esup}} E(\|X_t\| I_{\{\|X_s\|>\lambda\}}|\mathscr{B}))$$

$$< \epsilon, \ a.e..$$

由定理 7.1 知(1)成立.

注 当 $T = N$、$\mathbf{B} = R$ 时，就得[4]的定理 1.

推论 7.3 设两族 $\mathbf{B}$ 值随机变量 $\{X_t, t \in T\}$ 与 $\{Y_t, t \in T\}$ 分别关于子 σ 代数 $\mathscr{B}$ 条件一致可积，则 $\{X_t \pm Y_t, t \in T\}$ 关于 $\mathscr{B}$ 条件一致可积.

证 因为 $\|X_t \pm Y_t\| \leqslant \|X_t\| + \|Y_t\|, \forall t \in T$.

故

$$\underset{t\in T}{\mathrm{esup}}E(\|X_t \pm Y_t\| \mid \mathscr{B})$$
$$\leqslant \underset{t\in T}{\mathrm{esup}}E(\|X_t\| \mid \mathscr{B}) + \underset{t\in T}{\mathrm{esup}}E(\|Y_t\| \mid \mathscr{B})$$
$$< \infty, a.e..$$

又 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\delta_1 > 0, a.e.$ 及 $\delta_2 > 0, a.e.$，使得

$$E(I_A \mid \mathscr{B}) < \delta_1, a.e. \Rightarrow \underset{t\in T}{\mathrm{esup}}E(\|X_t\| I_A \mid \mathscr{B}) < \frac{\varepsilon}{2}, a.e.$$

及

$$E(I_A \mid \mathscr{B}) < \delta_2, a.e. \Rightarrow \underset{t\in T}{\mathrm{esup}}E(\|Y_t\| I_A \mid \mathscr{B}) < \frac{\varepsilon}{2}, a.e..$$

令 $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$，则 δ 为 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量且 $\delta > 0, a.e.$，当 $E(I_A \mid \mathscr{B}) < \delta, a.e.$ 时，有

$$\underset{t\in T}{\mathrm{esup}}E(\|X_t \pm Y_t\| I_A \mid \mathscr{B})$$
$$\leqslant \underset{t\in T}{\mathrm{esup}}E(\|X_t\| I_A \mid \mathscr{B}) + \underset{t\in T}{\mathrm{esup}}E(\|Y_t\| I_A \mid \mathscr{B})$$
$$< \varepsilon, a.e..$$

由定 7.2 知 $\{X_t \pm Y_t, t \in T\}$ 关于 $\mathscr{B}$ 条件一致可积.

推论 7.4 若 B 值随机变量族 $\{X_t, t \in T\}$ 及 $\{Y_t, t \in T\}$ 满足条件：$\forall t \in T$，$\|X_t\| \leqslant \|Y_t\|, a.e.$，且 $\{Y_t, t \in T\}$ 关于子 σ 代数 $\mathscr{B}$ 条件一致可积，则 $\{X_t, t \in T\}$ 亦然.

定理 7.5 设 $\{X_t, t \in T\}$ 为 B 值随机变量族，如果存在非负实值随机变量 Y，$E(Y \mid \mathscr{B}) < \infty, a.e.$，使得对任何 $t \in T$ 有 $\|X_t\| \leqslant Y, a.e.$，则 $\{X_t, t \in T\}$ 关于 $\mathscr{B}$ 条件一致可积.

证 由于 Y 是非负实值随机变量，故 $YI_{(Y>k)} \downarrow 0, a.e.\ (k \to \infty)$，且 $E(YI_{(Y>k)} \mid \mathscr{B}) \leqslant E(Y \mid \mathscr{B}) < \infty, a.e.$. 这样随机变量序列 $\{YI_{(Y>k)}, k \geqslant 1\}$ 满足[5]的引理 4 的条件，于是有

$$\lim_{k\to\infty} \underset{t\in T}{\mathrm{esup}}E(\|X_t\| I_{\{\|X_t\|>k\}} \mid \mathscr{B})$$
$$\leqslant \lim_{k\to\infty} E(YI_{(Y>k)} \mid \mathscr{B}) = 0, a.e..$$

即$\{X_t, t \in T\}$关于$\mathscr{B}$条件一致可积.

由上述定理立即知:$L^1_{\mathscr{B}}$中的任意有限个B值随机变量关于$\mathscr{B}$是条件一致可积的.

定理 7.6 设φ是定义在$[0,\infty)$上的非负Borel可测函数,满足$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$,$\{X_t, t \in T\}$为B值随机变量族,$\mathscr{B}$为$\mathscr{F}$的任一子$\sigma$代数,若$\operatorname*{esup}\limits_{t \in T} E(\varphi(\| X_t \|) | \mathscr{B}) < \infty, a.e.$,则$\{X_t, t \in T\}$关于$\mathscr{B}$条件一致可积.

证 令M是任一正整数,则存在$k_0 > 0$,使

$$\frac{\varphi(x)}{x} \geqq M, \forall\, x \geqq k_0,$$

于是,对每一个$t \in T$,有

$$E(\| X_t \| I_{(\| X_t \| > k_0)} | \mathscr{B}) \leqslant \frac{1}{M} E(\varphi(\| X_t \|) | \mathscr{B}).$$

这样,对一切$k \geqslant k_0$,有

$$\operatorname*{esup}_{t \in T} E(\| X_t \| I_{(\| X_t \| > k)} | \mathscr{B}) \leqslant M^{-1} \operatorname*{esup}_{t \in T} E(\varphi(\| X_t \|) | \mathscr{B}).$$

先令$k \to \infty$,再令$M \to \infty$,得

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname*{esup}_{t \in T} E(\| X_t \| I_{(\| X_t \| > k)} | \mathscr{B}) = 0, a.e..$$

即$\{X_t, t \in T\}$关于$\mathscr{B}$条件一致可积.

推论 7.7 设$\{X_t, t \in T\}$为B值随机变量族,$\mathscr{B}$为$\mathscr{F}$的任一子σ代数,若对$p > 1$,有

$$\operatorname*{esup}_{t \in T} E(\| X_t \|^p | \mathscr{B}) < \infty, a.e.,$$

则$\{X_t, t \in T\}$关于$\mathscr{B}$条件一致可积.

证 取$\varphi = |x|^p, p > 1$,则φ满足定理7.6的条件,由定理7.6立即知本推论成立.

定义 7.2 $L^1_{\mathscr{B}}$中的B值随机变量序列$\{X_n\}$称为$L^1_{\mathscr{B}}$收敛于一个$L^1_{\mathscr{B}}$中的B值随机变量X,如果

$$\lim_{n \to \infty} E(\| X_n - X \| | \mathscr{B}) = 0, a.e..$$

此时,记作$X_n \xrightarrow{L^1_{\mathscr{B}}} X, n \to \infty$.

注 $L^1_{\mathscr{B}}$ 收敛的概念与 L^1 收敛的概念是完全不同的，$L^1_{\mathscr{B}}$ 收敛的序列可以不是 L^1 收敛的，而 L^1 收敛的序列可以不是 $L^1_{\mathscr{B}}$ 收敛的（参见[4]）.

定义 7.3 $\mathbf{B}$ 值随机变量序列 $\{X_n\}$ 称为关于子 σ 代数 $\mathscr{B}$ 依概率收敛于一 $\mathbf{B}$ 值随机变量 X，如果对任意 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\varepsilon > 0, a.e.$，有

$$\lim_{n\to\infty} E(I_{(\|X_n - X\|>\varepsilon)}|\mathscr{B}) = 0, a.e..$$

此时，记作 $X_n \xrightarrow{P_{\mathscr{B}}} X, n \to \infty$.

易证：若 $X_n \xrightarrow{L^1_{\mathscr{B}}} X, n \to \infty$，则 $X_n \xrightarrow{P_{\mathscr{B}}} X, n \to \infty$. 若 $X_n \xrightarrow{P_{\mathscr{B}}} X, n \to \infty$，则 $X_n \xrightarrow{P} X, n \to \infty$.

定理 7.8 设 $\{X, X_n, n \in N\}$ 为 $L^1_{\mathscr{B}}$ 中 $\mathbf{B}$ 值随机变量序列，若 $X_n \xrightarrow{L^1_{\mathscr{B}}} X, n \to \infty$，则 $\{X_n, n \in N\}$ 关于 $\mathscr{B}$ 条件一致可积且 $X_n \xrightarrow{P_{\mathscr{B}}} X, n \to \infty$. 反之，若 $\{X_n, n \in N\}$ 关于 $\mathscr{B}$ 条件一致可积且 $X_n \xrightarrow{P_{\mathscr{B}}} X, n \to \infty$，则 $X \in L^1_{\mathscr{B}}$ 且 $X_n \xrightarrow{L^1_{\mathscr{B}}} X, n \to \infty$.

证　由 $X_n \xrightarrow{L^1_{\mathscr{B}}} X, n \to \infty$，得 $X_n \xrightarrow{P_{\mathscr{B}}} X, n \to \infty$. 又因 $E(\|X_n\| I_A|\mathscr{B}) \leqslant E(\|X_n - X\| I_A|\mathscr{B}) + E(\|X\| I_A|\mathscr{B}), a.e.$，取 $A = \Omega$，则有

$$\sup_n E(\|X_n\| \,|\mathscr{B}) < \infty, a.e..$$

由于 $X \in L^1_{\mathscr{B}}$，这样，对任意 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\varepsilon > 0, a.e.$，存在 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\delta' > 0, a.e.$，使得

$$E(I_A|\mathscr{B}) < \delta', a.e. \Rightarrow E(\|X\| I_A|\mathscr{B}) < \frac{\varepsilon}{2}, a.e..$$

令　$A_n = \{\sup_{k\geqslant n} E(\|X_k - X\| \,|\mathscr{B}) < \frac{\varepsilon}{2}\}$，则 $\mathscr{B} \ni A_n \subset A_{n+1} (\forall n \geqslant 0)$，且 $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1$. 显然，有限序列 $\{(X_k - X) I_{A_n}, k = 0, 1, \cdots, n-1\}$ 关于 $\mathscr{B}$ 是条件一致可积的. 因此，存在 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\delta_n > 0, a.e.$，使得

$E(I_{A\cap A_n}|\mathscr{B}) \leqslant \delta_n, a.e.$

$$\Rightarrow \sup_{1\leqslant k\leqslant n-1} E(\|X_k - X\| I_{A\cap A_n}|\mathscr{B}) < \frac{\varepsilon}{2}, a.e..$$

令 $\delta'' = \delta_n$，在 $A_n - A_{n-1}$ 上，$n = 0,1,\cdots, A_{-1} = \varnothing$. 显然，$\delta''$ 是 $\mathscr{B}$ 可测的且 $\delta'' > 0, a.e.$，并且还有

$$E(I_A|\mathscr{B}) < \delta'', a.e. \Rightarrow E(I_A I_{A_n - A_{n-1}}|\mathscr{B}) < \delta_n, a.e.$$

$$\Rightarrow \sup_k E(\|X_k - X\| I_A I_{A_n - A_{n-1}}|\mathscr{B}) < \frac{\varepsilon}{2}, a.e.,$$

因此，$\sup_k E(\|X_k - X\| I_A|\mathscr{B}) < \frac{\varepsilon}{2}, a.e..$

令 $\delta = min(\delta', \delta'')$，则

$$E(I_A|\mathscr{B}) < \delta, a.e. \Rightarrow$$

$$\sup_k E(\|X_k\| I_A|\mathscr{B}) \leqslant \sup_k E(\|X_k - X\| I_A|\mathscr{B})$$

$$- E(\|X\| I_A|\mathscr{B}) < \varepsilon, a.e..$$

由定理 7.2 知$\{X_n, n \in N\}$关于 $\mathscr{B}$ 条件一致可积.

反之，由 $X_n \xrightarrow{P_{\mathscr{B}}} X, n \to \infty$，则有 $X_n \xrightarrow{P} X, n \to \infty$. 从而，存在子列$\{n_k\}$使得 $X_{n_k} \xrightarrow{a.e.} X, k \to \infty$. 于是，$\|X_{n_k}\| \to \|X\|$, $a.e.$，显然，实值随机变量序列$\{\|X_{n_k}\|\}$关于 $\mathscr{B}$ 是条件一致可积的，由条件 Fatou 引理（下面将给出证明）得

$$E(\|X\| |\mathscr{B}) \leqslant \lim_{k\to\infty} E(\|X_{n_k}\| |\mathscr{B}) \leqslant \sup_n E(\|X_n\| |\mathscr{B})$$

$$< \infty, a.e..$$

因此，$X \in L^1_{\mathscr{B}}$.

其次，对任意给定的 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\varepsilon > 0, a.e.$，取 $\mathscr{B}$ 可测的充分大的实值随机变量 $\lambda > 0, a.e.$，有

$$E(\|X_n - X\| |\mathscr{B}) = E(\|X_n - X\| I_{\{\|X_n - X\| \leqslant \varepsilon\}}|\mathscr{B})$$

$$+ E(\|X_n - X\| I_{\{\|X_n - X\| > \varepsilon\}}|\mathscr{B})$$

$$\leqslant \varepsilon + E(\|X_n\| I_{\{\|X_n - X\| > \varepsilon\}}|\mathscr{B}) + E(\|X\| I_{\{\|X_n - X\| > \varepsilon\}}|\mathscr{B})$$

$$\leqslant \varepsilon + E(\|X_n\| I_{\{\|X_n\| > \lambda\}}|\mathscr{B}) + E(\|X\| I_{\{\|X\| > \lambda\}}|\mathscr{B})$$

$$+E(\|X_n\|I_{\{\|X_n\|\leqslant\lambda\}}I_{\{\|X_n-X\|>\varepsilon\}}|\mathscr{B})$$

$$+E(\|X\|I_{\{\|X\|\leqslant\lambda\}}I_{\{\|X_n-X\|>\varepsilon\}}|\mathscr{B})$$

$$\leqslant \varepsilon+\sup_n E(\|X_n\|I_{\{\|X_n\|>\lambda\}}|\mathscr{B})+E(\|X\|I_{\{\|X\|>\lambda\}}|\mathscr{B})$$

$$+2\lambda E(I_{\{\|X_n-X\|>\varepsilon\}}|\mathscr{B})$$

$$\leqslant 3\varepsilon+2\lambda E(I_{\{\|X_n-X\|>\varepsilon\}}|\mathscr{B}),$$

由于 $X_n\xrightarrow{P_{\mathscr{B}}}X, n\to\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}E(I_{\{\|X_n-X\|>\varepsilon\}}|\mathscr{B})=0, a.e.$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}E(\|X_n-X\| |\mathscr{B})\leqslant 3\varepsilon, a.e.$，由于 $\varepsilon>0, a.e.$ 是任意的，故 $\lim\limits_{n\to\infty}E(\|X_n-X\| |\mathscr{B})=0, a.e.$，即 $X_n\xrightarrow{L^1_{\mathscr{B}}}X, n\to\infty$.

定理 7.9 设 $\{X,X_n,n\in N\}$ 为 **B** 值可积随机变量序列且 $X_n\longrightarrow X, a.e.$，若 $E(\sup\limits_n\|X_n\| |\mathscr{B})<\infty, a.e.$，则

(1) $E(X_n|\mathscr{B})\longrightarrow E(X|\mathscr{B})$ $a.e.$；

(2) $X_n\xrightarrow{L^1_{\mathscr{B}}}X$.

证 (1) 令 $Y_n=\sup\limits_{m\geqslant n}\|X_m-X\|$，则 $Y_n\downarrow 0, a.e.$ $(n\uparrow\infty)$. 且

$$E(Y_0|\mathscr{B})=E(\sup_{m\geqslant 0}\|X_m-X\| |\mathscr{B})$$

$$\leqslant E(\sup_m\|X_m\| |\mathscr{B})+E(\|X\| |\mathscr{B})$$

$$<\infty, a.e..$$

根据[5]的引理 4 得

$$\|E(X_n|\mathscr{B})-E(X|\mathscr{B})\|\leqslant E(\|X_n-X\| |\mathscr{B})$$

$$\leqslant E(Y_n|\mathscr{B})\to 0, a.e., (n\to\infty).$$

这就证明了(1).

(2) 因为 $Y=\sup\limits_n\|X_n\|\in L^1_{\mathscr{B}}$，由定理 7.5 知 $\{X_n\}$ 关于 $\mathscr{B}$ 条件一致可积，对任意 $\mathscr{B}$ 可测的实值随机变量 $\varepsilon>0, a.e.$，则有

$$E(I_{\{\|X_n-X\|>\varepsilon\}}|\mathscr{B})$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon}E(\|X_n-X\| |\mathscr{B})\leqslant\frac{1}{\varepsilon}E(Y_n|\mathscr{B})$$

$$\to 0, a.e., \ (n \to \infty).$$

即 $X_n \xrightarrow{P_{\mathscr{B}}} X, (n \to \infty)$，由定理 7.8 知 $X_n \xrightarrow{L^1_{\mathscr{B}}} X, (n \to \infty)$.

下面的定理均假定涉及的条件期望有定义.

定理 7.10 （条件 Fatou 引理） 设$\{X_n\}$是实值随机变量序列，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数.

(1) 若$\{X_n^-\}$关于 $\mathscr{B}$ 条件一致可积，则

$$E(\varliminf_{n\to\infty} X_n | \mathscr{B}) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} E(X_n | \mathscr{B}), a.e..$$

(2) 若$\{X_n^+\}$关于 $\mathscr{B}$ 条件一致可积，则

$$E(\varlimsup_{n\to\infty} X_n | \mathscr{B}) \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} E(X_n | \mathscr{B}), a.e..$$

证 我们只需证(1)，令 $Y_k = \sup_n E(X_n^- I_{\{X_n^- > k\}} | \mathscr{B}), k \in N$，由题设条件有 $Y_k \to 0, a.e.\ (k \to \infty)$. 但是，对一切 $k \in N$，一切 $n \in N$，有

$$\begin{aligned} E(X_n | \mathscr{B}) &= E(X_n (I_{\{X_n^- \leqslant k\}} + I_{\{X_n^- > k\}}) | \mathscr{B}) \\ &\geq E(X_n I_{\{X_n^- \leqslant k\}} | \mathscr{B}) - Y_k, \end{aligned}$$

于是由[6]的 7.1 中定理 2(ii) 得

$$\begin{aligned} \varliminf_{n\to\infty} E(X_n | \mathscr{B}) &\geq \varliminf_{n\to\infty} E(X_n I_{\{X_n^- \leqslant k\}} | \mathscr{B}) - Y_k \\ &\geq E(\varliminf_{n\to\infty} X_n I_{\{X_n^- \leqslant k\}} | \mathscr{B}) - Y_k \\ &\geq E(\varliminf_{n\to\infty} X_n | \mathscr{B}) - Y_k, \end{aligned}$$

在上式中令 $k \to \infty$ 立即知(1)成立.

推论 7.11 若$\{X_n, n \in N\}$是关于 $\mathscr{B}$ 条件一致可积的实值随机变量且 $X_n \to X, a.e., n \to \infty$，则

$$E(X_n | \mathscr{B}) \to E(X | \mathscr{B}), a.e.\ (n \to \infty).$$

证 由于$\{X_n\}$关于 $\mathscr{B}$ 条件一致可积，故$\{|X_n|\}$，$\{X_n^+\}$及$\{X_n^-\}$分别关于 $\mathscr{B}$ 条件一致可积，又 $X_n \to X, a.e.$. 由定理 7.10 得

$$E(|X|_n | \mathscr{B}) = E(\lim_{n\to\infty} |X_n| | \mathscr{B}) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} E(|X_n| | \mathscr{B})$$

$$\leqslant \sup_n E(|X| \mid \mathscr{B}) < \infty, \ a.e.,$$

即 $E(X|\mathscr{B})$ 是有意义的，又 $\overline{\lim_{n\to\infty}} X_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} X_n = X$，$a.e.$，故由定理 7.10 得

$$E(X|\mathscr{B}) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} E(X_n|\mathscr{B}) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} E(X_n|\mathscr{B}) \leqslant E(X|\mathscr{B}), a.e..$$

因此，$\lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathscr{B}) = E(X|\mathscr{B})$，$a.e.$.

定理 7.12 设 $\{X, X_n, n\in N\}$ 是实值可积随机变量序列，且 $X_n \to X, a.e.$，则下列陈述等价：

(1) $E(\sup_n |X_n|) < \infty$；

(2) 对每一子 σ 代数 $\mathscr{B}$，有

$$E(X_n|\mathscr{B}) \to E(X|\mathscr{B}), a.e. \ (n\to\infty);$$

(3) 对每一子 σ 代数 $\mathscr{B}$，$\{X_n\}$ 关于 $\mathscr{B}$ 条件一致可积.

证 (1)⇒(3)⇒(2)是显然的. (2)⇒(1). 由[7]3.1 节中的定理 5 用反证法可立即推得.

第二章　实值鞅的基本理论

§1　基本不等式及收敛定理

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间，称$\mathscr{F}$的单增子σ代数序列$\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$为随机基．若$\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$是随机基，$\{X_n,n\in N\}$是实值随机变量序列，如果对每一$n\in N$，X_n是$\mathscr{F}_n$可测的，则称$\{X_n,n\in N\}$为$\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$适应的，称$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为适应序列；对$p>0$，若对每一$n\in N$，有$E|X_n|^p<\infty$，则称$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为$L^p$可积的适应序列，$L^1$可积的适应序列简称为可积适应序列．如果$\sup\limits_n E|X_n|^p<\infty$，则称$X$为$L^p$有界的适应序列．如果对每一$n\in N$，$X_n$是$\mathscr{F}_{n-1}$可测的，则称$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为可预报序列．对可积适应序列$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$，今后，我们常采用以下记号：

$$X_n^*=\sup_{k\leqslant n}|X_k|,X^*=\sup_n|X_n^*|=\sup_n|X_n|;$$

$$\|X_n\|_p=(E|X_n|^p)^{\frac{1}{p}},\ \|X\|_p=\sup_n\|X_n\|_p;$$

$$D_n=X_n-X_{n-1}(n\geqslant 0,X_{-1}\equiv 0);$$

$$D_n^*=\sup_{k\leqslant n}|D_k|,\ D^*=\sup_n D_n^*=\sup_n|D_n|;$$

$$S_n^{(p)}(X)=(\sum_{k=0}^{n}|D_k|^p)^{\frac{1}{p}},S^{(p)}(X)=\sup_n S_n^{(p)}(X);$$

$$\sigma_n^{(p)}(X) = \left(\sum_{k=0}^{n} E(|D_k|^p|\mathscr{F}_{k-1})\right)^{\frac{1}{p}}, \sigma^{(p)}(X) = \sup_n \sigma_n^{(p)}(X);$$

总约定 $\mathscr{F}_{-1} = \{\varnothing, \Omega\}$. 在本章中,随机变量均指实值随机变量.

定义 1.1 称可积适应序列 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为下鞅,如果对任意 $m, n \in N, m \leqslant n$,有

$$E(X_n|\mathscr{F}_m) \geqslant X_m \quad a.e. \tag{1.1}$$

如果 $-X = \{-X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为下鞅,则称 X 为上鞅,如果 X 既是下鞅又是上鞅,则称 X 为鞅.

显然,可积适应序列 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为下鞅的充要条件是对任意 $m, n \in N, m \leqslant n$,任意 $A \in \mathscr{F}_m$,有

$$\int_A X_m dP \leqslant \int_A X_n dP.$$

类似地,X 为上鞅(或鞅)的充要条件是对任意 $m, n \in N, m \leqslant n$,任意 $A \in \mathscr{F}_m$,有

$$\int_A X_n dP \leqslant \int_A X_m dP (\text{或} \int_A X_m dP = \int_A X_n dP).$$

由定义立即知:若 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为下鞅,则 $EX_n \uparrow$,若 X 为上鞅,则 $EX_n \downarrow$,若 X 为鞅,则 $X_n = EX (\forall n \in N)$. 同时,由条件期望的的性质立即知下述各条成立:

(1) 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为可积适应序列,则 X 为下鞅(上鞅)$\Leftrightarrow E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) \geqslant (\leqslant) X_n, \forall n \in N$.

(2) 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为下鞅,$\{X_n, \mathscr{G}_n, n \in N\}$ 为适应序列且 $\mathscr{G}_n \subset \mathscr{F}_n, (\forall n \in N)$,则 $\{X_n, \mathscr{G}_n, n \in N\}$ 为下鞅.

(3) 设 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 与 $\{X'_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 均为下鞅,则 $\{X_n + X'_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 亦为下鞅.

(4) 设 $X = \{X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为可积适应序列,则 X 为下鞅(或鞅)$\Leftrightarrow E(D_{n+1}|\mathscr{F}_n) \geqslant 0$ $a.e., \forall n \in N$. (或 $E(D_{n+1}|\mathscr{F}_n) = 0$ $a.e., \forall n \in N$). 此时,随机变量序列 $\{D_n\}$ 称为下鞅差(或鞅差).

(5) 设 $X = \{X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为 L^2 可积鞅，则 $EX_n^2 = \sum_{i=0}^{n} ED_i^2, n \geq 0$.

定义 1.2 设$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$是 $\mathscr{F}$ 的单调下降的子 σ 代数序列，$\{X_n, n \in N\}$为可积随机变量序列，对每一 $n \in N$，X_n 是 $\mathscr{F}_n$ 可测的，仍记为 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$，如果对任意 $m, n \in N$，$m \leqslant n$，有

$$E(X_m | \mathscr{F}_n) \geqslant X_n, \ a.e. \tag{1.2}$$

则称 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为反下鞅，若 $-X = \{-X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为反下鞅，则称 X 为反上鞅，若 X 既是反下鞅，又是反上鞅，则称 X 为反鞅.

例 1.1 设$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$是随机基，$\xi$ 是可积随机变量，则$\{X_n = E(\xi | \mathscr{F}_n), \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为鞅.

例 1.2 设$\{D_n, n \in N\}$是可积的独立随机变量序列. 令 $X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i$，$\mathscr{F}_n = \sigma\{D_i, i \leqslant n\}$，若对每一 $n \in N$，$ED_n > 0$，则$\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为下鞅. 若对每一 $n \in N$，$ED_n = 0$，则$\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为鞅.

例 1.3 令 $\Omega = [0,1]$，$\mathscr{F}$ 为$[0,1]$中 Borel 集全体组成的 σ 代数，P 为勒贝格测度，则$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为概率空间，对每一 $n \geqslant 0$，设点 $0 = \omega_{n,-1} < \omega_{n,0} < \omega_{n,1} < \cdots\cdots < \omega_{n,2^n} = 1$ 为 Ω 的一个分划，记为 π_n，而 π_{n-1} 为 π_n 的加细，即分划 π_n 的每一分点亦为分划 π_{n-1} 的分点. 令 $\mathscr{F}_n$ 为由区间族：$\{A_{n,0} = [0, \omega_{n,0}], A_{n,j} = [\omega_{n,j-1}, \omega_{n,j}], 1 \leqslant j \leqslant 2^n\}$ 产生的 σ 代数. 对 Ω 上的任一有限实值函数 g，定义 $X_n(\omega) = \frac{g(\omega_{n,j}) - g(\omega_{n,j-1})}{\omega_{n,j} - \omega_{n,j-1}}$，$\omega \in A_{n,j}, 0 \leqslant j \leqslant 2^n$. 显然，$\{\mathscr{F}_n\}$ 为 $\mathscr{F}$ 的单调上升的子 σ 代数序列，对每一 $n \geqslant 0$，X_n 是 $\mathscr{F}_n$ 可测的，$E|X_n| < \infty$，且易证 $\int_A X_n dP = \int_A X_{n+1} dP$，$\forall A \in \mathscr{F}_n, n \geqslant 0$.

故$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为鞅.

例 1.4 设$\{Y_n,n\in N\}$相互独立的可积随机变量序列，对每一$n\in N$，$EY_n=0$，g_n是n元 Borel 函数，令$b_n=g_n(Y_0,Y_1,\cdots,Y_{n-1})$，且$E|b_n|<\infty,n\geqslant 1$. 定义

$$X_0=a_0,X_n=a_0+\sum_{k=1}^{n}b_kY_k,n\geqslant 1,$$

$$\mathscr{F}_n=\sigma\{Y_0,Y_1,\cdots,Y_n\},n\geqslant 0.$$

其中a_0为常数，则$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为鞅.

证 显然，X_n为$\mathscr{F}_n$可测的，由于$E|b_k|<\infty$，$E|Y_k|<\infty$，$\forall\ k\geqslant 1$及a_0为常数，则$E|X_n|<\infty$，$\forall\ n\geqslant 0$，又$X_{n+1}=X_n+b_{n+1}Y_{n+1}$，$n\geqslant 0$，故

$$\begin{aligned}E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)&=E(X_n|\mathscr{F}_n)+E(b_{n+1}Y_{n+1}|\mathscr{F}_n)\\&=X_n+b_{n+1}E(Y_{n+1}|\mathscr{F}_n)\\&=X_n+b_{n+1}EY_{n+1}\\&=X_n\ a.e.\ ,\ n\geqslant 0.\end{aligned}$$

这就证明了$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为鞅.

定理 1.1 设$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为鞅（相应地下鞅），$\varphi$为$R^1$上的任一实值凸函数（相应地非降凸函数），如果$E|\varphi(X_n)|<\infty$，$\forall\ n\in N$，则$\{\varphi(X_n),\mathscr{F}_n,n\in N\}$为下鞅.

证 因凸函数是 Borel 函数，故对每一$n\in N$，$\varphi(X_n)$是$\mathscr{F}_n$可测的，又$\varphi(X_n)$可积，再由条件期望的 Jensen 不等式有

$$\begin{aligned}E(\varphi(X_n)|\mathscr{F}_m)&\geqslant\varphi(E(X_n|\mathscr{F}_m))\\&\geqslant\varphi(X_m),\ (\forall\ n\geqslant m),\end{aligned}$$

所以，$\{\varphi(X_n),\mathscr{F}_n,n\in N\}$为下鞅.

推论 1.2 (1) 若$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为鞅（或非负下鞅），且$E|X_n|^p<\infty$，$\forall\ n\in N$，则$\{|X_n|^p,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为下鞅.（$1\leqslant p<\infty$）.

(2) 若$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为下鞅，则$\{X_n^+,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为下鞅（其中$X_n^+=X_n\vee 0$）

证　(1) 取 $\varphi(x)=|x|^p(1\leqslant p<\infty)$ (或 $\varphi(x)=x^p, x\in[0,\infty)$), 则 $\varphi(x)$ 是 R^1 上的实值凸函数(或 $[0,\infty)$ 上的非降凸函数). 用定理 1.1 立即知(1) 成立.

(2) 取 $\varphi(x)=x^-=x\vee 0$, 则 $\varphi(x)$ 为 R^1 上的实值非降凸函数, 用定理 1.1 即知(2) 成立.

定理 1.3　设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是上鞅, 则对任意 $\lambda>0$, 任意 $n\in N$, 有

(1) $\lambda P(\inf\limits_{k\leqslant n}X_k\leqslant-\lambda)\leqslant\int_{\{\inf\limits_{k\leqslant n}X_k\leqslant-\lambda\}}(-X_n)dP$,

(2) $\lambda P(\sup\limits_{k\leqslant n}X_k\geqslant\lambda)\leqslant EX_0+\int_{\{\sup\limits_{k\leqslant n}X_k<\lambda\}}(-X_n)dP$,

(3) $\lambda P(X_n^*\geqslant\lambda)\leqslant EX_0+2EX_n^-$.

若 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是鞅或非负下鞅, 则

(4) $\lambda P(X_n^*\geqslant\lambda)\leqslant\int_{\{X_n^*\geqslant\lambda\}}|X_n|dP$,

(5) $\lambda P(X^*\geqslant\lambda)\leqslant\sup\limits_{n\in N}E|X_n|$.

证　(1) 令 $A_0=\{X_0\leqslant-\lambda\}$, $A_k=\{X_0>-\lambda,X_1>-\lambda,\cdots,X_{k-1}>-\lambda,X_k\leqslant-\lambda\}(k\geqslant1)$, 则 $A_k\in\mathscr{F}_k(k\geqslant0)$, $\{A_k\}$ 两两不交, 而由 $\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是上鞅得 $E(X_n|\mathscr{F}_k)\leqslant X_k(n\geqslant k\geqslant0)$, 所以

$$\int_{A_k}X_ndP\leqslant\int_{A_k}X_kdP\ \ (n\geqslant k\geqslant0).$$

因此,

$$\begin{aligned}\lambda P(\inf_{k\leqslant n}X_k\leqslant-\lambda)&=\lambda P(\bigcup_{k=0}^nA_k)=\lambda\sum_{k=0}^nP(A_k)\\&=\sum_{k=0}^n\int_{A_k}\lambda dP\leqslant\sum_{k=0}^n\int_{A_k}(-X_k)dP\\&\leqslant\sum_{k=0}^n\int_{A_k}(-X_n)dP=\int_{\bigcup\limits_{k=0}^nA_k}(-X_n)dP\end{aligned}$$

$$\leqslant \int_{\{\inf_{k\leqslant n} X_k \leqslant -\lambda\}} (-X_n)dP,$$

这就证明了(1) 成立.

(2) 令 $\tau = \inf\{k: k \geqslant 0, X_k \geqslant \lambda\} \wedge n, \tau_k = \tau \wedge k\ (k = 0, 1, \cdots, n)$,则 $0 = \tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \cdots \leqslant \tau_n = \tau, 0 \leqslant \tau_k - \tau_{k-1} \leqslant 1, \tau_k$ 皆为 $\{\mathscr{F}_n\}$ 停时. 从而,$\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}_{\tau_0} \subset \mathscr{F}_{\tau_1} \subset \cdots \subset \mathscr{F}_{\tau_n} = \mathscr{F}_\tau$,且 $X_{\tau_k} \in \mathscr{F}_{\tau_k}$. 任取 $A \in \mathscr{F}_{\tau_k} (0 \leqslant k < n)$,必有

$$A \cap \{\tau_k = j\} \cap \{\tau_{k-1} > j\} \in \mathscr{F}_j,$$

由上鞅性得

$$\int_A (X_{\tau_k} - X_{\tau_{k-1}})dP = \sum_{j=0}^{k} \int_{A\cap\{\tau_k = j\}\cap\{\tau_{k+1} > j\}} (X_j - X_{j-1})dP \geqslant 0.$$

所以,若 $A \in \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_{\tau_k} (k = 0, 1, \cdots, n)$,则

$$\int_A (X_0 - X_\tau)dP = \sum_{k=0}^{n-1} \int_A (X_{\tau_k} - X_{\tau_{k+1}})dP \geqslant 0,$$

因为 X_0 是 $\mathscr{F}_0$ 可测的,所以

$$X_0 \geqslant E(X_\tau | \mathscr{F}_0).$$

从而

$$EX_0 \geqslant EX_\tau = \int_{\{\sup_{k\leqslant n} X_k \geqslant \lambda\}} X_\tau dP + \int_{\{\sup_{k\leqslant n} X_k < \lambda\}} X_\tau dP$$

$$\geqslant \lambda P(\sup_{k\geqslant n} X_k \geqslant \lambda) + \int_{\{\sup_{k\leqslant n} X_k < \lambda\}} X_n dP.$$

由此立即知(2) 成立.

(3) 因为$\{\sup_{k\leqslant n} |X_k \geqslant \lambda\} \subset \{\sup_{k\leqslant n} X_k \geqslant \lambda\} \cup \{\inf_{k\leqslant n} X_k \leqslant -\lambda\}$ 及对一切 $A \in \mathscr{F}$,有

$$\int_A (-X_n)dP \leqslant \int_{\{X_n < 0\}} (-X_n)dP = EX_n^-,$$

再用(1) 及(2) 立即知(3) 成立.

下面证(4) 与(5). 若$\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为鞅,则$\{|X_n|, \mathscr{F}_n, n$

$\in N\}$ 为非负下鞅，故只需对非负下鞅 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 证(4)与(5)成立. 由于 $\{-X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为上鞅，由(1)得

$$\lambda P(X_n^* \geqslant \lambda) = \lambda P(\sup_{k \leqslant n} X_k \geqslant \lambda) = \lambda P(\inf_{k \leqslant n}(-X_k \geqslant -\lambda)$$

$$\leqslant \int_{\{\sup_{k \leqslant n}(X_k) \geqslant \lambda\}} -(-X_n) dP = \int_{\{\sup_{k \leqslant n} X_k \geqslant \lambda\}} X_n dP,$$

即(4)得证. 在上式中令 $n \to \infty$ 取极限知(5)成立.

定理 1.4 (Kolmogorov 不等式) 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是鞅，则

(1) $\lambda^2 P(X_n^* \geqslant \lambda) \leqslant EX_n^2$, $(n \geqslant 0, \lambda > 0)$,

(2) $\lambda^2 P(X^* \geqslant \lambda) \leqslant \sup_{n \in N} EX_n^2$, $(\lambda > 0)$.

证 (1) 不妨设 $EX_n^2 < \infty$，否则，(1)显然成立. 由于 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为鞅，故 $\{|X_n|^2, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为非负下鞅，由定理 1.3(4)知

$$\lambda^2 P(X_n^* \geqslant \lambda) = \lambda^2 P(\sup_{k \leqslant n} |X_k|^2 \geqslant \lambda^2)$$

$$\leqslant \int_{\{\sup_{k \leqslant n} |X_k|^2 \geqslant \lambda^2\}} |X_n|^2 dP \leqslant E|X_n|^2.$$

(2) 在(1)式中令 $n \to \infty$ 取极限即得(2).

定理 1.5 (Doob 不等式) 设 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为鞅或非负下鞅，则

(1) $\| X_n^* \|_p \leqslant q \| X_n \|_p$, $(p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$

(2) $\| X^* \|_p \leqslant q \| X \|_p$,

(3) $EX_n^* \leqslant \frac{e}{e-1}(1 + E(|X_n| \log^+ |X_n|))$,

(4) $EX_n^* \leqslant \frac{e}{e-1}(1 + \sup_{n \in N} E(|X_n| \log^+ |X_n|))$.

证 设 $p > 1$，则

$$E(X_n^*)^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1} P(X_n^* \geqslant \lambda) d\lambda$$

$$\leqslant p\int_0^\infty \lambda^{p-2}\int_{\{X_n^*\geqslant\lambda\}}|X_n|dPd\lambda$$

$$= pE|X_n|\int_0^{X_n^*}\lambda^{p-2}d\lambda = \frac{p}{p-1}E|X_n|(X_n^*)^{p-1}.$$

再由 Hölder 不等式得

$$E(X_n^*)^p \leqslant \frac{p}{p-1}\|X_n\|_p\|(X_n^*)^{p-1}\|_q$$

$$= q\|X_n\|_p(E(X_n^*)^p)^{\frac{1}{q}},$$

由上式立即知(1)成立. 而 $X_n^* \uparrow X^*$, 在(1)式中令 $n\to\infty$ 取极限即知(2)成立.

由定理 1.3(4)得

$$E(X_n^*-1)\leqslant E(X_n^*-1)^+=\int_0^\infty P\{X_n^*-1\geqslant\lambda\}d\lambda$$

$$\leqslant\int_0^\infty\frac{1}{\lambda+1}\int_{\{X_n^*\geqslant\lambda+1\}}|X_n|dPd\lambda$$

$$= E|X_n|\int_0^{(X_n^*-1)^+}\frac{1}{\lambda+1}d\lambda = E|X_n|\log^+ X_n^*.$$

因为对任意 $a\geqslant 0, b\geqslant 0$, 有

$$a\log^+ b\leqslant a\log^+ a + be^{-1},$$

从而

$$E(X_n^*-1)\leqslant E(|X_n|\log^+|X_n|)+e^{-1}EX_n^*.$$

由上式立即知(3)成立. 再在(3)式中令 $n\to\infty$ 即知(4)成立.

下面证明极为重要的下鞅的上穿不等式. 这个不等式给出了下鞅在有穷区间内的平均"振荡"次数的估计式, 在证明下鞅的收敛定理时要用到它.

先介绍上穿概念. 设 $x=(x_0,x_1,x_2,\cdots)$ 为广义实数列, a,b 为二实数, $a<b$. 令 $u_0(x)=1$,

$$
u_{n-1}(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x_n>b;\\ u_n(x), & \text{若 } x_n\in[a,b];\\ 0, & \text{若 } x_n<a,\end{cases}\qquad (n\geqslant 0)
$$

$g_n^{(a,b)}(x)$ 是"上穿函数",$(n\geqslant 0)$,即:

$$
g_n^{(a,b)}(x)=\begin{cases}1, & (x_0,x_1,x_2,\cdots)\text{ 在时刻 } n \text{ 上穿}[a,b];\\ 0, & \text{反之.}\end{cases}
$$

所谓 $(x_0,x_1,x_2,\cdots)$ 在时刻 n 上穿$[a,b]$,或 x_n 上穿$[a,b]$,即是

$x_n>b$,且存在 $m>0$,使 $x_{n-m}<a$,$x_k\in[a,b]$$(n>k>n-m)$. 显然 $g_0^{(a,b)}(x)=0$.

再令

$$
U_n^{(a,b)}(x)=\sum_{k=0}^{n}g_k^{(a,b)}(x)=\sum_{k=1}^{n}g_k^{(a,b)}(x).
$$

为 x 到时刻 n 为止上穿$[a,b]$的次数,亦即 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上穿$[a,b]$的次数.

引理 1.6 设$U_n^{(a,b)}(x)$是广义实数列 $x=(x_0,x_1,\cdots)$ 到时刻 n 为止上穿$[a,b]$的次数,则

$$
(b-a)u_n^{(a,b)}(x)\leqslant\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)(u_{k-1}(x)-u_k(x)),\ (n\geqslant 1).
$$

证 由定义,若 $g_k^{(a,b)}(x)=1$,则 $x_k>b$,且存在 $m>0$,使 $x_{k-m}<a$ 及 $x_j\in[a,b]$,$k-m<j<k$,再由 $u_{k-1}(x)$ 的定义有

$$
u_{k-1}(x)=1,\ u_k(x)=u_{k-1}(x)=\cdots=u_{k-m-1}(x)=0.
$$

从而 $u_{k-1}(x)-u_k(x)=1$,于是

$$
U_n^{(a,b)}(x)=\sum_{k=1}^{n}g_k^{(a,b)}(x)\leqslant\sum_{k=1}^{n}(u_{k-1}(x)-u_k(x))^{+}.
$$

但是,由 u_k 的定义有

$$
\text{“}u_{k-1}(x)-u_k(x)>0\Rightarrow x_k>b\text{”};
$$

$$
\text{“}u_{k-1}(x)-u_k(x)<0\Rightarrow x_k<a\text{”}.
$$

所以

$$
(b-a)(u_{k-1}(x)-u_k(x))^{+}\leqslant(x_k-a)(u_{k-1}(x)-u_k(x)).
$$

于是

$$(b-a)U_n^{(a,b)}(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n}(b-a)(u_{k-1}(x)-u_k(x))^+$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}(x_k-a)(u_{k-1}(x)-u_k(x)).$$

引理得证.

引理 1.7 （Doob 下鞅上穿不等式） 设$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为下鞅，$X=(X_0,X_1,X_2,\cdots)$，类似定义$u_k(X)$，$g_n^{(a,b)}(X)$，$U_n^{(a,b)}(X)$. 令

$$U_n^{(a,b)}(X)=\lim_{n\to\infty}U_n^{(a,b)}(X)=\sum_{k=0}^{\infty}g_k^{(a,b)}(X).$$

是X上穿$[a,b]$的总次数，则

(1) $E(u_n^{(a,b)}(X))\leqslant \dfrac{E|X_n|+|a|}{b-a}$;

(2) $E(u^{(a,b)}(X))\leqslant \dfrac{\sup\limits_{n\in N}E|X_n|+|a|}{b-a}$.

证 (1) 由$u_k(X)$的定义知$u_k(X)$仅依赖于$X_0,X_1,\cdots,X_{k-1}$，且$u_k(X)$是$\mathscr{F}_{k-1}$可测的$(k\geqslant 1)$. 不难证明$g_n^{(a,b)}(X)$，$U_n^{(a,b)}(X)$均是$\mathscr{F}_n$可测的. 由下鞅性可知

$$E(u_k(X)(X_k-a))=E(E(u_k(X)(X_k-a)|\mathscr{F}_{k-1}))$$
$$=E(u_k(X)E((X_k-a)|\mathscr{F}_{k-1}))$$
$$\geqslant E(u_k(X)(X_{k-1}-a))\ (k\geqslant 1).$$

再由引理 1.6 得

$$(b-a)E(U_n^{(a,b)}(X))\leqslant E(\sum_{k=1}^{n}(X_k-a)(u_{k-1}(X)-u_k(X)))$$
$$\leqslant E(\sum_{k=1}^{n}((X_k-a)u_{k-1}(X)-(X_{k-1}-a)u_k(X)))$$
$$=E((X_n-a)u_{n-1}(X)-(X_0-a)u_1(X))$$
$$\leqslant E((X_n-a)u_{n-1}(X)).$$

（因为$u_1(X)\geqslant 0$，而且“$u_1(X)=0\Leftrightarrow X_0<a$”）.

再注意 $|u_{n+1}(X)| \leqslant 1$,由上式立即知(1) 成立.

(2) 由(1) 立即得出.

定理 1.8 (Doob 收敛定理) 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为上鞅或下鞅,且 $\|X\|_1 = \sup\limits_{n\in N} \|X_n\|_1 = \sup\limits_{n\in N} E|X_n| < \infty$,

则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_\infty \ a.e.$;

(2) $E|X_\infty| \leqslant \|X\|_1 < \infty$.

若 X 是反上鞅或反下鞅,则(1) 与(2) 仍成立.

证 我们只需就下鞅情形来证明,设 X 为下鞅,令 $U^{(a,b)}(X)$ 的定义如引理 1.7. 则有

$$E(U^{(a,b)}(X)) \leqslant \frac{\|X\|_1 + |a|}{b-a} < \infty,$$

从而

$$P(\liminf_{n\to\infty} X_n < a < b < \limsup_{n\to\infty} X_n) \leqslant P(U^{(a,b)}(X) = \infty) = 0.$$

令 Q 为为有理数集,则

$$\{\lim_{n\to\infty} X_n \text{ 不存在}\} \subset \{\liminf_{n\to\infty} X_n < \limsup_{n\to\infty} X_n\} \subset \bigcup_{\substack{a<b \\ a,b\in Q}} \{\liminf_{n\to\infty} X_n < a < b < \limsup_{n\to\infty} X_n\}$$

于是,$P(\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ 不存在$) = 0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n \ a.e.$ 存在. 极限可以为 $\pm\infty$. 令 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_\infty \ a.e.$, 这就证明了(1). 再由法都引理得

$$E|X_\infty| = E(\lim_{n\to\infty} |X_n|) \leqslant \liminf_{n\to\infty} E|X_n| \leqslant \sup_{n\in N} E|X_n| = \|X\|_1 < \infty.$$

这就证明了 (2).

若 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为反下鞅,令

$Y^{(k)} = \{Y_n^{(k)}, \mathscr{F}_n^{(k)}, n \in N\}$, $Y_n^{(k)} = X_{(k-n)\vee 0}$,

$\mathscr{F}_n^{(k)} = \mathscr{F}_{(k-n)\vee 0}$,

则 $Y^{(k)}$ 是下鞅,由引理 1.7 有

$$E(U^{(a,b)}(Y^{(k)})) \leqslant \frac{\sup\limits_{n\in N} E|Y_n^{(k)}| + |a|}{b-a}$$

$$\leqslant \frac{\| X \|_1 + |a|}{b-a}$$

令 $\quad V^{(a,b)}(X) = \lim\limits_{k\to\infty} U^{(a,b)}(Y^{(k)})$

由积分单调收敛定理有

$$E(V^{(a,b)}(X)) = \lim_{k\to\infty} E(U^{(a,b)}(Y^{(k)})) < \infty.$$

而 $\{\liminf\limits_{n\to\infty} X_n < a < b < \limsup\limits_{n\to\infty} X_n\} \subset \{V^{(a,b)}(X) = \infty\}$，从而 $P(\liminf\limits_{n\to\infty} X_n < a < b < \limsup\limits_{n\to\infty} X_n) = 0$ 因此仿前可证 $\lim\limits_{n\to\infty} = X_\infty$ $a.e.$，$E|X_\infty| \leqslant \| X \|_1 < \infty$.

定理 1.9 （**Chow** 收敛定理） 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是下鞅。对每一停时 τ，有 $\int_{\{\tau<\infty\}} X_\tau dP < \infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ $a.e.$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n > -\infty$ $a.e.$.

证 若 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ 不 $a.e.$ 存在，则有有理数 r 与 s，使得 $A = \{\liminf\limits_{n\to\infty} X_n < r < s < \limsup\limits_{n\to\infty} X_n\}$ 满足 $P(A) > \delta > 0$. 由于

$$\{\bigvee_{i=0}^{n} X_i > s\} \uparrow \{\sup_{i\in N} X_i > s\} \supset A,$$

可取 m_1，使得 $A_1 = \{\bigvee\limits_{i=0}^{m_1} X_i > s\} \in \mathscr{F}_{m_1}$ 且 $P(A \cap A_1 > \delta$，又由于

$$\{\bigwedge_{i=m_1}^{n} X_i < r\} \uparrow \{\inf_{i\geqslant m_1} X_i < r\} \supset A \cap A_1,$$

可取 $n_1 > m_1$，使得 $B_1 = A_1 \cap \{\bigwedge\limits_{i=m_1}^{n_1} X_i < r\} \in \mathscr{F}_{n_1}$，且 $P(A \cap B_1) > \delta$，归纳地可依次求得

$$m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \cdots < m_k < n_k < \cdots$$

和 $\quad A_1 \supset B_1 \supset A_2 \supset B_2 \supset \cdots \supset A_k \supset B_k \supset \cdots$

使得 $\quad A_k \in \mathscr{F}_{m_k}, B_k \in \mathscr{F}_{n_k}, P(A \cap A_k) \geq P(A \cap B_k) > \delta$，其中

$$A_k = B_{k-1} \cap \{\bigvee_{i=n_{k-1}}^{m_k} X_i > s\}, B_k = A_k \cap \{\bigwedge_{i=m_k}^{n_k} X_i < r\}.$$

对 $n_{k-1} \leqslant j \leqslant m_k$，令

$$C_{kj} = \{X_j > s, X_i \leqslant s, n_{k-1} \leqslant i < j\},$$

对 $m_k \leqslant j \leqslant n_k$，令

$$D_{kj} = \{X_j < r, X_i \geqslant r, m_k \leqslant i < j\},$$

则 $A_k = \bigcup_{j=n_{k-1}}^{m_k} B_{k-1}C_{kj}$，$B_k = \bigcup_{j=m_k}^{n_k} A_k D_{kj}$，且

$$\begin{aligned}
\int_{A_k - B_k} X_{n_k} dP &= \int_{A_k - \bigcup_{j=m_k}^{n_k} A_k D_{kj}} X_{n_k} dP \\
&= \int_{A_k - \bigcup_{j=m_k}^{n_k-1} A_k D_{kj}} X_{n_k} dP - \int_{A_k D_{kn_k}} X_{n_k} dP \\
&\geq \int_{A_k - \bigcup_{j=m_k}^{n_k-1} A_k D_{kj}} X_{n_k-1} dP - rP(A_k D_{kn_k}) \\
&\geq \cdots \geq \int_{A_k} X_{m_k} dP - rP(B_k) \\
&= \int_{\bigcup_{j=n_{k-1}}^{m_k} B_{k-1} C_{kj}} X_{m_k} dP - rP(B_k) \\
&\geq \int_{\bigcup_{j=n_{k-1}}^{m_k-1} B_{k-1} C_{kj}} X_{m_k-1} dP + sP(B_{k-1} C_{km_k}) - rP(B_k) \\
&\geq \cdots \geq sP(A_k) - rP(B_k) \geq (s-r)P(A_k) > (s-r)\delta.
\end{aligned}$$

令 $\tau = \sum_{k=1}^{\infty} n_k I_{A_k - B_k} + \infty I_{(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k - B_k))^c}$，则 τ 为停时，而且

$$\int_{\{\tau<\infty\}} X_\tau dP = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k - B_k} X_{n_k} dP \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} (s-r)P(A_k) = \infty.$$

这就得到矛盾. 故 $\lim_{n\to\infty} X_n$ $a.e.$ 存在.

令 $V = \{\lim\limits_{n\to\infty} X_n = -\infty\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n > -\infty\ a.e.$ 不成立，则 $P(V) = \delta > 0$. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$，先取定正整数 m_1，由于 $E|X_{m_1}| < \infty$，则可取 M_1 充分大(> 1)使得 $A_1 = \{X_{m_1} > -M_1\} \in \mathscr{F}_{m_1}$，且 $P(V - A_1) < \frac{3}{4}$. 记 $B_1 = \{X_{n_1} < -\frac{4}{\delta}M_1\} \cap A_1 \in \mathscr{F}_{n_1}$，$n_1 > m_1$，取 n_1 充分大($n_1 > m_1$)使 $P(VA_1 - B_1) < \frac{\varepsilon}{4}$，于是有

$$\int_{A_1 - B_1} X_{n_1} dP = \int_{A_1} X_{n_1} dP - \int_{B_1} X_{n_1} dP \geqslant \int_{A_1} X_{m_1} dP - \int_{B_1} X_{n_1} dP$$

$$\geq -M_1 P(A_1) + \frac{4}{\delta} M_1 P(B_1) = M_1(-P(A_1) - \frac{4}{\delta} P(B_1))$$

及 $\quad P(VB_1) \geq P(V) - \frac{\varepsilon}{2}$.

对任意 $m_2 > n_1$，由于 $E|X_{m_2}| < \infty$，则可取 M_2 充分大(> 1)使得 $A_2 = B_1 \cap \{X_{m_2} > -M_2\}$ 且 $P(VB_1 - A_2) < \frac{\varepsilon}{8}$. 记 $B_2 = \{X_{n_2} < -\frac{4}{\delta}M_2\} \cap A_2 \in \mathscr{F}_{n_2}$，$n_2 > m_2$，取 n_2 充分大($n_2 > m_2$)使 $P(VA_2 - B_2) < \frac{\varepsilon}{8}$，于是有

$$\int_{A_2 - B_2} X_{n_2} dP = \int_{A_2} X_{n_2} dP - \int_{B_2} X_{n_2} dP \geqslant \int_{A_2} X_{m_2} dP + \frac{4}{\delta} M_2 P(B_2)$$

$$\geq -M_2 P(A_2) + \frac{4}{\delta} M_2 P(B_2) = M_2(-P(A_2) + \frac{4}{\delta} P(B_2))$$

及 $\quad P(VB_2) \geq P(VB_1) - \varepsilon \cdot 2^{-2} \geqslant \delta - \varepsilon$.

归纳地可依次求得 $\quad M_k > 1, k = 1, 2, \cdots$

$$m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \cdots < m_k < n_k < \cdots$$

$$A_1 \supset B_1 \supset A_2 \supset B_2 \supset \cdots \supset A_k \supset B_k \supset \cdots$$

$A_i \in \mathscr{F}_{m_i}$，$B_i \in \mathscr{F}_{n_i}$ 且

$$\int_{A_i - B_i} X_{n_i} dP \geqslant M_i(-P(A_i) + \frac{4}{\delta} P(B_i))$$

及

$$P(VB_i) \geqslant P(VB_{i-1}) - \varepsilon \cdot 2^{-i} \geqslant \delta - \varepsilon. \quad (i \geqslant 1)$$

取 $\varepsilon = \dfrac{\delta}{2}$，则 $P(B_i) \geqslant P(VB_i) \geqslant \dfrac{\delta}{2}$，$-P(A_i) + \dfrac{4}{\delta}P(B_i) \geqslant 1$.

令 $\tau = \sum_{i=1}^{\infty} n_i I_{A_i - B_i} + \infty I_{(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i - B_i))^c}$，则 τ 是停时，且

$$\int_{\{\tau<\infty\}} X_\tau dP = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i - B_i} X_{n_i} dP \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} M_i = \infty,$$

这就得到矛盾，故 $P(V) = 0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n > -\infty \ a.e.$.

定理 1.10 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是鞅，则下列条件等价：

(1) $\{X_n, n \in N\}$ L^1 收敛，

(2) 存在随机变量 X_∞，$E|X_\infty| < \infty$，使得

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty \ a.e.$$

且对一切 $n \geqslant 0$，有

$$X_n = E(X_\infty | \mathscr{F}_n)$$

(3) $\{X_n, n \in N\}$ 一致可积.

证 (1)⇒(2). 由于 $\{X_n, n \in N\}$ L^1 收敛，则有 $\sup\limits_{n\in N} E|X_n| < \infty$，由定理 1.8 知存在随机变量 X_∞，$E|X_\infty| < \infty$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X_\infty \ a.e.$，又对每一 $n \geqslant 0$，$E|E(X_p|\mathscr{F}_n) - E(X_\infty|\mathscr{F}_n)| \leqslant E(E(|X_p - X_\infty| \,|\mathscr{F}_n)) = E|X_p - X_\infty| \to 0 (p \to \infty)$，即

$$E(X_p|\mathscr{F}_n) \xrightarrow{L^1} E(X_\infty|\mathscr{F}_n) \ (p \to \infty)$$

但 $\forall p \geqslant n$，有 $E(X_p|\mathscr{F}_n) = X_n$，从而有

$$X_n = E(X_\infty|\mathscr{F}_n), \ \forall n \geqslant 0.$$

(2)⇒(3). 由第一章的定理 6.7 立即得出.

(3)⇒(1). 由于 $\{X_n, n \in N\}$ 一致可积，故 $\sup\limits_{n\in N} E|X_n| < \infty$. 由定理 1.8 知 $\{X_n, n \in N\}$ $a.e.$ 收敛，再用第一章的定理 6.4 知(1)成立.

定理 1.11 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是一致可积的上鞅，则

存在随机变量 X_∞,$E|X_\infty|<\infty$,使得

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}X_n = X_\infty \quad [a.e.] \quad [L^1]$

(2) 对一切 $n\geqslant 0$,有

$$E(X_\infty|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n.$$

若 X 为一致可积的反上鞅,则(1) 亦成立.

证 类似于定理 1.10 证明,留给读者作习题.

定理 1.12 (P. Lèvy 连续性定理) 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间,$X\in L^p(\Omega,\mathscr{F},P,R)$,$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是$\mathscr{F}$的子$\sigma$代数序列,其中 $p\geqslant 1$.

(1) 若 $\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2\subset\cdots$,则

$$\lim_{n\to\infty}E(X|\mathscr{F}_n)=E(X|\bigvee_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n),\ a.e.\ (L^p),$$

(2) 若 $\mathscr{F}_0\supset\mathscr{F}_1\supset\mathscr{F}_2\supset\cdots$,则

$$\lim_{n\to\infty}E(X|\mathscr{F}_n)=E(X|\bigwedge_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n),\ a.e.\ (L^p).$$

证 先设 $p=1$. (1) 由第一章的定理 6.7 及例 1.1 知$\{X_n=E(X|\mathscr{F}_n),\mathscr{F}_n,n\geqslant 0\}$是一致可积鞅. 再由定理 1.10 知存在随机变量 X_∞,$E|X_\infty|<\infty$,使得

$$\lim_{n\to\infty}X_n=\lim_{n\to\infty}E(X|\mathscr{F}_n)=X_\infty,\ a.e.\ (L^1).$$

下面证明 $X_\infty=E(X|\bigvee\limits_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n)$. 首先,$X_\infty$ 是 $\bigvee\limits_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n$ 可测的为显然,其次,对每一固定的 $n\geqslant 0$,$\forall\ A\in\mathscr{F}_n$,有

$$\int_A XdP=\int_A X_n dP=\lim_{n\to\infty}\int_A X_{n+k}dP=\int_A X_\infty dP,$$

从而

$$\int_A XdP=\int_A X_\infty dP,\ \forall\ A\in\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n.$$

由于 $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n$ 为代数,用 π-λ 系方法立即得

$$\int_A XdP=\int_A X_\infty dP,\ \forall\ A\in\sigma(\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n)=\bigvee_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n.$$

所以 $X_\infty = E(X \mid \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n)$.

(2) 若 $\mathscr{F}_0 \supset \mathscr{F}_1 \supset \mathscr{F}_2 \supset \cdots$,则$\{X_n = E(X|\mathscr{F}_n), \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 为一致可积的反鞅,由定理 1.11 知存在随机变量 X_∞, $E|X_\infty| < \infty$,使得

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X_\infty, \ a.e. \ (L^1).$$

因为对每一固定的$k \geqslant 0$,当$n \geqslant k$时,X_n是$\mathscr{F}_n$可测的,从而是$\mathscr{F}_k$可测的,于是 $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ 是 $\mathscr{F}_k$ 可测的. 所以 X_∞ 是 $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n = \bigwedge_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n$ 可测的. 又因对任一 $A \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n$,有

$$\int_A X_\infty dP = \lim_{n\to\infty} \int_A X_n dP = \lim_{n\to\infty} \int_A E(X|\mathscr{F}_n) dP$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_A X dP = \int_A X dP.$$

这样,$X_\infty = E(X \mid \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n)$. 即定理在 $p=1$ 时是成立的.

现设$p > 1$. 由于$X \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, P, R) \subset L^1(\Omega, \mathscr{F}, P, R)$. 故由上面的证明知:若 $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \cdots$,则 $X_n = E(X|\mathscr{F}_n) \to E(X \mid \mathscr{F}_\infty)$, $a.e.$ 其中 $\mathscr{F}_\infty = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n$. 若 $\mathscr{F}_0 \supset \mathscr{F}_1 \supset \cdots$,则 $X_n = E(X|\mathscr{F}_n) \to E(X \mid \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n)$, $a.e.$.

由于 $|X_n|^p = |E(X|\mathscr{F}_n)|^p \leqslant E(|X|^p|\mathscr{F}_n)$, $\forall\, n \geqslant 0$, 因此不管子σ代数序列$\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$是单调上升或单调下降,序列$\{|X_n|^p, n \geqslant 0\}$均一致可积. 由测度论知:当 $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \cdots$ 时,$X_n = E(X|\mathscr{F}_n) \to E(X \mid \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n)(L^p)$, 当 $\mathscr{F}_0 \supset \mathscr{F}_1 \supset \cdots$ 时,$X_n = E(X|\mathscr{F}_n) \to E(X \mid \bigwedge_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n)(L^p)$. 这就证明了定理.

§2 分解理论

本节我们给出鞅(上、下鞅)的几个有用分解.

定理 2.1（Doob 分解）每一上鞅都可表为一个鞅与一个非负非降可预报序列的差，相应地，每个下鞅都可表为一个鞅与一个非负非降可预报序列的和. 且当这个非负非降序列 $A=\{A_n\}$ 满足 $A_0=0$ 时，分解是唯一的. 当上（或下）鞅 L^1 有界时，则 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A_\infty\in L^1$，从而 $\{A_n,n\in N\}$ 一致可积，且分解中的鞅也 L^1 有界.

证　设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为上鞅，令

$$M_0=X_0,M_n=X_0+\sum_{k=1}^{n}(X_k-E(X_k|\mathscr{F}_{k-1})),n\geqslant 1.$$

$$A_0=0,A_n=\sum_{k=0}^{n-1}(X_k-E(X_{k+1}|\mathscr{F}_k)),n\geqslant 1.$$

显然，$\{M_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为鞅，$\{A_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为非负非降可预报序列. 且 $X_n=M_n-A_n,n\geqslant 0$. 即得到上鞅 X 的所需要的分解.

设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是下鞅，令

$$M_0=X_0,M_n=X_0+\sum_{k=1}^{n}(X_k-E(X_k|\mathscr{F}_{k-1})),n\geqslant 1.$$

$$A_0=0,A_n=\sum_{k=0}^{n-1}(E(X_{k+1}|\mathscr{F}_k)-X_k),n\geqslant 1.$$

显然，$\{M_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为鞅，$\{A_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为非负非降可预报序列. 且 $X_n=M_n+A_n,n\geqslant 0$.

当要求 $A_0=0$ 时，分解是唯一的. 事实上，若假设

$$X_n=M_n-A_n=M'_n-A'_n,n=0,1,2,\cdots$$

则 $M_n-M'_n=A_n-A'_n,n=0,1,2,\cdots$，于是 $\{M_n-M'_n,n\in N\}$ 为鞅，且 $M_n-M'_n$ 为 $\mathscr{F}_{n-1}$ 可测（$n\in N$），这样 $M_n-M'_n=E((M_n-M'_n)|\mathscr{F}_{n-1})=M_{n-1}-M'_{n-1}=\cdots=M_0-M'_0$. 因此也有 $A_n-A'_n=A_0-A'_0=0$. 于是 $A_n=A'_n,M_n=M'_n$. 唯一性获证.

当 $\{X_n,n\in N\}L^1$ 有界时，因为 $\{A_n,n\in N\}$ 是非负非降的，又

$$EA_n=\sum_{k=0}^{n-1}(EX_k-E(E(X_{k-1}|\mathscr{F}_k)))$$

$$= EX_0 - EX_n \leqslant 2\sup_{n\in N} E|X_n| < \infty.$$

由单调收敛定理知 $EA_\infty = E(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} EA_n < \infty$ 即 $A_\infty \in L^1$，从而 $\{A_n, n \in N\}$ 一致可积，且

$$\sup_{n\in N} E|M_n| \leqslant \sup_{n\in N} E|X_n| + \sup_{n\in N} EA_n$$

$$= \sup_{n\in N} E|X_n| + EA_\infty < \infty.$$

类似可证明下鞅情形时的结论亦成立.

定理 2.2 (Krickeberg 分解) 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是鞅，则 X 有如下分解

$$X_n = X_n^{(1)} - X_n^{(2)}, n = 0,1,2,\cdots$$

其中 $X^{(i)} = \{X_n^{(i)}, \mathscr{F}_n, n \in N\}(i = 1,2)$ 是非负鞅，当且仅当 $\{X_n, n \in N\}$ 是 L^1 有界的，且此时 $X^{(i)}$ 可以选得使

$$\| X \|_1 = \sup_n \| X_n \|_1 = \| X_0^{(1)} \|_1 + \| X_0^{(2)} \|_1$$

此外，这样的分解是唯一的(在 $a.e.$ 意义下).

证 设 X 有分解：$X_n = X_n^{(1)} - X_n^{(2)}, n \in N$，其中 $\{X_n^{(i)}\}$ $(i = 1,2)$ 为非负鞅，则 $EX_n^{(i)} = k^{(i)}$(常数)，$(\forall\, n \in N, i = 1,2)$. 故 $\| X_n \|_1 \leqslant k^{(1)} + k^{(2)}, \forall\, n \in N$，这证明了 $\{X_n, n \in N\}$ 是 L^1 有界的.

反之，设 $X = \{X_n, n \in N\}$ 为 L^1 有界，注意到 $\{X_n^+, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 及 $\{X_n^-, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 都是非负下鞅，且 $\sup_n \| X_n^- \|_1 \leqslant \sup_n \| X_n \|_1 < \infty$，$\sup_n \| X_n^+ \|_1 \leqslant \sup_n \| X_n \|_1 < \infty$. 对固定的 n，考虑

$$Y_{n,m} = E(X_{n+m}^- | \mathscr{F}_n), m \geqslant 0,$$

$$Z_{n,m} = E(X_{n+m}^+ | \mathscr{F}_n), m \geqslant 0,$$

显然，$\{Y_{n,m}, m \geqslant 0\}$，$\{Z_{n,m}, m \geqslant 0\}$ 都是增过程. 因为

$$Y_{n,m+1} = E(X_{n+m+1}^- | \mathscr{F}_n)$$

$$= E(E(X_{n+m+1}^- | \mathscr{F}_{n+m}) | \mathscr{F}_n)$$

$$\geqslant E(X_{n+m}^- | \mathscr{F}_n) = Y_{n,m}.$$

类似地，用$\{-X_n\}$代替$\{X_n\}$，可得$Z_{n,m+1}\geqslant Z_{n,m}$因此，可令 $X_n^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} Y_{n,m}$，$X_n^{(2)} = \lim\limits_{m\to\infty} Z_{n,m}$. 显然$X_n^{(i)}$是$\mathscr{F}_n$可测的，$(i=1,2)$，又

$$
\begin{aligned}
\|X_n^{(1)}\|_1 + \|X_n^{(2)}\|_1 &= \lim_{n\to\infty} E(Y_{n,m} + Z_{n,m}) \\
&= \lim_{n\to\infty} E(E(|X_{n+m}| \mid \mathscr{F}_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \|X_{n+m}\|_1 \\
&= \sup_{n\in N} \|X_n\|_1 < \infty,
\end{aligned}
$$

故$X_n^{(i)}\in L^1(i=1,2)$. 此外，对一切$m\geqslant 0$，有

$$
\begin{aligned}
Y_{n,m} - Z_{n,m} &= E((X_{n+m}^{+} - X_{n+m}^{-}) \mid \mathscr{F}_n) \\
&= E(X_{n+m} \mid \mathscr{F}_n) = X_n.
\end{aligned}
$$

令$m\to\infty$得 $X_n^{(1)} - X_n^{(2)} = X_n, \forall\, n\geqslant 0$.

现证$\{X_n^{(i)},\mathscr{F}_n,n\in N\}(i=1,2)$是鞅，因为对任意$n\geqslant 0$，有

$$
\begin{aligned}
Y_{n,m+1} &= E(X_{n+m+1}^{+} \mid \mathscr{F}_n) \\
&= E(E(X_{n+m+1}^{+} \mid \mathscr{F}_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n) \\
&= E(Y_{n+1,m} \mid \mathscr{F}_n).
\end{aligned}
$$

在上式中令$m\to\infty$，由条件期望的单调收敛定理得 $X_n^{(1)} = E(X_{n+1}^{(1)} \mid \mathscr{F}_n)$.

类似地可证得

$$X_n^{(2)} = E(X_{n+1}^{(2)} \mid \mathscr{F}_n).$$

这就证明了L^1有界鞅X可分解为两个非负鞅之差.

由于$E|X_n|\leqslant E(X_n^{(1)}+X_n^{(2)}) = E(X_0^{(1)}+X_0^{(2)}),\forall\, n\geqslant 0$，从而$\sup\limits_n \|X_n\|_1 \leqslant EX_0^{(1)} + EX_0^{(2)}$. 由前面证明知：$\|X_0^{(1)}\|_1 + \|X_0^{(2)}\|_1 \leqslant \sup\limits_n \|X_n\|_1$. 故$\|X\|_1 = \sup\limits_n \|X_n\|_1 = \|X_0^{(1)}\|_1 + \|X_0^{(2)}\|_1$.

最后证分解的唯一性，设除上述特殊构造的$\{X_n^{(i)}\}$外，还有

$$X_n = X_n^{(1)} - X_n^{(2)} = W_n^{(1)} - W_n^{(2)}$$

则 $X_n^+ \leqslant W_n^{(1)}$. 故

$$X_n^{(1)} = \lim_{m\to\infty} E(X_{n+m}^+ \mid \mathscr{F}_n) \leqslant \lim_{m\to\infty} E(W_{n+m}^+ \mid \mathscr{F}_n) = W_n^{(1)}$$

用 $\{-X_n\}$ 代替 $\{X_n\}$，得 $X_n^{(2)} \leqslant W_n^{(2)}$. 但因

$$E(X_n^{(1)} + X_n^{(2)}) = \sup_n \| X_n \|_1 = E(W_n^{(1)} + W_n^{(2)}),$$

从而有 $X_n^{(1)} = W_n^{(1)}, X_n^{(2)} = W_n^{(2)}$, $a.e.$ $(n \geqslant 0)$.

推论 2.3 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是 L^1 有界的下鞅，则存在非负鞅 $\{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 使得

$$X_n^+ \leqslant Y_n, EY_0 = \sup_n X_n^+.$$

证　显然 $\{X_n^+, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为 L^1 有界下鞅. 令

$$Y_{n,m} = E(X_{n+m}^+ \mid \mathscr{F}_n)$$

完全平行于上述定理的证明得 $Y_{n,m} \uparrow (m \to \infty)$.

令　$Y_n = \lim_{m\to\infty} Y_{n,m}$，显然 $\{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为非负鞅，且 $X_n^+ \leqslant Y_n$，$EY_0 = \sup_n EX_n^+$.

定义 2.1 称非负上鞅 $Z = \{Z_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为位势，如果 $\lim_{n\to\infty} EZ_n = 0$，即 $Z_n \xrightarrow{L^1} 0$.

称上鞅 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 有 Riesz 分解，如果存在鞅 $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 及位势 $Z = \{Z_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$，使得 $X_n = Y_n + Z_n$, $\forall\, n \geqslant 0$.

定理 2.4 (Riesz 分解)　设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为上鞅. 则

(1) 若 X 有 Riesz 分解，则其分解在 $a.e.$ 意义下唯一.

(2) X 有 Riesz 分解的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} EX_n > -\infty.$$

(3) 若 $X_n \geqslant 0$, $(n \in N)$，则由(2)知 X 有 Riesz 分解，设其 Riesz 分解为　$X_n = Y_n + Z_n, n \geqslant 0$. 则 $\{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为非负鞅.

(4) 若 $\{X_n, n \in N\}$ 一致可积，则存在 X_∞ 使得 $X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$. 令 $Y_n = E(X_\infty \mid \mathscr{F}_n), n \geqslant 0$. $Z_n = X_n - Y_n$，则 $X_n = Y_n + Z_n$, $n \geqslant 0$

为 X 的 Riesz 分解.

证 (1) 设 $X_n = Y_n + Z_n = Y'_n + Z'_n$ 有二组 Riesz 分解，即 $\{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$，$\{Y'_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是鞅，$\{Z_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$，$\{Z'_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是位势，则 $\{Y_n - Y'_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是鞅，而且

$$Y_n - Y'_n = Z'_n - Z_n \xrightarrow{L^1} 0,\ (n \to \infty).$$

于是，$\{Y_n - Y'_n, n \in N\}$ 一致可积，由于随机变量序列的 L^1 收敛极限与 $a.e.$ 收敛的极限是 $a.e.$ 相等的，故由定理 1.10 知对任意 $n \geqslant 0$，有

$$0 = E(0|\mathscr{F}_n) = Y_n - Y'_n = Z'_n - Z_n,\ a.e.$$

从而，$Y_n = Y'_n\ a.e.$，$Z'_n = Z_n$，$a.e.$，$\forall\ n \in N$.

(2) 必要性. 设 $X_n = Y_n + Z_n$ 是 X 的 Riesz 分解，由 $\{Z_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是位势得 $EZ_n \to 0, n \to \infty$. 由 $\{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是鞅得 $EY_n = EY_0 \triangleq c$（不依赖 $n \geqslant 0$），所以，

$$\lim_{n\to\infty} EX_n = \lim_{n\to\infty} EY_n + \lim_{n\to\infty} EZ_n = c > -\infty.$$

充分性 设 $\lim\limits_{n\to\infty} EX_n > -\infty$. 对任何非负整数 n 和 p，令

$$Y_{n,p} = E(X_{n+p}|\mathscr{F}_n),$$

则由上鞅性得

$$\begin{aligned} Y_{n,p+1} &= E(X_{n+p+1}|\mathscr{F}_n) \\ &= E(E(X_{n+p+1}|\mathscr{F}_{n+p})|\mathscr{F}_n) \\ &\leqslant E(X_{n+p}|\mathscr{F}_n) = Y_{n,p}. \end{aligned}$$

即对任意固定的 $n \geqslant 0$，$\{Y_{n,p}, p \geqslant 0\}$ 对 p 单调下降，故可再令

$$Y_n = \lim_{p\to\infty} Y_{n,p}.$$

显然，Y_n 是 $\mathscr{F}_n$ 可测的. 由 $Y_{n,p}$ 的定义及单调收敛定理得

$$EY_n = \lim_{p\to\infty} Y_{n,p} = \lim_{p\to\infty} EX_{n+p} > -\infty.$$

另一方面，显然有

$$EY_n \leqslant EY_{n,p} = EX_{n+p} < \infty,$$

即对每一 $n \geqslant 0$，Y_n 是可积的，又由条件期望的单调收敛定理有

$$E(Y_{n-1}|\mathscr{F}_n)=\lim_{p\to\infty}E(Y_{n-1,p}|\mathscr{F}_n)$$
$$=\lim_{p\to\infty}E(E(X_{n-1-p}|\mathscr{F}_{n-1}|\mathscr{F}_n)$$
$$=\lim_{p\to\infty}E(X_{n-1-p}|\mathscr{F}_n)$$
$$=\lim_{p\to\infty}Y_{n,p-1}=Y_n,$$

所以$\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是鞅.令$Z_n=X_n-Y_n,n\geqslant 0$.由上鞅性知

$$Y_n\leqslant Y_{n,p}=E(X_{n-p}|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n,\forall\ n\in N.$$

又由$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是上鞅,$\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是鞅,立即知$\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是非负上鞅,此外还有

$$EZ_n=EX_n-EY_n=EX_n-\lim_{p\to\infty}EY_{n,p}$$
$$=EX_n-\lim_{p\to\infty}EX_{n-p},$$

再令$n\to\infty$,即得

$$\lim_{p\to\infty}EZ_n=0.$$

故$\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是位势,即$X_n=Y_n+Z_n(n\geqslant 0)$是一组 Riesz 分解.

(3) 若$X_n\geqslant 0$,在(2)的证明中所定义的$Y_n\geqslant 0$.

(4) 若$\{X_n,n\geqslant 0\}$一致可积,由定理 1.11 知存在可积随机变量X_∞,使得

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X_\infty,\ [a.e.],\ [L^1].$$
$$E(X_\infty|\mathscr{F}_n)\leqslant X_n(n\geqslant 0).$$

若令$Y_n=E(X_\infty|\mathscr{F}_n)$,$Z_n=X_n-Y_n$,由例 1.1 知$\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是鞅,再利用$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是上鞅可知$\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是上鞅.显然$Z_n\geqslant 0\ (n\geqslant 0)$.又因为

$$\lim_{n\to\infty}EZ_n=\lim_{n\to\infty}EX_n-\lim_{n\to\infty}EY_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}EX_n-EX_\infty=0,$$

所以$\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是位势.故$X_n=Y_n+Z_n(n\geqslant 0)$是$X$的 Riesz 分解.

推论 2.5 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是上鞅，则下面两陈述等价：

(1) 存在下鞅 $M=\{M_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$，使得

$$X_n\geqslant M_n,\forall\ n\in N;$$

(2) X 有 Riesz 分解：

$$X_n=Y_n+Z_n,n\geqslant 0.$$

证 (1)⇒(2)，设(1) 成立. 即存在下鞅 $M=\{M_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$，使得 $X_n\geqslant M_n,\forall\ n\in N$. 这样，$\lim\limits_{n\to\infty}EX_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}EM_n\geqslant EM_0>\infty$. 由定理 2.4 知(2) 成立.

(2)⇒(1). 设 X 有 Riesz 分解 $X_n=Y_n+Z_n,n\geqslant 0$. 即 $\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是位势. 由于鞅是下鞅，且对一切 $n\in N$，有

$$X_n\geqslant Y_n.$$

故(1) 成立.

推论 2.6 每一 L^1 有界的上鞅有 Riesz 分解.

证 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是 L^1 有界的上鞅，由于对一切 $n\geqslant 0$，有 $EX_n\geqslant -E|X_n|\geqslant -\sup\limits_n E|X_n|$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}EX_n\geqslant -\sup\limits_n E|X_n|>-\infty$. 由定理 2.4 知 X 有 Riesz 分解.

定理 2.7 (Chow 分解) 设 $X=\{X_n=\sum\limits_{i=0}^{\infty}D_i,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是鞅，$V_p=(\sum\limits_{i=0}^{\infty}|D_i|^p)^{\frac{1}{p}},p\geqslant 1$. 则对每一 $k>0$，有

$$D_n=D_n^{(1)}+D_n^{(2)}+D_n^{(3)},$$

其中 $\{D_n^{(j)},\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是鞅差序列，$(j=1,2,3)$ 且满足

(1) $E\sum\limits_{n=0}^{\infty}|D_n^{(1)}|^p\leqslant C_pE\min(V_p,k)^p)$，其中，$C_p=2^p,p\neq 2$，$C_2=1$.

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|D_n^{(2)}|\leqslant 2E|D_\tau I_{(\tau<\infty)}|\leqslant 2ED^*$，其中

$$\tau = \inf\{n \geqslant 0; V_{n,p} \equiv (\sum_{i=0}^{n} |D_i|^p)^{\frac{1}{p}} > K\},$$

(3) $E\sum_{n=0}^{\infty} |D_n^{(3)}|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant EV_p$,

$\{D^{(3)*} > 0\} \subset \{V_p > K\}$,

$P\{D^{(3)*} > 0\} \leqslant \frac{EV_p}{K}$.

证　对 $K > 0, \tau, V_{n,p}$ 如(2)中所定义. 注意到 $V_{n,p} \xrightarrow{a.e.} V_p$. 对 $n \geqslant 0$. 令

$$D_n^{(1)} = D_n I_{\{\tau > n\}} - E(D_n I_{\{\tau > n\}} | \mathscr{F}_{n-1}),$$

$$D_n^{(2)} = D_n I_{\{\tau = n\}} - E(D_n I_{\{\tau = n\}} | \mathscr{F}_{n-1}),$$

$$D_n^{(3)} = D_n I_{\{\tau < n\}},$$

其中 $\mathscr{F}_{-1} = \{\varnothing, \Omega\}$, 对 $p \geqslant 1$, 利用条件期望的 Jensen 不等式有

$$E\sum_{n=0}^{\infty} |D_n^{(1)}|^p = \sum_{n=0}^{\infty} E|D_n I_{\{\tau > n\}} - E(D_n I_{\{\tau > n\}} | \mathscr{F}_{n-1})|^p$$

$$\leqslant 2^{p-1}\sum_{n=0}^{\infty} E(|D_n I_{\{\tau > n\}}|^p + |E(D_n I_{\{\tau > n\}} | \mathscr{F}_{n-1})|^p)$$

$$\leqslant 2^p E\sum_{n=0}^{\infty} |D_n|^p I_{\{\tau > n\}} = 2^p E\sum_{n=0}^{\tau-1} |D_n|^p$$

$$\leqslant 2^p E\min(V_p, K)^p,$$

当 $p = 2$ 时,

$$E\sum_{n=0}^{\infty} |D_n^{(1)}|^2 \leqslant E\sum_{n=0}^{\infty} D_n^2 I_{\{\tau > n\}} \leqslant E\sum_{n=0}^{\tau-1} D^2 \leqslant E\min(V_2, K)^2.$$

这就证明了(1)成立.

其次

$$E\sum_{n=0}^{\infty} |D_n^{(2)}| \leqslant 2E\sum_{n=0}^{\infty} |D_n I_{\{\tau = n\}}| \leqslant 2E|D_\tau| I_{\{\tau < \infty\}}$$

$$\leqslant 2ED^*,$$

这就证明了(2)成立. 最后

$$E\sum_{n=0}^{\infty}|D_n^{(3)}|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant E(\sum_{n=0}^{\infty}|D_n|^p)^{\frac{1}{p}} = EV_p,$$

由于 $\tau = \infty \Rightarrow \sup|D_n^{(3)}| = 0$。这样，

$$\{D^{(3)*} > 0\} = \{\sup|D_n^{(3)}| > 0\}$$
$$\subset \{\tau < \infty\} = \{V_p > K\},$$

从而，

$$P\{D^{(3)*} > 0\} \leqslant P\{V_p > K\} \leqslant \frac{EV_p}{K}.$$

即(3)成立.

显然，$\{D_n^{(j)}, \mathscr{F}_n, n \in N\}, j = 1,2,3$ 是鞅差序列，且

$$D_n = D_n^{(1)} + D_n^{(2)} + D_n^{(3)}, n \geqslant 0.$$

定理 2.8 (Davis 分解)　设 $X = \{X_n = \sum_{j=0}^{n} D_j, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是鞅，令

$$Y_n = \sum_{j=0}^{n} D_j^{(1)}, D_j^{(1)} = D_j I_{\{|D_j| \leqslant 2D_{j-1}^*\}} - E(D_j I_{\{|D_j| \leqslant 2D_{j-1}^*\}} | \mathscr{F}_{j-1}),$$

$$Z_n = \sum_{j=0}^{n} D_j^{(2)}, D_j^{(2)} = D_j I_{\{|D_j| > 2D_{j-1}^*\}} - E(D_j I_{\{|D_j| > 2D_{j-1}^*\}} | \mathscr{F}_{j-1}),$$

则 $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 与 $Z = \{Z_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 均为鞅且 $X_n = Y_n + Z_n, n \geqslant 0$，还满足：

(1) $|D_n^{(1)}| \leqslant 4D_{n-1}^*$，

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} |D_n I_{\{|D_n^{(2)}| > 2D_{n-1}^*\}}| \leqslant 2D^*$，

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} E|D_n^{(2)}| \leqslant 4ED^*$.

证　显然 Y 与 Z 是鞅，且对每一 $n \geqslant 0$，有 $X_n = Y_n + Z_n$. 又

$$|D_n^{(1)}| = |D_n I_{\{|D_n| \leqslant 2D_{n-1}^*\}} - E(D_n I_{\{|D_n| \leqslant 2D_{n-1}^*\}} | \mathscr{F}_{n-1})|$$
$$\leqslant 4D_{n-1}^*,$$

即(1) 成立.

在集合$\{|D_n| > 2D_{n-1}^*\}$上,$|D_n| + 2D_{n-1}^* \leqslant 2|D_n| \leqslant 2D_n^*$,从而

$$\sum_{n=0}^{\infty} |D_n I_{\{|D_n| \leqslant 2D_{n-1}^*\}}| \leqslant 2\sum_{n=0}^{\infty} (D_n^* - D_{n-1}^*)$$
$$= 2D^*.$$

即(2) 成立.利用(2) 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} E|D_n^{(2)}| \leqslant E\sum_{n=0}^{\infty} |D_n I_{\{|D_n| > 2D_{n-1}^*\}}|$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} E|E(D_n I_{\{|D_n| > 2D_{n-1}^*\}} | \mathscr{F}_{n-1})|$$
$$\leqslant 2ED^* + 2ED^* = 4ED^*,$$

即(3) 成立.

§3　鞅的停时理论

定理 3.1　设$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$是鞅(相应地,上鞅或下鞅),$\tau$为$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$停时,则

$$X^\tau = \{X_{\tau \wedge n}, \mathscr{F}_n, n \in N\}$$

是鞅(相应地,上鞅或下鞅)且$EX_0 = EX_{\tau \wedge n} = EX_n, n \geqslant 0$(相应地,$EX_0 \geqslant EX_{\tau \wedge n} \geqslant EX_n$或$EX_0 \leqslant EX_{\tau \wedge n} \leqslant EX_n$).

若X是L^1有界的鞅或非负下鞅,则

$$\| X_\tau \|_1 \leqslant \| X^\tau \|_1 \leqslant \| X \|_1 < \infty.$$

若X是一致可积的鞅(相应地,上鞅),则X^τ亦然.

证　对每一$n \in N$,显然$X_{\tau \wedge n}$是可积的且是$\mathscr{F}_n$可测的.又$X_{\tau \wedge (n-1)} - X_{\tau \wedge n} = I_{\{\tau \geqslant n\}}(X_{n-1} - X_n)$.设$X$是鞅(相应地,上鞅或下鞅),则

$$E((X_{\tau\wedge(n+1)} - X_{\tau\wedge n})|\mathscr{F}_n) = I_{(\tau>n)}((X_{n+1} - X_n)|\mathscr{F}_n)$$
$$= 0$$

这就证明了$\{X_{\tau\wedge n},\mathscr{F}_n,n \in N\}$是鞅(相应地，上鞅或下鞅). 显然有 $EX_0 = EX_{\tau\wedge n} = EX_n, n \geqslant 0$（相应地，$EX_0 \geqslant EX_{\tau\wedge n} \geqslant EX_n$ 或 $EX_0 \leqslant EX_{\tau\wedge n} \leqslant EX_n$）.

若X是L^1有界的鞅或非负下鞅，由于$X_\tau = \lim\limits_{n\to\infty} X_{\tau\wedge n}$，由法都引理知

$$\|X_\tau\|_1 = E|X_\tau\|_1 \leqslant \liminf_{n\to\infty} E|X_{\tau\wedge n}|$$
$$\leqslant \sup_{n\geqslant 0} E|X_{\tau\wedge n}| = \|X^\tau\|_1.$$

在鞅与非负下鞅情形，$\{|X_n|,\mathscr{F}_n,n\in N\}$总是非负下鞅，$\{\tau=k\}\in\mathscr{F}_k$，所以，当$k<n$时，有

$$\int_{\{\tau=k\}} |X_k|dP \leqslant \int_{\{\tau=k\}} |X_n|dP.$$

因此

$$E|X_{\tau\wedge n}| = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\{\tau=k\}} |X_k|dP + \int_{\{\tau\leqslant n\}} |X_n|dP$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\{\tau=k\}} |X_n|dP + \int_{\{\tau\geqslant n\}} |X_n|dP$$
$$= E|X_n|, \qquad (n \geqslant 0)$$

所以

$$\|X^\tau\|_1 = \sup_{n\geqslant 0} E|X_{\tau\wedge n}| \leqslant \sup_{n\geqslant 0} E|X_n| = \|X\|_1 < \infty.$$

若X是一致可积鞅，则X是L^1有界的，由前面的证明知X^τ为鞅，且$\|X_\tau\|_1 \leqslant \|X^\tau\|_1 \leqslant \|X\|_1 < \infty$. 即$X_\tau$为可积随机变量. 又

$$|X_{\tau\wedge n}| \leqslant |X_\tau| + |X_n|, \forall\, n \geqslant 0,$$

从而，$\{X_{\tau\wedge n}, n \in N\}$是一致可积的.

若X是一致可积的上鞅，由定理2.4知X有如下Riesz分解：

$$X_n = Y_n + Z_n, n \geqslant 0,$$

其中$\{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为鞅，$\{Z_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为位势. 由$\{X_n, n \in N\}$一致可积知$\{Y_n, n \in N\}$一致可积，从而由上一步证明知$\{Y_{\tau \wedge n}, n \in N\}$一致可积，又$\{Z_{\tau \wedge n}, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为非负上鞅且$Z_\tau = \lim\limits_{n \to \infty} Z_{\tau \wedge n}$. 由法都引理有

$$E|Z_\tau| = EZ_\tau \leqslant \liminf_{n \to \infty} EZ_{\tau \wedge n} \leqslant EZ_0 < \infty,$$

但 $|Z_{\tau \wedge n}| = Z_{\tau \wedge n} \leqslant Z_\tau + Z_n, n \geqslant 0$，故 $\{Z_{\tau \wedge n}, n \in N\}$一致可积. 又$X_{\tau \wedge n} = Y_{\tau \wedge n} + Z_{\tau \wedge n}, n \in N$，从而$\{X_{\tau \wedge n}, n \in N\}$一致可积. 由前面的证明立即得出$X^\tau$是上鞅.

定理 3.2 （有界停时的Doob停时定理） 设$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$是鞅(相应地，上鞅)，$\tau, \eta$为$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$有界停时，且$\tau \leqslant \eta$，则

$$E(X_\eta | \mathscr{F}_\tau) = X_\tau (\text{相应地}, E(X_\eta | \mathscr{F}_\tau) \leqslant X_\tau)$$

证 只证上鞅情形，设X为上鞅，因η是有界停时，故可设$\eta \leqslant n$，则

$$|X_\eta| = |\sum_{i=0}^{n} X_i I_{(\eta = i)}| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |X_i|,$$

从而，$|X_\eta|$可积，同理可证X_τ可积，$\forall A \in \mathscr{F}_\tau$，则 $A \cap \{\tau = i\} \cap \{\eta > i\} \in \mathscr{F}_i, \forall i \in N$.

先假设$\eta - \tau \leqslant 1$，则有

$$\int_A (X_\tau - X_\eta) dP = \sum_{i=0}^{n} \int_{A \cap \{\tau = i\}} (X_i - X_\eta) dP$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \int_{A \cap \{\tau = i\} \cap \{\eta = i+1\}} (X_i - X_{i+1}) dP \geqslant 0,$$

即$\int_A X_\eta dP \leqslant \int_A X_\tau dP$. 对一般情形的$\tau \leqslant \eta$，令$\tau_j = \eta \wedge (\tau + j), j = 1, 2, \cdots, n$. 则每个$\tau_j$为停时，且$\tau \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \cdots \leqslant \tau_n = \eta$，$\tau_1 - \tau \leqslant 1$，$\tau_{j+1} - \tau_j \leqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant n-1$，$\forall A \in \mathscr{F}_\tau$，对一切$j$，$1 \leqslant j \leqslant n$，则$A \in \mathscr{F}_{\tau_j}$，由前一步证明得

$$\int_A X_\eta dP \leqslant \int_A X_{\tau_{n-1}} dP \leqslant \cdots \leqslant \int_A X_{\tau_1} dP \leqslant \int_A X_\tau dP.$$

但 X_τ 是 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的，故

$$E(X_\eta | \mathscr{F}_\tau) \leqslant X_\tau.$$

定理 3.3 （一般停时的 Doob 停时定理） 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是一致可积的鞅（相应地，上鞅），则对任何一对 $\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$ 停时 $\tau, \eta, \tau \leqslant \eta$，均有 X_τ 与 X_η 可积且 $E(X_\eta | \mathscr{F}_\tau) = X_\tau$（相应地，$E(X_\eta | \mathscr{F}_\tau) \leqslant X_\tau$），其中 $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$.

证 设 X 为鞅，由定理 1.10 知 $\overline{X} = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in \overline{N}\}$ 仍为鞅，而 $X_\tau = \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n I_{\{\tau=n\}} + X_\infty I_{\{\tau=\infty\}}$，显然，$X_\tau$ 是 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的，由 $\overline{X}$ 为鞅知 $\{|X_n|, \mathscr{F}_n, n \in \overline{N}\}$ 为下鞅，从而

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |X_\tau| dP &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{\tau=n\}} |X_n| dP + \int_{\{\tau=\infty\}} |X_\infty| dP \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{\tau=n\}} |X_\infty| dP + \int_{\{\tau=\infty\}} |X_\infty| dP \\
&= \int_\Omega |X_\infty| dP < \infty,
\end{aligned}$$

即 X_τ 是可积的. 又对任意 $A \in \mathscr{F}_\tau$，有

$$\begin{aligned}
\int_A X_\tau dP &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A\cap\{\tau=n\}} X_n dP + \int_{A\cap\{\tau=\infty\}} X_\infty dP \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A\cap\{\tau=n\}} X_\infty dP + \int_{A\cap\{\tau=\infty\}} X_\infty dP \\
&= \int_A X_\infty dP,
\end{aligned}$$

故 $E(X_\infty | \mathscr{F}_\tau) = X_\tau$. 类似可以证明 X_η 可积，$E(X_\infty | \mathscr{F}_\eta) = X_\eta$. 又因 $\tau \leqslant \eta$，于是 $\mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}_\eta$. 再由条件期望的性质得

$$E(X_\eta | \mathscr{F}_\tau) = E(E(X_\infty | \mathscr{F}_\eta) | \mathscr{F}_\tau)$$

$$E(X_\infty | \mathscr{F}_\tau)$$
$$= X_\tau.$$

设X为上鞅，由定理1.11知$\overline{X} = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in \overline{N}\}$仍为上鞅.

令$Y_n = E(X_\infty | \mathscr{F}_n), Z_n = X_n - Y_n, n = 0,1,2,\cdots, Y_\infty = X_\infty, Z_\infty = 0$，则

$$\overline{Y} = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in \overline{N}\} \text{ 为鞅},$$
$$\overline{Z} = \{Z_n, \mathscr{F}_n, n \in \overline{N}\} \text{ 为非负上鞅}.$$

令$\tau_n = \tau I_{\{\tau \leqslant n\}} + (n+1) I_{\{\tau > n\}}, n \geqslant 0$，则$\tau_n$是有界停时$(n \geqslant 0)$.

由定理 3.2 知

$$E(Z_{\tau_n} | \mathscr{F}_0) \leqslant Z_0,$$

于是$EZ_{\tau_n} \leqslant EZ_0$. 又因为

$$Z_{\tau_n} = \sum_{i=0}^{n} Z_i I_{\{\tau = i\}} + Z_{n+1} I_{\{\tau > n\}}$$
$$\geqslant \sum_{i=0}^{n} Z_i I_{\{\tau = i\}},$$

而 $\quad Z_\tau = Z_\tau I_{\{\tau < \infty\}} = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=0}^{n} Z_i I_{\{\tau = i\}},$

由单调收敛定理得

$$EZ_\tau = \lim_{n \to \infty} E\left(\sum_{i=0}^{n} Z_i I_{\{\tau = i\}}\right)$$
$$= EZ_0 < \infty,$$

故Z_τ可积. 同理可证Z_η可积，由第一步证明知Y_τ可积，由$X_\tau = Y_\tau + Z_\tau$知X_τ可积，类似可证X_η可积. 再令

$$\eta_n = \eta I_{\{\eta \leqslant n\}} + (n-1) I_{\{\eta > n\}}, (n \geqslant 0),$$

则η_n亦为有界停时，由$\tau \leqslant \eta$知$\tau_n \leqslant \eta_n, (n \geqslant 0)$，故$\mathscr{F}_{\tau_n} \subset \mathscr{F}_{\eta_n} (n \geqslant 0)$. 由定理 3.2 得

$$E(Z_{\eta_n} | \mathscr{F}_{\tau_n}) \leqslant Z_{\tau_n}, \ (n \geqslant 0),$$

于是，

$$Z_\tau I_{\{\tau = \tau_n\}} \geqslant E(Z_{\eta_n} | \mathscr{F}_{\tau_n}) I_{\{\tau = \tau_n\}}$$

$$= E(Z_{\eta_n}|\mathscr{F}_\tau)I_{\{\tau=\tau_n\}}$$

$$\geqslant E(\sum_{i=0}^{n} Z_i I_{\{\eta=i\}}|\mathscr{F}_\tau)I_{\{\tau=\tau_n\}}.$$

注意到 $\{\tau=\tau_n\}\uparrow\Omega$ 及 $Z_\eta = Z_\eta I_{\{\eta<\infty\}} = \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=0}^{n} Z_i I_{\{\eta=i\}})$，在上式中，令 $n\to\infty$，用条件期望的单调收敛定理得

$$Z_\tau \geqslant E(Z_\eta|\mathscr{F}_\tau).$$

对于鞅 Y，由前面证明有

$$E(Y_\eta|\mathscr{F}_\tau) = Y_\tau,$$

这样，

$$X_\tau = Y_\tau + Z_\tau \geqslant E(Y_\eta|\mathscr{F}_\tau) + E(Z_\eta|\mathscr{F}_\tau)$$
$$= E((Y_\eta + Z_\eta)|\mathscr{F}_\tau) = E(X_\eta|\mathscr{F}_\tau).$$

推论 3.4 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是一致可积的鞅(相应地，上鞅)，$\{\tau_n,n\in N\}$ 为 $\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 停时列且 $\tau_0\leqslant\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\cdots$，则 $\{X_{\tau_n},\mathscr{F}_{\tau_n},n\in N\}$ 是鞅(相应地，上鞅).

定理 3.5 (非一致可积条件下的 Doob 停时定理) 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为鞅(相应地，上鞅).

(1) 若 τ 为 $a.e.$ 有限停时且满足

(a) $E|X_\tau|<\infty$

(b) $\liminf\limits_{n\to\infty}\int_{\{\tau>n\}}|X_n|dP=0$,

则对每一 $n\in N$，有 $E(X_\tau|\mathscr{F}_n)=X_n$，$a.e.$ 在 $\{\tau=n\}$ 上(相应地，$E(X_\tau|\mathscr{F}_n\geqslant X_n$，$a.e.$ 在 $\{\tau\geqslant n\}$ 上) 且 $EX_\tau=EX_0$(相应地，$EX_\tau\leqslant EX_0$).

(2) 若 $\{\tau_n,n\in N\}$ 为 $a.e.$ 有限的单调上升的停时列且满足：对每一 $m\in N$，有

(a) $E|X_{\tau_m}|<\infty$

(b) $\liminf\limits_{n\to\infty}\int_{\{\tau_m>n\}}|X_n|dP=0$,

则 $\{X_{\tau_n}, \mathscr{F}_{\tau_n}, n \in N\}$ 为鞅(相应地,上鞅).

证 (1) 只须证明 $\forall n \in N, \forall A \in \mathscr{F}_n$,有

$$\int_{A\cap\{\tau\geqslant n\}} X_\tau dP \underset{\left(\substack{\text{相应地}\\ \leqslant}\right)}{=} \int_{A\cap\{\tau\geqslant n\}} X_n dP$$

事实上,

$$\int_{A\cap\{\tau\geqslant n\}} X_n dP = \int_{A\cap\{\tau=n\}} X_n dP + \int_{A\cap\{\tau>n\}} X_n dP$$

$$\underset{\left(\substack{\text{相应地}\\ \geqslant}\right)}{=} \int_{A\cap\{\tau=n\}} X_n dP + \int_{A\cap\{\tau>n\}} E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) dP$$

$$= \int_{A\cap\{\tau=n\}} X_n dP + \int_{A\cap\{\tau>n\}} X_{n+1} dP,$$

于是

$$\int_{A\cap\{\tau\geqslant n\}} X dP \underset{\left(\substack{\text{相应地}\\ \geqslant}\right)}{=} \int_{A\cap\{n\leqslant\tau<m\}} X_\tau dP + \int_{A\cap\{\tau\geqslant m\}} X_m dP$$

在上式中,令 $m \to \infty$ 得

$$\int_{A\cap\{\tau\geqslant n\}} X_n dP \underset{\left(\substack{\text{相应地}\\ \geqslant}\right)}{=} \int_{A\cap\{\tau\geqslant n\}} X_\tau dP.$$

令 $n=0, A=\Omega$,由上式立即得 $EX_\tau = EX_0$(相应地,$EX_\tau \leqslant EX_0$).

(2) 由于 X_{τ_n} 是 $\mathscr{F}_{\tau_n}$ 可测的($n \geqslant 0$),只要证明

$$E(X_{\tau_{n-1}}|\mathscr{F}_{\tau_n}) = X_{\tau_n}, n \geqslant 0.$$

(相应地,$E(X_{\tau_{n-1}}|\mathscr{F}_{\tau_n}) \leqslant X_{\tau_n}, n \geqslant 0$),事实上,令 $B \in \mathscr{F}_{\tau_n}$,对每一 $m \geqslant 0$,记 $B_m = B \cap \{\tau_n = m\}$,则 $B_m \in \mathscr{F}_m$,且在 B_m 上有 $\tau_{n-1} \geqslant m$, a.e.,由(1)得

$$\int_{B_m} X_{\tau_n} dP = \int_{B_m} X_m dP$$

$$\underset{\left(\substack{\text{相应地}\\ \geqslant}\right)}{=} \int_{B_m} E(X_{\tau_{n-1}}|\mathscr{F}_m) dP$$

$$= \int_{B_m} X_{\tau_{n+1}} dP,$$

从而，

$$\int_B X_{\tau_n} dP = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{B_m} X_{\tau_n} dP$$

$$\underset{\left(\substack{\text{相应地} \\ \geqslant}\right)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{B_m} X_{\tau_{n+1}} dP$$

$$= \int_B X_{\tau_{n+1}} dP,$$

于是，

$$E(X_{\tau_{n+1}} | \mathscr{F}_{\tau_n}) = X_{\tau_n}, n \geqslant 0.$$

相应地，$E(X_{\tau_{n+1}} | \mathscr{F}_{\tau_n}) \leqslant X_{\tau_n}, n \geqslant 0.$）

注　设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为下鞅，若 $a.e.$ 有限停时 τ 满足：

(a) $E|X_\tau| < \infty$，

(b) $\liminf\limits_{n \to \infty} \int_{\{\tau > n\}} |X_n| dP = 0$，

则对每一 $n \in N$，在 $\{\tau \geqslant n\}$ 上，$a.e.$ 有

$$E(X_\tau | \mathscr{F}_n) \geqslant X_n,$$

特别有

$$E(X_\tau | \mathscr{F}_0) \geqslant X_0,$$

从而　$EX_\tau \geqslant EX_0$.

其证明类似于定理 3.5　请读者自己完成

推论 3.6　设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为鞅(相应地，上鞅)，若停时 τ 满足

(1) $E\tau < \infty$，

(2) 对每一 $n \geqslant 0$，在 $\{\tau \geqslant n\}$ 上，有

$$E(|X_{n+1} - X_n| | \mathscr{F}_n) \leqslant c < \infty \ (c \text{ 为常数})，$$

则对每一 $n \in N$，在 $\{\tau \geqslant n\}$ 上，有

$$E(|X_\tau| \mid \mathscr{F}_n) = X_n, \ a.e.$$

（相应地，$E(X_\tau \mid \mathscr{F}_n) \leqslant X_n$, $a.e.$ ）

及 $$EX_\tau = EX_0.$$

（相应地，$EX_\tau \leqslant EX_0$. ）

证 只须证在推论的条件下定理 3.5 中(1)的条件成立，事实上，由 $E\tau < \infty$ 知 τ 是 $a.e.$ 有限的. 令 $X_{-1} = 0$. 则

$$\begin{aligned}
E|X_\tau| &\leqslant E\sum_{i=0}^{\tau} |X_i - X_{i-1}| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} \int_{\{\tau=n\}} |X_i - X_{i-1}| dP \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty} \int_{\{\tau=n\}} |X_i - X_{i-1}| dP \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\{\tau\geqslant i\}} |X_i - X_{i-1}| dP \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\{\tau\geqslant i\}} E(|X_i - X_{i-1}| \mid \mathscr{F}_{i-1}) dP \\
&\leqslant c\sum_{i=0}^{\infty} P(\tau \geqslant i) = cE\tau < \infty.
\end{aligned}$$

由上面证明还知 $\sum_{i=0}^{\tau} |X_i - X_{i-1}|$ 是可积的，注意到 $\{\tau > n\} \downarrow \varnothing (n \to \infty)$. 由控制收敛定理得

$$\begin{aligned}
\int_{\{\tau>n\}} |X_n| dP &\leqslant \int_{\{\tau>n\}} \sum_{i=0}^{\tau} |X_i - X_{i-1}| \\
&= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=0}^{\tau} |X_i - X_{i-1}|\right) I_{\{\tau>n\}} dP \\
&\longrightarrow 0 \ (n \to \infty).
\end{aligned}$$

即定理 3.5 中(1)的条件全部满足，故推论成立.

定理 3.7 （Wald 方程） 设$\{D_n, n \geqslant 0\}$是相互独立同分布的随机变量序列且$ED_n = \mu$. 令

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} (D_i - \mu), n \geqslant 0, \mathscr{F}_n = \sigma(D_0, D_1, \cdots, D_n), n \geqslant 0.$$

若τ是$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$停时且$E\tau < \infty$,则$EX_\tau$存在且

$$E\sum_{i=0}^{\tau} D_i = \mu E\tau.$$

证 显然$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$是鞅,且

$$E(|X_{n+1} - X_n| \,|\, \mathscr{F}_n) = E(|D_{n+1} - \mu| \,|\, \mathscr{F}_n)$$

$$= E|D_{n+1} - \mu| = c < \infty.$$

由推论 3.6 得

$$EX_\tau = EX_0 = 0$$

但

$$X_\tau = \sum_{i=0}^{\tau} (D_i - \mu)$$

$$= (D_0 - \mu) I_{(\tau=0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (D_i - \mu) I_{(\tau=n)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} D_i I_{(\tau=n)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \mu I_{(\tau=n)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} D_i - \mu \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} I_{(\tau=n)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} D_i - \mu \sum_{i=0}^{\infty} I_{(\tau \geqslant i)},$$

从而, $E\sum_{i=0}^{\tau} D_i = \mu E\tau.$

定理 3.8 （Wald 基本等式） 设$\{D_n, n \in N\}$为独立同分布的随机变量序列,令$X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i, n \geqslant 0$,假定对某实数$t \neq 0$, $M(t) = Ee^{tD_0}$存在且$M(t) \geqslant 1$. $\mathscr{F}_n = \sigma(D_0, D_1, \cdots, D_n), n \geqslant 0$. τ为

$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$ 停时，若在 $\{\tau \geqslant n\}$ 上有 $|X_n| < c$(常数) $a.e.$ 且 $E\tau < \infty$，则

$$E(e^{tX_\tau}/(M(t))^{\tau-1}) = 1.$$

证 令 $Z_n = e^{tX_n}/(M(t))^{n-1}$, $n \geqslant 0$. 则 $\{Z_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为鞅且 $EX_0 = 1$，事实上，Z_n 为 $\mathscr{F}_n$ 可测是显然的，由于 $Ee^{tD_0} = M(t)$ 存在，故 Z_n 是可积的，且

$$\begin{aligned}E(Z_{n-1}|\mathscr{F}_n) &= E(e^{tX_{n-1}}/(M(t))^{n-2}|\mathscr{F}_n) \\ &= \frac{e^{tX_n}}{(M(t))^{n-2}}E(e^{tD_{n+1}}|\mathscr{F}_n) \\ &= \frac{e^{tX_n}}{(M(t))^{n-2}} \cdot M(t) = \frac{e^{tX_n}}{(M(t))^{n-1}} = Z_n,\end{aligned}$$

这就证明了 $\{Z_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为鞅

因为对 $n \geqslant 0$，有

$$\begin{aligned}E(|Z_{n-1} - Z_n||\mathscr{F}_n) &= Z_nE\left(\left|\frac{e^{tD_{n-1}}}{M(t)} - 1\right|\middle|\mathscr{F}_n\right) \\ &= Z_nE\left(\left|\frac{e^{tD_{n-1}}}{M(t)} - 1\right|\right) = Z_nE\left(\left|\frac{e^{tD_0}}{M(t)} - 1\right|\right).\end{aligned}$$

由于在 $\{\tau \geqslant n\}$ 上 $|X_n| \leqslant c\ a.e.$，再由 Z_n 的定义知存在常数 $\alpha > 0$，使得在 $\{\tau \geqslant n\}$ 上有

$$E(|Z_{n+1} - Z_n||\mathscr{F}_n) \leqslant \alpha < \infty.$$

用推论 3.6 有

$$EZ_\tau = EZ_0 = 1.$$

这就证明了定理成立.

定理 3.9 设 $X = \{X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为非负下鞅，$\{\psi_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为 $a.e.$ 非负非增的可积的可预报序列，对每一 $n \geqslant 0$, $E\psi_n|D_n| < \infty$，设 τ 是 $\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$ 停时，则

$$\int_{\{\tau<\infty\}} \psi_\tau X_\tau dP \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} E(\psi_k E(D_k|\mathscr{F}_{k-1})).$$

证 令

$$Z_n = \psi_n X_n - \sum_{k=0}^{n} \psi_k E(D_k | \mathscr{F}_{k-1})$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} (\psi_{k-1} - \psi_k) X_{k-1},$$

其中 $X_{-1} = 0, \psi_{-1} = \psi_0$. 显然,$Z_n$ 可积且 $\mathscr{F}_n$ 可测. 又因为

$$Z_n - Z_{n-1} = \psi_n(D_n - E(D_n | \mathscr{F}_{n-1})),$$

于是

$$E(Z_n | \mathscr{F}_{n-1}) = Z_{n-1}.$$

这就证明了$\{Z_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为鞅.

如果存在 $n_0, 0 < n_0 < \infty$,使得$P(\tau \leqslant n_0) = 1$,由定理 3.5 得

$$EZ_\tau = EZ_0 = 0.$$

因此,

$$E\psi_\tau X_\tau = E(\sum_{k=0}^{\tau} \psi_k E(D_k | \mathscr{F}_{k-1}) - (\sum_{k=0}^{\tau} (\psi_{k-1} - \psi_k) X_{k-1}$$

$$\leqslant E(\sum_{k=0}^{n_0} \psi_k E(D_k | \mathscr{F}_{k-1}))$$

在一般情形,令 $\tau_0 = \min(\tau, n_0)$,则 τ_0 为停时,且 $P(\tau_0 \leqslant n_0) = 1$. 于是由上面的证明知

$$E\psi_{\tau_0} X_{\tau_0} \leqslant E(\sum_{k=0}^{n_0} \psi_k E(D_k | \mathscr{F}_{k-1}))$$

于是,

$$\int_{\{\tau < \infty\}} \psi_\tau X_\tau dP = \lim_{n_0 \to \infty} \int_{\{\tau \leqslant n_0\}} \psi_{\tau_0} X_{\tau_0} dP$$

$$\leqslant E(\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k E(D_k | \mathscr{F}_{k-1})) = \sum_{k=0}^{\infty} E(\psi_k E(D_k | \mathscr{F}_{k-1})).$$

推论 3.10 (Chow 不等式) 设$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为下鞅,$\{c_n, n \in N\}$ 为正的非增的实数列,则对每一 $\varepsilon > 0$,有

$$P(\max_{0 \leqslant k \leqslant n} c_k X_k \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon^{-1}[c_0 EX_0^+ + \sum_{k=1}^{n} c_k E(X_k^+ - X_{k-1}^+)].$$

证 令 $\tau = \inf\{n \geqslant 0 : c_n X_n^- \geqslant \varepsilon\}$，$\inf\varnothing = \infty$，则 τ 是 $\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$ 停时，注意到

$$\varepsilon P(\max_{0 \leqslant k \leqslant n} c_k X_k^- \geqslant \varepsilon) \leqslant \int_{\{\max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} c_k X_k^- \geqslant \varepsilon\}} c_\tau X_\tau^- dP$$

$$= \int_{\{\tau \leqslant n\}} c_\tau X_\tau^- dP.$$

由于 X 为下鞅，故 $\{X_n^-, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为非负下鞅，记 $D_n = X_n^- - X_{n-1}^-$，$n \geqslant 0$. 令 $\tau_n = \tau \wedge n$，则由定理 3.9 的证明知

$$\int_{\{\tau \leqslant n\}} c_\tau X_\tau^- dP = E c_\tau X_\tau^- I_{\{\tau \leqslant n\}}$$

$$= E c_{\tau_n} X_{\tau_n}^- I_{\{\tau \leqslant n\}} \leqslant E C_{\tau_n} X_{\tau_n}^-$$

$$\leqslant E(\sum_{k=0}^{n} c_k E(D_k | \mathscr{F}_{k-1}))$$

$$= c_0 E X_0^- + \sum_{k=1}^{n} c_k E(X_k^- - X_{k-1}^-).$$

这就证明了推论 3.10 成立.

推论 3.11 （Hàjek − Rènyi 不等式）设 $\{X_n, n \in N\}$ 为独立随机变量序列，$EX_n = 0$，$EX_n^2 < \infty$ $(n \geqslant 0)$，$\{c_n, n \in N\}$ 为正的非增实数序列，则对每一 $\varepsilon > 0$，有

$$P(\max_{0 \leqslant k \leqslant n} c_k |S_k| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon^{-2} \sum_{k=0}^{n} c_k^2 E X_k^2,$$

其中 $S_k = \sum_{k=0}^{n} X_k, n = 0, 1, 2, \cdots$.

证 令 $\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)$，$n \geqslant 0$，显然，$\{S_n^2, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为非负下鞅，再用推论 3.10 得

$$P(\max_{0 \leqslant k \leqslant n} c_k |S_k| \geqslant \varepsilon)$$

$$= P(\max_{0 \leqslant k \leqslant n} c_k^2 |S_k^2| \geqslant \varepsilon^2)$$

$$\leqslant \varepsilon^{-2}[c_0^2 E X_0^2 + \sum_{k=1}^{n} C_k^2 E(S_k^2 - S_{k-1}^2)]$$

$$=\varepsilon^{-2}\sum_{k=0}^{n}C_k^2EX_k^2.$$

注　令 $c_n=1, n\geqslant 0$，则由此推论立即得到Kolmogorov不等式.

§4　鞅与下鞅的收敛集合

本节讨论随机变量序列的收敛集合. 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是可积适应序列，集合 $\{\omega:\lim\limits_{n\to\infty}X_n^{(\omega)}$ 存在且有限$\}$ 用 $\{X_n\to\}$ 表示，设 $A,B\in\mathscr{F}$，若 $P(A\triangle B)=0$，则称 A,B $a.e.$ 相等，记为 $A=B$ $a.e.$. 以后，$a.e.$ 相等集合常省去 $a.e.$ 记号，简记为 $A=B$，对 $a>0$，令

$$\tau_a=\inf\{n\geqslant 0:X_n>a\},\ \inf\varnothing=\infty,$$

则 τ_a 是 $\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 停时. 令 $D_n=X_n-X_{n-1}, D^*=\sup\limits_{n\geqslant 0}|D_n|$. 称可积适应序列 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 属于弱 C^- 类（记为 $X\in C_W^-$），如果

$$ED_{\tau_a}^-I_{\{\tau_a<\infty\}}<\infty,\forall\ a>0.$$

显然，如果 $ED^*<\infty$，则 $X\in C_W^-$. 特别，若对每一 $n\geqslant 0$，$|D_n|\leqslant c<\infty$ $a.e.$（其中 c 为常数），则 $X\in C_W^-$.

定理 4.1　设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是下鞅，若 $X\in C_W^-$，则

$$\{\sup_{n\geqslant 0}X_n<\infty\}=\{X_n\to\}.$$

证　显然 $\{X_n\to\}\subset\{\sup\limits_{n\geqslant 0}X_n<\infty\}$. 下面证明相反的包含关系成立. 由于 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为下鞅，由定理 3.1 知 $X^{\tau_a}=\{X_{\tau_a\wedge n},\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 亦为下鞅. 又由 $X\in C_W^-$，故有

$$\begin{aligned}\sup_{n\geqslant 0}EX_{\tau_a\wedge n}^-&\leqslant a+E(X_{\tau_a}^-I_{\{\tau_a<\infty\}})\\&\leqslant 2a+E(D_{\tau_a}^-I_{\{\tau_a<\infty\}})\\&<\infty.\end{aligned}$$

对每一$n \in N$，$E|X_{\tau_a \wedge n}| = 2EX^+_{\tau_a \wedge n} - EX_{\tau_a \wedge n}$，

于是，$\sup\limits_{n \geqslant 0} E|X_{\tau_a \wedge n}| \leqslant 2\sup\limits_{n \geqslant 0} EX^+_{\tau_a \wedge n} - EX_0 < \infty$.

由定理1.8知$\{X_{\tau_a \wedge n}, n \in N\}$ $a.e.$ 收敛，从而有

$$\{\tau_a = \infty\} \subset \{X_n \to\}.$$

但 $\bigcup\limits_{a>0} \{\tau_a = \infty\} = \{\sup\limits_{n \geqslant 0} X_n < \infty\}$，于是$\{\sup X_n < \infty\} \subset \{X_n \to\}$. 这就证明了定理成立.

推论 4.2 设$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$是鞅且$ED^* < \infty$，则有

(1) $\{X_n \to\} = \{\sup\limits_{n \geqslant 0} X_n < \infty\} = \{\inf\limits_{n \geqslant 0} X_n > -\infty\}$，

(2) $\{X_n \to\} \cup \{\underline{\lim}\limits_{n \to \infty} X_n = -\infty, \overline{\lim}\limits_{n \to \infty} X_n = \infty\} = \Omega$.

证 应用定理4.1于X及$-X = \{-X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$，则有

$$\{\overline{\lim_{n \to \infty}} X_n < \infty\} = \{\sup_{n \geqslant 0} X_n < \infty\} = \{X_n \to\}$$

$$\{\underline{\lim_{n \to \infty}} X_n > -\infty\} = \{\inf_{n \geqslant 0} X_n > -\infty\} = \{X_n \to\}$$

从而，(1)与(2)成立.

定理 4.3 设$X=\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$是下鞅，其Doob分解为

$$X_n = M_n + A_n, n \geqslant 0,$$

(1) 如果X是非负下鞅，则

$$\{A_\infty < \infty\} \subset \{X_n \to\} \subset \{\sup_{n \geqslant 0} X_n < \infty\};$$

(2) 如果$X \in C_W^-$，则

$$\{X_n \to\} = \{\sup_{n \geqslant 0} X_n < \infty\} \subset \{A_\infty < \infty\};$$

(3) 如果X是非负下鞅且$X \in C_W^-$，则

$$\{X_n \to\} = \{\sup_{n \geqslant 0} X_n < \infty\} = \{A_\infty < \infty\};$$

其中$A_\infty = \lim\limits_{n \to \infty} A_n$.

证 (1) $\{X_n \to\} \subset \{\sup\limits_{n \geqslant 0} X_n < \infty\}$为显然. 下面证明第一个包含关系式成立. 令

$$\sigma_a = \inf\{n \geqslant 0; A_{n-1} > a\}, a > 0,$$

约定 $\inf\varnothing = \infty$，则 σ_a 为停时，且 $A_{\sigma_a} \leqslant a$. 又因

$$X_{\sigma_a \wedge n} = M_{\sigma_a \wedge n} + A_{\sigma_a \wedge n},$$

所以

$$\begin{aligned} EX_{\sigma_a \wedge n} &= EM_{\sigma_a \wedge n} + EA_{\sigma_a \wedge n} \\ &= EM_0 + EA_{\sigma_a \wedge n} \\ &\leqslant EX_0 + a, \end{aligned}$$

而 $X^{\sigma_a} = \{X_{\sigma_a \wedge n}, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为非负下鞅且

$$\sup_{n \geqslant 0} EX_{\sigma_a \wedge n} \leqslant EX_0 + a < \infty,$$

由定理 1.8 知

$$\{A_\infty \leqslant a\} = \{\sigma_a = \infty\} \subset \{X_n \to\}.$$

因此，

$$\{A_\infty < a\} = \bigcup_{a>0} \{A_\infty \leqslant a\} \subset \{X_n \to\}.$$

(2) 由定理 4.1 立即知第一个等式成立. 下面证明第二个包含关系式成立. 由于对任意 $a > 0$，有

$$X_{\tau_a \wedge n} = M_{\tau_a \wedge n} + A_{\tau_a \wedge n}, \forall\, n \geqslant 0,$$

所以

$$\begin{aligned} EA_{\tau_a \wedge n} &= EX_{\tau_a \wedge n} + EM_{\tau_a \wedge n} \\ &= EX^{-}_{\tau_a \wedge n} - EX_0 \\ &\leqslant 2a + ED^{+}_{\tau_a} I_{(\tau_a < \infty)} - EX_0. \end{aligned}$$

因此，由法都引理有

$$EA_{\tau_a} = E\lim_n A_{\tau_a \wedge n} \leqslant \lim_n \inf EA_{\tau_a \wedge n} < \infty,$$

从而

$$\{\tau_a = \infty\} \subset \{A_\infty < \infty\},$$

又因 $\bigcup_{a>0} \{\tau_a = \infty\} = \{\sup_{n \geqslant 0} X_n < \infty\}$，所以有

$$\{\sup_{n \geqslant 0} X_n < \infty\} \subset \{A_\infty < \infty\}.$$

(3) 由(1)与(2)立即得(3).

推论 4.4 设 $D = \{D_i, \mathscr{F}_i, i \in N\}$ 是非负可积适应序列，令

$X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i$，则有

$$\{\sum_{n=0}^{\infty} E(D_n | \mathscr{F}_{n-1}) < \infty\} \subset \{X_n \to\}.$$

更设 $ED^* < \infty$，则有

$$\{\sum_{n=0}^{\infty} E(D_n | \mathscr{F}_{n-1}) < \infty\} = \{X_n \to\}.$$

证　显然$\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为非负下鞅，它的Doob分解中的非负增可预报序列为

$$A_0 = 0, A_n = \sum_{i=0}^{n} E(D_i | \mathscr{F}_{i-1}), n \geq 1.$$

由定理 4.3 立即知推论 4.4 成立.

推论 4.5　(Borel－Cantelli－Lèvy 引理)　如果 $B_n \in \mathscr{F}_n$，$n \geq 0$，令 $D_n = I_{B_n}$，则

$$\{\sum_{n=0}^{\infty} P(B_n | \mathscr{F}_{n-1}) < \infty\} = \{\sum_{n=0}^{\infty} I_{B_n} < \infty\}.$$

定理 4.6　设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是平方可积鞅，则

$$\{\sum_{n=1}^{\infty} E(D_n^2 | \mathscr{F}_{n-1}) < \infty\} \subset \{X_n \to\}.$$

若更设 $E(\sup_{n \geq 0} D_n^2) < \infty$，则

$$\{\sum_{n=1}^{\infty} E(D_n^2 | \mathscr{F}_{n-1}) < \infty\} = \{X_n \to\}.$$

证　由于 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是平方可积鞅，则 $X^2 \triangleq \{X_n^2, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 与$(X+1)^2 \triangleq \{(X_n+1)^2, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 均为下鞅，令它们的 Foob 分解分别为

$$X_n^2 = M'_n + A'_n \quad 及 (X_n+1)^2 = M''_n + A''_n.$$

则 A'_n 与 A''_n 是相同的. 这是因为

$$A'_n = \sum_{i=0}^{n-1} (E(X_{i+1}^2 | \mathscr{F}_i) - X_i^2)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} E((X_{i+1} - X_i)^2 | \mathscr{F}_i) = \sum_{i=0}^{n-1} E(D_{i+1}^2 | \mathscr{F}_i),$$

$$A''_n = \sum_{i=0}^{n-1} (E((X_{i+1} + 1)^2 | \mathscr{F}_i) - (X_i + 1)^2)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} E([(X_{i+1} + 1) - (X_i + 1)]^2 | \mathscr{F}_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} E(D_{i+1}^2 | \mathscr{F}_i).$$

由定理 4.3 的(1) 得

$$\{\sum_{n=1}^{\infty} E(D_n^2 | \mathscr{F}_{n-1})\} < \infty = \{A'_\infty < \infty\}$$

$$\subset \{X_n^2 \to\} \cap \{(X_n + 1)^2 \to\} = \{X_n \to\}.$$

下面证明在条件 $E(\sup_{n \geqslant 0} D_n^2) < \infty$ 下，$X^2 \in C_W^+$.

令 $\tau_a = \inf\{n \geqslant 0 : X_n^2 > a\}, a > 0, \inf\varnothing = \infty$. 则 τ_a 是停时，在集合 $\{\tau_a < \infty\}$ 上有

$$|X_{\tau_a}^2 - X_{\tau_a - 1}^2| \leqslant |X_{\tau_a} - X_{\tau_a - 1}|^2 + 2|X_{\tau_a - 1}||X_{\tau_a} - X_{\tau_a - 1}|$$

$$\leqslant D_{\tau_a}^2 + 2a^{\frac{1}{2}}|D_{\tau_a}|,$$

由上式及 Schwarz 不等式得

$$E|X_{\tau_a}^2 - X_{\tau_a - 1}^2| I_{\{\tau_a < \infty\}}$$

$$\leqslant ED_{\tau_a}^2 I_{\{\tau_a < \infty\}} + 2a^{\frac{1}{2}} \sqrt{ED_{\tau_a}^2 I_{\{\tau_a < \infty\}}}$$

$$\leqslant E\left(\sup_{n \geqslant 0} D_n^2 + 2a^{\frac{1}{2}} \sqrt{E(\sup_{n \geqslant 0} D_n^2)}\right) < \infty.$$

更有

$$E(X_{\tau_a}^2 - X_{\tau_a - 1}^2)^- I_{\{\tau_a < \infty\}} < \infty,$$

即 $X^2 \in C_W^-$. 由定理 4.3 的(3) 得

$$\{X_n \to\} \subset \{X_n^2 \to\} = \{A'_\infty < \infty\}$$

$$= \{\sum_{n=1}^{\infty} E(D_n^2 | \mathscr{F}_{n-1}) < \infty\}$$

从而

$$\{\sum_{n=1}^{\infty}E(D_n^2|\mathscr{F}_{n-1})<\infty\}=\{X_n\rightarrow\}.$$

定理 4.7 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为下鞅，其 Doob 分解为 $X_n=M_n+A_n,n\geqslant 0$，若 $|D_n|\leqslant c$(常数)，$n\geqslant 0$，

则 (1) $\{\sum_{n=1}^{\infty}E((M_n-M_{n-1})^2|\mathscr{F}_{n-1})+A_\infty<\infty\}=\{X_n\rightarrow\}$，或等价地，

(2) $\{\sum_{n=1}^{\infty}E((D_n+D_n^2)|\mathscr{F}_{n-1})<\infty\}=\{X_n\rightarrow\}$.

证 先证(1)⇒(2). 由 Doob 分解得

$$M_0=X_0,M_n=X_0+\sum_{k=1}^{n}(X_k-E(X_k|\mathscr{F}_{k-1}))$$

$$=X_0+\sum_{k=1}^{n}(C_k-E(D_k|\mathscr{F}_{k-1})),$$

$$A_0=0,A_n=X_0+\sum_{k=1}^{n}(E(X_k|\mathscr{F}_{k-1})-X_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}E(D_k|\mathscr{F}_{k-1}),$$

于是

$$E((M_n-M_{n-1})^2|\mathscr{F}_{n-1})=E((D_n-E(D_n|\mathscr{F}_{n-1}))^2|\mathscr{F}_{n-1})$$
$$=E(D_n^2|\mathscr{F}_{n-1})-(E(D_n|\mathscr{F}_{n-1}))^2.$$

从而

$$“\sum_{n=1}^{\infty}E((D_n+D_n^2)|\mathscr{F}_{n-1})<\infty$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}E((M_n-M_{n-1})^2|\mathscr{F}_{n-1})+A_\infty<\infty.”$$

另一方面，若 $\sum_{n=1}^{\infty}E((M_n-M_{n-1})^2|\mathscr{F}_{n-1})+A_\infty<\infty$，

则有 $\sum_{n=1}^{\infty}E((M_n-M_{n-1})^2|\mathscr{F}_{n-1})<\infty$

及 $$\sum_{n=1}^{\infty} E(D_n|\mathscr{F}_{n-1}) = A_\infty < \infty,$$

从而 $$\sum_{n=1}^{\infty} (E(D_n|\mathscr{F}_{n-1}))^2 < \infty,$$

于是 $$\sum_{n=1}^{\infty} E(D_n^2|\mathscr{F}_{n-1}) < \infty,$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty} E((D_n + D_n^2|\mathscr{F}_{n-1}) < \infty.$$

这就证明了(1)与(2)是等价的.

其次,由 $|D_n| \leqslant c, \forall\, n \geqslant 0$ 知鞅 $M = \{M_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为平方可积鞅且 $D_n(M) \triangleq |M_n - M_{n-1}| \leqslant 2c$. 由定理 4.6 有

$$\{\sum_{n=1}^{\infty} E((M_n - M_{n-1})^2|\mathscr{F}_{n-1}) + A_\infty < \infty\} \subset \{X_n \to\}.$$

又由定理 4.3 的(2)有

$$\{X_n \to\} \subset \{A_\infty < \infty\},$$

因此,由定理 4.6 有

$$\begin{aligned}
\{X_n \to\} &= \{X_n \to\} \cap \{A_\infty < \infty\} \\
&= \{X_n \to\} \cap \{A_\infty < \infty\} \cap \{M_n \to\} \\
&= \{X_n \to\} \cap \{A_\infty < \infty\} \\
&\quad \cap \{\sum_{n=1}^{\infty} E((M_n - M_{n-1})^2|\mathscr{F}_{n-1}) < \infty\} \\
&= \{X_n \to\} \cap \{\sum_{n=1}^{\infty} E((M_n - M_{n-1})^2|\mathscr{F}_{n-1}) + A_\infty < \infty\} \\
&= \{\sum_{n=1}^{\infty} E((M_n - M_{n-1})^2|\mathscr{F}_{n-1}) + A_\infty < \infty\}.
\end{aligned}$$

对于一般的可积适应序列,有下面的条件三级数定理(见[8]定理 2.8.8):

定理 4.8 设 $D = \{D_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是可积适应序列,c 是正常数. 则 $\sum_{n=0}^{\infty} D_n$ 在由下列三条件确定的集合 A 上 $a.e.$ 收敛,

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} P(\{|D_n| \geqslant c\} | \mathscr{F}_{n-1}) < \infty$,

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} E(D_n I_{\{|D_n| \leqslant c\}} | \mathscr{F}_{n-1})$ 收敛,

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} (E(D_n^2 I_{\{|D_n| \leqslant c\}} | \mathscr{F}_{n-1}) - (E(D_n I_{\{|D_n| \leqslant c\}} | \mathscr{F}_{n-1}))^2)$
$< \infty$.

证　令 $X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i$. 由推论 4.5 及条件(2)得

$$A \cap \{X_n \to\} = A \cap \{(\sum_{i=0}^{n} D_i I_{\{|D_i| \leqslant c\}}) \to\}$$

$$= A \cap \{[\sum_{i=0}^{n} (D_i I_{\{|D_i| \leqslant c\}} - E(D_i I_{\{|D_i| \leqslant c\}} | \mathscr{F}_{i-1}))] \to\}.$$

令 $$Y_n = \sum_{i=0}^{n} (D_i I_{\{|D_i| \leqslant c\}} - E(D_i I_{\{|D_i| \leqslant c\}} | \mathscr{F}_{i-1})), n \geqslant 0.$$

显然 $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是平方可积鞅且

$$|Y_n - Y_{n-1}| \leqslant 2c, \forall n \geqslant 0 \ (Y_{-1} = 0).$$

由定理 4.6 得

$$A \subset \{\sum_{n=0}^{\infty} (E(D_n^2 I_{\{|D_n| \leqslant c\}} | \mathscr{F}_{n-1}) - (E(D_n I_{\{|D_n| \leqslant c\}} | \mathscr{F}_{n-1}))^2) < \infty\}$$

$$= \{\sum_{n=1}^{\infty} E((Y_n - Y_{n-1})^2 | \mathscr{F}_{n-1}) < \infty\} = \{Y_n \to\},$$

于是

$$A = A \cap \{Y_n \to\} = A \cap \{X_n \to\},$$

从而

$$A \subset \{X_n \to\}.$$

推论 4.9 (Y.S. Chow) 设 $D = \{D_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是鞅差序列. 若 $1 \leqslant p \leqslant 2$, 则在集合 $\{\sum_{i=0}^{\infty} E(|D_i|^p | \mathscr{F}_{i-1}) < \infty\}$ 上 $X_n =$

$\sum_{i=0}^{n} D_i$ $a.e.$ 收敛.

证 只须验证在集合 $\{\sum_{i=0}^{\infty} E(|D_i|^p|\mathscr{F}_{i-1})<\infty\}$ 上定理 4.8 中的条件(1)、(2)、(3) 成立. 固定 $c>0$,

(1) 对一切 $i\geqslant 0$, 则 $p\geqslant 1$ 得

$$P(\{|D_i|\geqslant c\}|\mathscr{F}_{i-1}) = E(I_{\{|D_i|\geqslant c\}}|\mathscr{F}_{i-1})$$

$$\leqslant c^{-p}E(|D_i|^p I_{\{|D_i|\geqslant c\}}|\mathscr{F}_{i-1})$$

$$\leqslant c^{-p}E(|D_i|^p|\mathscr{F}_{i-1})$$

从而在集合 $\{\sum_{i=0}^{\infty} E(|D_i|^p|\mathscr{F}_{i-1})<\infty\}$ 上有

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(\{|D_i|\geqslant c\}|\mathscr{F}_{i-1})<\infty.$$

(2) 由于 D 是鞅差序列及 $p\geqslant 1$, 故

$$\sum_{i=0}^{\infty} |E(D_i I_{\{|D_i|\leqslant c\}}|\mathscr{F}_{i-1})|/c$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} |E(D_i I_{\{|D_i|>c\}}|\mathscr{F}_{i-1})|/c$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{\infty} E(\frac{|D_i|}{c} I_{\{|D_i|>c\}}|\mathscr{F}_{i-1})$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{\infty} c^{-p}E(|D_i|^p|\mathscr{F}_{i-1})$$

于是在集合 $\{\sum_{i=0}^{\infty} E(|D_i|^p|\mathscr{F}_{i-1})<\infty\}$ 上有

$$\sum_{i=0}^{\infty} |E(D_i I_{\{|D_i|\leqslant c\}}|\mathscr{F}_{i-1})|<\infty,$$

更有 $\sum_{i=0}^{\infty} E(D_i I_{\{|D_i|\leqslant c\}}|\mathscr{F}_{i-1})$ 收敛.

(3) 由于 $p\leqslant 2$, 故

$$\sum_{i=0}^{\infty} E(D_i^2 I_{\{|D_i|\leqslant c\}}|\mathscr{F}_{i-1})/c^2$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{\infty} E(|D_i|^p|\mathscr{F}_{i-1})/c^p,$$

从而在集合$\{\sum_{i=0}^{\infty} E(|D_i|^p|\mathscr{F}_{i-1}) < \infty\}$上有

$$\sum_{i=0}^{\infty} (E(D_i^2 I_{(|D_i|\leqslant c)}|\mathscr{F}_{i-1}) - (E(D_i I_{(|D_i|\leqslant c)}|\mathscr{F}_{i-1}))^2)$$
$$< \infty,$$

于是，由定理 4.8 立即知推论 4.9 成立.

注 设$\{D_i,\mathscr{F}_i,i\in N\}$是可积适应序列，若$0<p<1$，则有

$$\{\sum_{i=0}^{\infty} E(|D_i|^p|\mathscr{F}_{i-1}) < \infty\} \subset \{X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i \rightarrow\}.$$

定理 4.10 (Y. S. Chow) 设$D=\{D_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是鞅差序列，$\{b_n,n\in N\}$是正常数序列且$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$，若$p\geqslant 2$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{1-\frac{p}{2}} E(|D_n|^p|\mathscr{F}_{n-1} < \infty\} \subset \{X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i \rightarrow\}.$$

证 当$p=2$时，由推论 4.9 知定理成立. 现设$p>2$，对每一$n\geqslant 0$，令

$$Y_n = [E(|D_n|^p|\mathscr{F}_{n-1})]^{\frac{2}{p}},$$

由于$Y_n > b_n \Leftrightarrow [E(|D_n|^p|\mathscr{F}_{n-1})]^{\frac{2}{p}-1} < b_n^{1-\frac{p}{2}}$，
于是

$$\begin{aligned} Y_n &= Y_n I_{(Y_n\leqslant b_n)} + Y_n I_{(Y_n>b_n)} \\ &\leqslant b_n + [E(|D_n|^p|\mathscr{F}_{n-1})]^{\frac{2}{p}-1} \cdot E(|D_n|^p|\mathscr{F}_{n-1}) \cdot I_{(Y_n>b_n)} \\ &\leqslant b_n + b_n^{1-\frac{p}{2}} E(|D_n|^p|\mathscr{F}_{n-1}), \end{aligned}$$

从而，由条件期望的 Jensen 不等式知

$$\{\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{1-\frac{p}{2}} E(|D_n|^p|\mathscr{F}_{n-1}) < \infty\}$$

$$\subset \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [E(|D_n|^p|\mathscr{F}_{n-1})]^{\frac{2}{p}} < \infty \right\}$$

$$\subset \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} E(|D_n^2|\mathscr{F}_{n-1}) < \infty \right\},$$

再用推论 4.9 知在 $p > 2$ 时本定理亦成立.

推论 4.11 设 $D = \{D_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是鞅差序列，若对 $\varepsilon > 0, p \geqslant 2$，有

$$E(|D_1|^p|\mathscr{F}_0) + \sum_{n=2}^{\infty} E(|D_n|^p|\mathscr{F}_{n-1})(n(\log n)^{1+\varepsilon})^{\frac{p}{2}-1} < \infty, a.e.,$$

则 $X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i \quad a.e.$ 收敛.

证 取 $b_0 = b_1 = 1, b_n = \dfrac{1}{n(\log n)^{1+\varepsilon}}, n \geqslant 2$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{1-\frac{p}{2}} E(|D_n|^p|\mathscr{F}_{n-1}) < \infty \ a.e.$，由定理 4.10 即知推论 4.11 成立.

§5 鞅 变 换

定义 5.1 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为概率空间，$\{\mathscr{F}_n, n = -1, 0, 1, \cdots\}$为 $\mathscr{F}$ 中的一序列单调上升的子 σ 代数，若 $V_n: \Omega \to R$ 是 $\mathscr{F}_{n-1}$ 可测的，$n = 0, 1, 2, \cdots$，则称 $V = \{V_n, n \geqslant 0\}$ 为$\{\mathscr{F}_n\}$可预报序列，通常取 $\mathscr{F}_{-1} = \mathscr{F}_0$ 或 $\mathscr{F}_{-1} = \{\varnothing, \Omega\}$. 若 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为可积适应序列，其差序列记为 $D_n = X_n - X_{n-1}, n \in N, X_{-1} = 0, V$ 为$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$ 可预报序列. 令 $Y_n = \sum_{k=0}^{n} V_k D_k, n \in N$. 称 $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为 X 关于 V 的变换，特别，当 X 为鞅时，简称 Y 为鞅变换.

定理 5.1 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为鞅（相应地，上鞅或下鞅），$V = \{V_n, n \in N\}$ 为$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$可预报序列（相应地，非负可

预报序列)，$Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是 X 关于 V 的变换且 Y_n 可积($n\in N$)，则 $Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为鞅(相应地，上鞅或下鞅)。

证 显然，$Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是可积适应序列，若 X 为鞅，则

$$E((Y_{n+1}-Y_n)|\mathscr{F}_n)=E(V_{n+1}D_{n+1}|\mathscr{F}_n)$$
$$=V_{n+1}E(D_{n+1}|\mathscr{F}_n)=0,\quad \forall\, n\in N.$$

故 Y 为鞅，若 X 为上鞅(或下鞅)，则

$$E((Y_{n+1}-Y_n)|\mathscr{F}_n)=E(V_{n+1}D_{n+1}|\mathscr{F}_n)$$
$$=V_{n+1}E(D_{n+1}|\mathscr{F}_n)\leqslant(\text{或}\geqslant)0,\quad \forall\, n\in N.$$

故 X 为上鞅(或下鞅)。

推论 5.2 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为鞅(相应地，上鞅(或下鞅))，τ 是 $\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 停时，则 $X^\tau=\{X_{\tau\wedge n},\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为鞅(相应地，上鞅(或下鞅))。

证 令 $V_n=I_{(\tau\geqslant n)}(n\geqslant 0)$，$D_n=X_n-X_{n-1}$，($n\geqslant 0$，$X_{-1}=0$，$\mathscr{F}_{-1}=\{\varnothing,\Omega\}$，则 $V=\{V_n,n\in N\}$ 为 $\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 非负可预报序列，且

$$Y_n=\sum_{k=0}^{n}V_kD_k=\sum_{k=0}^{n}D_kI_{(\tau\geqslant k)}=X_{\tau\wedge n},$$

显然 $\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为可积适应序列，用定理 5.1 立即知推论 5.2 成立。

推论 5.3 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为上鞅，S,T 是有界停时且满足 $S\leqslant T$，则 X_S,X_T 可积，且

$$E(X_T|\mathscr{F}_S)\leqslant X_S.$$

证 X_S,X_T 可积为显然，令 $V_n=I_{(S<n\leqslant T)}(n\geqslant 0)$，$\mathscr{F}_{-1}=\mathscr{F}_0$，则 $V=\{V_n,n\in N\}$ 是 $\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 可预报序列，设 $Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是 X 关于 V 的变换，显然 Y 是可积适应序列，由定理 5.1 知 Y 为上鞅. 设 k 是大于 $S\vee T$ 的整数(这种 k 总是存在的)，则

$$Y_k=X_T-X_S.$$

于是

$$0 = EY_0 \geqslant EY_k = E(X_T - X_S).$$

从而

$$EX_T \leqslant EX_S.$$

对任意 $A \in \mathscr{F}_S$,定义 S',T' 如下:

$$S' = SI_A + kI_{A^c},$$

$$T' = TI_A + kI_{A^c}.$$

显然,S',T' 为有界停时且 $S' \leqslant T'$,于是有

$$E((X_T - X_S)I_A) = E(X_{T'} - X_{S'}) \leqslant 0,$$

即
$$\int_A X_T dP \leqslant \int_A X_S dP, \ \forall\ A \in \mathscr{F}_S.$$

等价地,

$$E(X_T | \mathscr{F}_S) \leqslant X_S.$$

这给出了有界 Doob 停时定理的另一证明.

引理 5.4 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为鞅,τ 为$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$停时.则

$$E|X_\tau I_{\{\tau<\infty\}}| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} E|X_{\tau\wedge n}|$$
$$\leqslant \sup_n E|X_{\tau\wedge n}| \leqslant \sup_n E|X_n|.$$

证 由定理 3.1 知:第二个不等式与第三个不等式的成立均为显然,下面证第一个不等式成立.显然有 $X_{\tau\wedge n} I_{\{\tau<\infty\}} \to X_\tau I_{\{\tau<\infty\}}$ $a.e.$,由法都引理得

$$E|X_\tau I_{\{\tau<\infty\}}| = E \varliminf_{n\to\infty} |X_{\tau\wedge n} I_{\{\tau<\infty\}}|$$
$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty} E|X_{\tau\wedge n} I_{\{\tau<\infty\}}|$$
$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty} |X_{\tau\wedge n}|.$$

引理 5.5 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为 L^1 有界鞅,其差序列为 $D_n = X_n - X_{n-1} (n \geqslant 0, X_{-1} = 0)$,对 $k > 0$,令 $\tau = \inf\{n \geqslant 0 : |X_n| \geqslant k\}, \inf\varnothing = \infty$,则

$$E\sum_{i=0}^{\tau-1} D_i^2 + EX_{\tau-1}^2 = 2EX_\tau X_{\tau-1} \leqslant 2k\sup_n E|X_n|.$$

证 首先注意到 X 为 L^1 有界鞅，故存在可积随机变量 X_∞ 使得 $X_n \to X_\infty\ a.e.$，因此，X_τ 与 $X_{\tau-1}$ 均有定义且 $|X_{\tau-1}| \leqslant k$. 又 $X_{\tau\wedge n} \to X_\tau\ a.e.$，由法都引理得

$$\begin{aligned} E|X_\tau| &= E\varliminf_{n\to\infty}|X_{\tau\wedge n}| \\ &\leqslant \varliminf_{n\to\infty} E|X_{\tau\wedge n}| \\ &\leqslant \sup_n E|X_{\tau\wedge n}| \\ &\leqslant \sup_n E|X_n| \end{aligned}$$

因此

$$EX_\tau X_{\tau-1} \leqslant kEX_\tau \leqslant k\sup_n E|X_n|.$$

对每一固定的 $n \geqslant 0$，有

$$X_{n-1}^2 = \sum_{i=0}^{n-1} D_i^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1} X_{i-1}D_i,$$

于是

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} D_i^2 + X_{n-1}^2 &= 2X_{n-1}^2 + 2D_nX_{n-1} - 2\sum_{i=0}^{n} X_{i-1}D_i \\ &= 2X_nX_{n-1} - 2\sum_{i=0}^{n} X_{i-1}D_i. \end{aligned}$$

令 $\sigma = \tau \wedge n$，则有

$$\sum_{i=0}^{\sigma-1} D_i^2 + X_{\sigma-1}^2 = 2X_\sigma X_{\sigma-1} - 2\sum_{i=0}^{\sigma} X_{i-1}D_i,$$

由于 $X_{i-1}I_{(\tau\geqslant i)}$ 是 $\mathscr{F}_{i-1}$ 可测的且有界，又

$$E\sum_{i=0}^{\sigma} X_{i-1}D_i = \sum_{i=0}^{n} E(X_{i-1}I_{(\tau\geqslant i)}E(D_i|\mathscr{F}_{i-1})) = 0.$$

故

$$E\sum_{i=0}^{\sigma-1} D_i^2 + EX_{\sigma-1}^2 = 2EX_\sigma X_{\sigma-1} \qquad (5.1)$$

在 $\{\tau < \infty\}$ 上，$|X_\sigma X_{\sigma-1}| = |X_{\tau\wedge n}X_{(\tau\wedge n)-1}| \leqslant k|X_{\tau\wedge n}| \leqslant k^2 +$

$k|X_\tau|$，在 $\{\tau=\infty\}$ 上，$|X_\sigma X_{\sigma-1}|\leqslant k^2$，因此 $\sup\limits_n E|X_\sigma X_{\sigma-1}|\leqslant k^2+k|X_\tau|$ 是可积的，$\sup\limits_n X_{\sigma-1}^2\leqslant k^2$ 也是可积的，利用控制收敛定理及单调收敛定理，在(5.1)式中令 $n\to\infty$ 得

$$E\sum_{i=0}^{\tau-1}D_i^2+EX_{\tau-1}^2=2EX_\tau X_{\tau-1}.$$

定理 5.6 (Gundy 分解) 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为 L^1 有界鞅，对每一 $k>0$，X 可分解为

$$X_n=X_n^{(1)}+X_n^{(2)}+X_n^{(3)},n\geqslant 0,$$

其中 $\{X_n^{(i)},\mathscr{F}_n,n\in N\}$，$i=1,2,3$ 均为鞅且满足

(1) $\sup\limits_n E|X_n^{(1)}|<\infty$ 及 $P(\sup\limits_n E|X_n^{(1)}|>0)\leqslant\sup\limits_n E|X_n|/k$，

(2) $E\sum\limits_{n=0}^{\infty}|X_n^{(2)}-X_{n-1}^{(2)}|\leqslant 4\sup\limits_n E|X_n|$ $(X_{-1}^{(2)}=0)$，

(3) $\sup\limits_n E(X_n^{(3)})^2\leqslant 2k\sup\limits_n E|X_n|<\infty$.

证 对固定的 $k>0$，令

$$\tau=\inf\{n\geqslant 0:|X_n|\geqslant k\},\inf\varnothing=\infty.$$

记 $D_n=X_n-X_{n-1}$，$(n\geqslant 0,X_{-1}=0)$。则

$$D_i=D_iI_{\{\tau<i\}}+(D_iI_{\{\tau=i\}}-E(D_iI_{\{\tau=i\}}|\mathscr{F}_{i-1}))$$
$$+(D_iI_{\{\tau>i\}}-E(D_iI_{\{\tau>i\}}|\mathscr{F}_{i-1}))$$

令

$$X_n^{(1)}=\sum_{i=0}^{n}D_iI_{\{\tau<i\}},$$

$$X_n^{(2)}=\sum_{i=0}^{n}(D_iI_{\{\tau=i\}}-E(D_iI_{\{\tau=i\}}|\mathscr{F}_{i-1})),$$

$$X_n^{(3)}=\sum_{i=0}^{n}(D_iI_{\{\tau>i\}}-E(D_iI_{\{\tau>i\}}|\mathscr{F}_{i-1})),$$

$$(n\geqslant 0)$$

则 $\{X_n^{(i)},\mathscr{F}_n,n\in N\}$，$i=1,2,3$ 均为鞅且

$$X_n=X_n^{(1)}+X_n^{(2)}+X_n^{(3)},n\geqslant 0.$$

由引理 5.4 有

$$P(\sup_n |X_n^{(1)}| > 0) \leqslant P(\tau < \infty)$$
$$\leqslant P(|X_\tau| I_{(\tau<\infty)} \geqslant k)$$
$$\leqslant k^{-1} E|X_\tau| I_{(\tau<\infty)} \leqslant k^{-1} \sup_n E|X_n|.$$

由定义知：当 $\tau \geqslant n$ 时，$X_n^{(1)} = 0$，当 $\tau < n$ 时，

$$|X_n^{(1)}| = |X_n - X_\tau| \leqslant |X_n| + |X_\tau|,$$

于是由引理 5.5 的证明知 $\sup_n E|X_n^{(1)}| < \infty$，即(1) 成立. 由引理 5.4 有

$$E\sum_{n=0}^{\infty} |X_n^{(2)} - X_{n-1}^{(2)}| = E\sum_{n=0}^{\infty} |D_n I_{(\tau=n)} - E(D_n I_{(\tau=n)} | \mathscr{F}_{n-1})|$$
$$\leqslant 2\sum_{n=0}^{\infty} E|D_n| I_{(\tau=n)} = 2E|D_\tau| I_{(\tau<\infty)}$$
$$\leqslant 4E|X_\tau| I_{(\tau<\infty)} \leqslant 4 \sup_n E|X_n|,$$

即(2) 成立.

由引理 5.5 有

$$E(X_n^{(3)})^2 = \sum_{i=0}^{n} E(D_i I_{(\tau>i)} - E(D_i I_{(\tau>i)} | \mathscr{F}_{i-1}))^2$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{n} ED_i^2 I_{(\tau>i)}$$
$$\leqslant E\sum_{i=0}^{\tau-1} D_i^2 \leqslant 2k \sup_n E|X_n|,$$

即(3) 成立. 定理得证.

定理 5.7 (Austin) 设 $X = \{X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为鞅，若 $\sup_n E|X_n| < \infty$，则 $\sum_{i=0}^{\infty} D_i^2 < \infty, a.e.$

证 对整数 $k \geqslant 1$，按定理 5.6 将 X 分解为

$$X_n = X_n^{(1)} + X_n^{(2)} + X_n^{(3)}, n \geqslant 0.$$

令 $A_k = \{\sup_n |X_n^{(1)}| = 0\}, Y_n = X_n^{(2)} - X_{n-1}^{(2)}$,

$Z_n = X_n^{(3)} - X_{n-1}^{(3)}, n \geqslant 0, X_{-1}^{(2)} = 0, X_{-1}^{(3)} = 0$. 在 A_k 上有

$$\sum_{i=0}^{\infty} D_i^2 \leqslant 2(\sum_{i=0}^{\infty} Y_i^2 + \sum_{i=0}^{\infty} Z_i^2),$$

由定理 5.6 的(2) 知

$$E\sum_{i=0}^{\infty} |Y_i| < \infty,$$

于是，$\sum_{i=0}^{\infty} |Y_i| < \infty$, $a.e.$，从而 $\sum_{i=0}^{\infty} |Y_i^2| < \infty$, $a.e.$ 再由定理 5.6 的(3) 得

$$\sup_n E(X_n^{(3)})^2 < \infty,$$

又 $E(X_n^{(3)})^2 = \sum_{i=0}^{n} EZ_i^2$，于是

$$E\sum_{i=0}^{\infty} Z_i^2 = \sup_n \sum_{i=0}^{n} EZ_i^2 = \sup_n E(X_n^{(3)})^2 < \infty,$$

从而 $\sum_{i=0}^{\infty} Z_i^2 < \infty$, $a.e.$. 因此，对每一正整数 $k \geqslant 1$，在 A_k 上有 $\sum_{i=0}^{\infty} D_i^2 < \infty$, $a.e.$. 但由定理 5.6 的(1) 知

$$P(\sup_n |X_n^{(1)}| > 0) \leqslant k^{-1} \sup_n E|X_n|,$$

因此 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \Omega$，于是，$\sum_{i=0}^{n} D_i^2 < \infty$, $a.e.$.

定理 5.8 设 $X = \{X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为鞅，$V = \{V_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为可预报序列，则有

(1) 若 $ED^* = E\sup_n |D_n| < \infty$，则

$$\{\sum_{n=0}^{\infty} D_n^2 < \infty\} \subset \{X_n \rightarrow\},$$

特别，若 $ES^{(2)}(X) = E(\sum_{n=0}^{\infty} D_n^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$，则 X_n $a.e.$ 收敛且有穷.

(2) 若 $\sup_n E|X_n| < \infty$，则

$$\{V^* < \infty\} \subset \{Y_n = \{\sum_{n=0}^{n} V_i D_i \to\}.$$

其中 $V^* = \sup_n |V_n|$,特别,若$\sup_n E|X_n| < \infty$ 且

$V^* < \infty$, $a.e.$,则 Y_n $a.e.$ 收敛且有穷.

证 (1) 在定理2.7中取 $p=2$,对每一 $k>0$.则鞅 X 有如下 Chow 分解:

$$D_n = D_n^{(1)} + D_n^{(2)} + D_n^{(3)}, n \geqslant 0,$$

其中 $X_n^{(1)} = \sum_{i=0}^{n} D_i^{(1)}, n \geqslant 0$ 是 L^2 有界鞅,$\sum_{i=0}^{\infty} |D_n^{(2)}| < \infty$ $a.e.$,且

$$\{D^{(3)*} > 0\} \subset \{\sum_{n=0}^{\infty} D_n^2 > k^2\}$$

由 k 的任意性立即知

$$\{\sum_{n=0}^{\infty} D_n^2 < \infty\} \subset \{X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i \to\}.$$

(2) 由于 X 为 L^1 有界鞅,由定理5.7知:

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n^2 < \infty, \ a.e..$$

于是,在集合$\{V^* < \infty\}$ 上 $a.e.$ 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 D_n^2 < \infty.$$

对每一 $k > 0$,令

$$\tau = \inf\{n \geqslant 0: |X_n| > k \text{ 或 } |V_{n-1}| > k\}, \inf\varnothing = \infty,$$

$$D'_n = D_n V_n I_{\{\tau \geqslant n\}}, X'_n = \sum_{i=0}^{n} D'_n, n \geqslant 0.$$

则 $\{X'_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是鞅,且在集合 $\{V^* < \infty\}$ 上 $a.e.$ 有 $\sum_{n=0}^{\infty} (D'_n)^2 < \infty$,由于

$$|D'_n| \leqslant k(|X_n| + |X_{n-1}|) I_{\{\tau \geqslant n\}}$$
$$\leqslant k(2k + |X_n| I_{\{\tau = n\}}).$$

于是

$$\sup_n |D'_n| \leqslant k(2k + |X_\tau| I_{\{\tau<\infty\}}).$$

由引理 5.4 得 $E\sup_n |D'_n| < \infty$. 故由已证的(1)知在集合$\{V^* < \infty\}$上 X'_n a.e. 收敛且有穷. 但在集合$\{\tau = \infty\}$上 $X'_n = Y_n = \sum_{i=0}^{n} V_i D_i$,于是在集合$\{V^* < \infty\} \cap \{\tau = \infty\}$上 $Y_n = \sum_{i=0}^{n} V_i D_i$ a.e. 收敛且有穷,但$\{\tau = \infty\} = \{\sup_n |X_n| \leqslant k, \sup_n |V_n| \leqslant k\}$,由 k 的任意性及 X_n a.e. 收敛知

$$\{V^* < \infty\} \subset \{Y_n = \sum_{i=0}^{n} V_i D_i \rightarrow\}.$$

§6 鞅极限定理

鞅性是独立性概念的重要推广,很多有关独立随机变量序列的极限定理可推广到鞅的情形. 本节给出鞅的强(弱)大数定律与中心极限定理的一些基本结果.

定理 6.1 设 $X = \{X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是鞅,$\{b_n, n \geqslant 1\}$ 是正的常数序列且 $b_n \uparrow \infty (n \to \infty)$,记 $D_{ni} = D_i I_{(|D_i| \leqslant b_n)}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 如果

(1) $\sum_{i=1}^{n} P(|D_i| > b_n) \to 0 (n \to \infty)$,

(2) $b_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} E(|D_{ni}| \mathscr{F}_{i-1}) \xrightarrow{P} 0$,

(3) $b_n^{-2} \sum_{i=1}^{n} [ED_{ni}^2 - E(E(D_{ni} | \mathscr{F}_{i-1}))^2] \to 0 (n \to \infty)$,

则 $\dfrac{X_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0 \ (n \to \infty)$.

证　　令 $X_{nn} = \sum_{i=1}^{n} D_{ni}$,由(1)得

$$P\left(\frac{X_{nn}}{b_n} \neq \frac{X_n'}{b_n}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(D_{ni} \neq D_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(|D_i| > b_n) \to 0 (n \to \infty).$$

故只须证明$\frac{X_{nn}}{b_n} \xrightarrow{P} 0$. 但由(2)知只须证明

$$\frac{X_{nn}}{b_n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} E(D_{ni} | \mathscr{F}_{i-1})}{b_n} \xrightarrow{P} 0.$$

即证 $b_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (D_{ni} - E(D_{ni} | \mathscr{F}_{i-1})) \xrightarrow{P} 0.$

而这由(3)及车贝雪夫不等式知是成立的，从而定理得证.

为证明强大数定律，先证明非常有用的 Toeplitz 引理及 Kronecker 引理.

引理 6.2 设$\{a_{ni}\}$是一实数矩阵，$\{x_i\}$是实数序列.

(1)(Toeplitz 引理) 若 $x_i \to x, i \to \infty$，矩阵$\{a_{ni}\}$满足

(i) 对一切 $n \geqslant 1$，有$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ni}| \leqslant M < \infty$,

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} \to 1 (n \to \infty)$,

(iii) 对每一 $i \geqslant 1, a_{ni} \to 0 (n \to \infty)$，则

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} x_i \to x (n \to \infty).$$

(2) 若 $x_i \to 0 (i \to \infty)$，矩阵$\{a_{ni}\}$满足(1)中的条件(i)与(iii)，则

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} x_i \to x (n \to \infty).$$

(3)(Kronecker 引理) 若 $0 < a_i \uparrow \infty, \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{a_i}$ 收敛，则

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{a_n} \to 0 (n \to \infty).$$

证 (1) 由于 $\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}x_i - x = \sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}x_i - \sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}x + \sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}x - x$ 及当 $n\to\infty$ 时，$\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}\to 1$，故只须证明

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}(x_i - x)\to 0(n\to\infty).$$

事实上，$\forall\ \varepsilon>0$，由于 $x_i\to x$，则存在正整数 n_0，当 $i\geqslant n_0$ 时，有 $|x_i - x|<\varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}(x_i - x)\right| &\leqslant \sum_{i=1}^{n_0-1}|a_{ni}(x_i - x)| + \sum_{i=n_0}^{\infty}|a_{ni}(x_i - x)| \\ &\leqslant (\max_{1\leqslant i\leqslant n_0-1}|x_i - x|)\sum_{i=1}^{n_0-1}|a_{ni}| + (\sum_{i=n_0}^{\infty}|a_{ni}|)\varepsilon \\ &\leqslant (\max_{1\leqslant i\leqslant n_0-1}|x_i - x|)\sum_{i=1}^{n_0-1}|a_{ni}| + M\varepsilon \\ &\to M\varepsilon\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

由 ε 的任意性知

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}(x_i - x)\right|\to 0(n\to\infty).$$

这就证明了(1).

(2) 类似于(1) 证明.

(3) 令 $a_0 = 0, y_1 = 0, y_{n+1} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i}, n\geqslant 1$. 对每一 $n\geqslant 1$，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_n} &= \sum_{i=1}^{n}a_i(y_{i+1} - y_i)/a_n \\ &= y_{n+1} - \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})y_i/a_n.\end{aligned}$$

令 $$a_{ni} = \begin{cases}(a_i - a_{i-1})/a_n, & 若\ i\leqslant n, \\ 0, & 若\ i>n.\end{cases}$$

则矩阵 $\{a_{ni}\}$ 满足(1) 中的条件 (i)、(ii) 及 (iii)，由(1) 得

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})y_i/a_n\to\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{a_i}.$$

但

$$y_{n-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i}\to\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_i}{a_i},$$

故

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{a_n}\to 0(n\to\infty).$$

下面我们给出著名的 Kolmogorov 强大数定理的一个鞅方法证明.

定理 6.3 设$\{D_n,n\geqslant 1\}$是独立同分布的随机变量序列,令 $X_n=\sum_{i=1}^{n}D_i,n\geqslant 1$,若 $E|D_1|<\infty$,则

$$\frac{X_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}D_i}{n}\to ED_1,a.e..$$

证 令 $\mathscr{F}_n=\sigma(D_1,D_2,\cdots,D_n),n\geqslant 1$, 于是 $X_n=E(X_n|\mathscr{F}_n)=\sum_{i=1}^{n}E(D_i|\mathscr{F}_n)$.但对每一 $n\geqslant 1$,对每一 $i\leqslant n$,有 $E(D_i|\mathscr{F}_n)=E(D_1|\mathscr{F}_n)$,这样,$\frac{X_n}{n}=E(D_1|\mathscr{F}_n)$,再利用第一章的定理 6.7 有本章的例 1.1 及定理 1.10 知$\frac{X_n}{n}=E(D_1|\mathscr{F}_n)a.e.$ 收敛且 L^1 收敛.令$\frac{X_n}{n}\to X\ a.e.\ (L^1)$,则 X 是一尾随机变量,即 X 是 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\sigma(D_n,D_{n-1},\cdots)$ 可测的随机变量.由 Kolmogorov 0-1 律知 X $a.e.$ 为常数,又 $E\frac{X_n}{n}=ED_1$,而$\frac{X_n}{n}\xrightarrow{L^1}X$. 故 $X=ED_1$.

注:设$\{D_n,n\geqslant 1\}$是独立同分布的随机变量序列,可以证明:

若 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} D_i - b_n}{n} \to 0\ a.e.$，则 $E|D_1| < \infty$，且 $ED_1 = b$ （证明见[8] p. 119，定理 3.2.2）

定理 6.4（Marcinkiewicz 强大数定理） 设 $\{D_n, n \geqslant 1\}$ 是独立同分布的随机变量序列，

(1) 若 $E|D_1|^r < \infty, 0 < r < 1$，则

$$\sum_{i=1}^{n} D_i / n^{\frac{1}{r}} \to 0.\ a.e.$$

(2) 若 $E|D_1|^r < \infty, 1 \leqslant r < 2$，则

$$(\sum_{i=1}^{n} D_i - nED_1)/n^{\frac{1}{r}} \to 0.\ a.e.$$

(3) 若对 $0 < r < 2$ 及常数序列 $\{b_n\}$ 有

$$(\sum_{i=1}^{n} D_i - b_n)/n^{\frac{1}{r}} \to 0.\ a.e.$$

则 $E|D_1|^r < \infty$.

证 先证(1)与(2). 对(2)而言，当 $r = 1$ 时，即为 Kolmogorov 强大数定理. 故只须对 $r > 1$ 证(2)成立. 设 $E|D_1|^r < \infty$. $0 < r < 2$ 且 $r \neq 1$，若 $r > 1$，不妨设 $ED_1 = 0$（否则考虑 $D'_n = D_n - ED_n, n \geqslant 1$）由于 $E|D_1|^r < \infty$，则 $\sum_{i=1}^{\infty} P(|D_i| > i^{\frac{1}{r}}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(|D_1| > i^{\frac{1}{r}}) < \infty$. 由 Borel — Cantelli 引理知：$P(|D_i| > i^{\frac{1}{r}}, i.o.) = 0$. 从而只须证

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} D_i I_{(|D_i| \leqslant i^{\frac{1}{r}})}}{n^{\frac{1}{r}}} \to 0,\ a.e.$$

对 $0 < r < 1$，

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(|D_i| I_{(|D_i| \leqslant i^{\frac{1}{r}})}) / i^{\frac{1}{r}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i} E(|D_1| I_{(j-1<|D_1|^r \leqslant j)})/i^{\frac{1}{r}} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} E(|D_1| I_{(j-1<|D_1|^r \leqslant j)}) \sum_{i=j}^{\infty} i^{-\frac{1}{r}} \\
&\leqslant c \sum_{j=1}^{\infty} j^{\frac{1}{r}-1} E(|D_1|^r I_{(j-1<|D_1|^r \leqslant j)}) j^{1-\frac{1}{r}} \\
&= c \sum_{j=1}^{\infty} E|D_1|^r I_{(j-1<|D_1|^r \leqslant j)} \\
&= cE|D_1|^r < \infty,
\end{aligned}
$$

其中 c 为常数.

对 $1 < r < 2$,由于 $ED_i = 0,\ i \geqslant 1$,类似于上面的证明可得

$$
\begin{aligned}
& \left| \sum_{i=1}^{\infty} ED_i I_{(|D_i| \leqslant i^{\frac{1}{r}})}/i^{\frac{1}{r}} \right| \\
&= \left| \sum_{i=1}^{\infty} E(D_i I_{(|D_i| > i^{\frac{1}{r}})})/i^{\frac{1}{r}} \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} E(|D_i| I_{(|D_i| > i^{\frac{1}{r}})})/i^{\frac{1}{r}} < \infty,
\end{aligned}
$$

这样,在 $0 < r < 2$ 且 $r \neq 1, E|D_1|^r < \infty$ 的条件下,我们有

$$
\sum_{i=1}^{\infty} E(D_i I_{(|D_i| \leqslant i^{\frac{1}{r}})})/i^{\frac{1}{r}}
$$

收敛,由 Kronecker 引理,我们只须证明在 $0 < r < 2$ 且 $r \neq 1$, $E|D_1|^r < \infty$ 的条件下

$$
\sum_{i=1}^{\infty} \{D_i I_{(|D_i| \leqslant i^{\frac{1}{r}})} - ED_i I_{(|D_i| \leqslant i^{\frac{1}{r}})}\}/i^{\frac{1}{r}}
$$

a.e. 收敛. 令 $D'_i = \{D_i I_{(|D_i| \leqslant i^{\frac{1}{r}})} - ED_i I_{(|D_i| \leqslant i^{\frac{1}{r}})}\}/i^{\frac{1}{r}}, X'_n = \sum_{i=1}^{n} D'_i, \mathscr{F}_n = \sigma(D_1, D_2, \cdots, D_n)$,则 $\{X'_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为平方可积鞅,由定理 4.6,只须证明:

$$
\sum_{i=1}^{\infty} E(D_i I_{(|D_i| \leqslant i^{\frac{1}{r}})} - ED_i I_{(|D_i| \leqslant i^{\frac{1}{r}})})^2/i^{\frac{2}{r}} < \infty,
$$

为此，只须证明

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(|D_i|^2 I_{\{|D_i| \leqslant i^{\frac{1}{r}}\}})/i^{\frac{2}{r}} < \infty.$$

但

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty} E(|D_i|^2 I_{\{|D_i| \leqslant i^{\frac{1}{r}}\}})/i^{\frac{2}{r}} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} i^{-\frac{2}{r}} \sum_{j=1}^{i} ED_1^2 I_{\{j-1<|D_1|^r \leqslant j\}} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} E(D_1^2 I_{\{j-1<|D_1|^r \leqslant j\}}) \sum_{i=j}^{\infty} i^{-\frac{2}{r}} \\
&\leqslant c \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\frac{2}{r}+1} ED_1^2 I_{\{j-1<|D_1|^r \leqslant j\}} \\
&\leqslant c \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\frac{2}{r}+1} j^{\frac{2}{r}-1} E|D_1|^r I_{\{j-1<|D_1|^r \leqslant j\}} \\
&= cE|D_1|^r < \infty,
\end{aligned}$$

这里 c 为常数，这就证明了(1) 与(2)。

下面证(3)。设对 $0 < r < 2$ 及常数序列$\{b_n\}$ 有

$$(\sum_{i=1}^{n} D_i - b_n)/n^{\frac{1}{r}} \to 0, \ a.e.$$

又设 D_i^s 是 D_i 的对称化随机变量，则有

$$\sum_{i=1}^{n} D_i^s/n^{\frac{1}{r}} \to 0, \ a.e.$$

从而

$$\frac{D_n^s}{n^{\frac{1}{r}}} \to 0. \ a.e.$$

于是 $E|D_1^s|^r < \infty$. 这样 $E|D_1 - \mu(D_1)|^r \leqslant 2.E|D_1^s|^r < \infty$，其中 $M(D_1)$ 是 D_1 的中位数，再由初等不等式

$$|a+b|^r \leqslant c_r(|a|^r + |b|^r)$$

其中当 $r < 1$ 时 $C_r = 1$，当 $r \geqslant 1$ 时 $C_r = 2^{r-1}$立即推知 $E|D_1|^r < \infty$. 这就证明了(3)。

推论 6.5 设$\{D_n,n\geqslant 1\}$是独立同分布的随机变量序列，$\{b_n,n\geqslant 1\}$是常数序列，$0<r<2$. 则

$$(\sum_{i=1}^{n}D_i-b_n)/n^{\frac{1}{r}}\to 0\ a.e.$$

的充要条件是

$$E|D_1|^r<\infty \text{ 及 } (b_n-na)/n^{\frac{1}{r}}\to 0,$$

其中当$0<r<1$时，$a=0$；当$1\leqslant r\leqslant 2$时$a=ED_1$.

证 必要性，由定理 6.4 的(3) 知：若

$$(\sum_{i=1}^{n}D_i-b_n)/n^{\frac{1}{r}}\to 0\ a.e.$$

则$E|D_1|^r<\infty$. 再由定理 6.4 的(1) 与(2) 知：若$E|D_1|^r<\infty$，则有

$$(\sum_{i=1}^{n}D_i-na)/n^{\frac{1}{r}}\to 0\ a.e.$$

于是

$$(b_n-na)/n^{\frac{1}{r}}\to 0.$$

充分性 当$0<r<1$时，设$E|D_1|^r<\infty$及$b_n/n^{\frac{1}{r}}\to 0$. 则由定理 6.4 的(1)有

$$\sum_{i=1}^{n}D_i/n^{\frac{1}{r}}\to 0\ a.e.$$

于是有

$$\sum_{i=1}^{n}(D_i-b_n)/n^{\frac{1}{r}}\to 0\ a.e.$$

当$1\leqslant r<2$时，设$E|D_1|^r<\infty$，$(b_n-nED_1)/n^{\frac{1}{r}}\to 0$ 则由定理 6.4 的(2) 有

$$(\sum_{i=1}^{n}D_i-nED_1)/n^{\frac{1}{r}}\to 0\ a.e.$$

于是

$$(\sum_{i=1}^{n}D_i-b_n)n^{\frac{1}{r}}\to 0\ a.e.$$

定理 6.6 设对每一$i \geqslant 0$,a_i是$\mathscr{F}_{i-1}$可测的随机变量且$0 < a_i \uparrow \infty$ $a.e.$,又设$X = \{X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为鞅,$0 < p \leqslant 2$,若

$$\sum_{i=0}^{\infty} E(|D_i|^p | \mathscr{F}_{i-1})/a_i^p < \infty, \ a.e.$$

则

$$\frac{X_n}{a_n} \to 0. \ a.e.$$

证 由定理 4.9 及 Kronecker 引理得出.

推论 6.7 设$X = \{X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为鞅,$0 < p \leqslant 2$.若$\sum_{i=0}^{\infty} E|D_i|^p/(i+1)^p < \infty$ 则

$$\frac{X_n}{n+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n} D_i}{n+1} \to 0. \ a.e.$$

定理 6.8 设对每一$i \geqslant 0$,a_i是$\mathscr{F}_{i-1}$可测的随机变量且$0 < a_i \uparrow \infty$ $a.e.$,又$\{b_i, i \geqslant 0\}$是正的常数序列且$\sum_{i=0}^{\infty} b_i < \infty$.$X = \{X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为鞅,若对$p \geqslant 2$有

$$\sum_{i=0}^{\infty} E(|D_i|^p | \mathscr{F}_{i-1}) b_i^{1-\frac{p}{2}} a_i^{-p} < \infty \ a.e.$$

则
$$\frac{X_n}{a_n} = \frac{\sum_{i=0}^{n} D_i}{a_n} \to 0 \ a.e.$$

证 由定理 4.10 及 Kronecker 引理得出.

推论 6.9 设$X = \{X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为鞅,若对$\varepsilon > 0$及$p \geqslant 2$,有

$$\sum_{i=0}^{\infty} E|D_i|^p/(i+1)^{1-\frac{p}{2}-\epsilon} < \infty$$

则

$$\frac{X_n}{n+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n} D_i}{n+1} \to 0. \quad a.e.$$

证 令 $b_i = (i+1)^{(1-\frac{2\epsilon}{p-2})}$, $a_i = i+1$, $i \geqslant 0$, 应用定理6.8即得推论6.9.

下面我们讨论鞅的中心极限定理

对每一 $n \geqslant 1$, 设 $\{X_{ni}, \mathscr{F}_{ni}, 1 \leqslant i \leqslant k_n\}$ 为鞅,其差序列为 $D_{ni} = X_{ni} - X_{n\,i-1}, 1 \leqslant i \leqslant k_n$, ($X_{n0} = 0$) 我们称 $\{X_{ni}, \mathscr{F}_{ni}, 1 \leqslant i \leqslant k_n, n \geqslant 1\}$ 为鞅阵列.

定义 6.1 概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机变量序列 $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ 称为依分布稳定收敛于随机变量 Y,如果

(1) $Y_n \xrightarrow{d} Y$,

(2) 对任一 $E \in \mathscr{F}$ 和任一 Y 的连续点 y(即 Y 的分布函数的连续点),极限

$$\lim_{n\to\infty} P(\{Y_n < y\} \cap E) = Q_y(E)$$

存在,且当 $y \to \infty$ 时, $Q_y(E) \to P(E)$,这时记作 $Y_n \xrightarrow{d} Y$(稳定). 特别,当 $Q_y(E) = P(Y < y) \cdot P(E)$ 时,则称 $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ 依分布混合收敛于随机变量 Y,记作 $Y_n \xrightarrow{d} Y$.(混合)

定义 6.2 概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的可积随机变量序列 $\{Z_n, n \geqslant 1\}$ 称为弱 L^1 收敛于 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的可积随机变量 Z,如果对一切 $B \in \mathscr{F}$,有

$$EZ_n I_B \longrightarrow EZI_B.$$

这时记作 $Z_n \xrightarrow{(w)L^1} Z$.

显然,若 $\exp(i+Y_n) \xrightarrow{(w)L^1} \exp(i+Y)$, $\forall\, t \in R$,则 $Y_n \xrightarrow{d} Y$.

弱 L^1 收敛强于一致可积性，但弱于 L^1 收敛性（见 Neveu[9]，1965，命题 Ⅳ 2. 2）

引理 6. 10 设 $\{D_{nj},\mathscr{F}_{nj},1\leqslant j\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$ 是鞅差阵列，满足以下条件：

(1) $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}|D_{nj}|\xrightarrow{P}0$，

(2) $U^2_{nk_n}=\sum\limits_{j=1}^{k_n}D^2_{nj}\xrightarrow{P}\eta^2$，其中 η^2 是一 a. e. 有限的随机变量

(3) 对每一实数 t，记 $T_n(t)=\prod\limits_{j=1}^{n}(1+itD_{nj})$，

$$T_n(t)\xrightarrow{(w)L^1}1$$

则

$$X_{nk_n}=\sum_{j=1}^{k_n}D_{nj}\xrightarrow{d}Z\ (\text{稳定})$$

这里 Z 是特征函数为 $E\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)$ 的随机变量.

证　设函数 $r(x)$ 由下式定义

$$e^{ix}=(1+ix)\exp\{-\frac{1}{2}x^2+r(x)\}$$

记　$I_n=\exp(i+X_{nk_n})$ 及

$$W_n=\exp\{-\frac{1}{2}t^2\sum_{j=1}^{k_n}D^2_{nj}+\sum_{j=1}^{k_n}r(tD_{nj})\}.$$

则

$$I_n=T_n(t)\exp\{-\frac{1}{2}\eta^2t^2\}+T_n(t)\{W_n-\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)\}.$$

由特征函数的收敛性定理，为证明引理的结论，只要证明对一切 $B\in\mathscr{F}$，有

$$EI_nI_B\to E\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)I_B. \tag{6.1}$$

因为 $\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)I_B$ 是有界的，由(3) 可推得

$$E(T_n\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)I_B)\to E\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)I_B). \qquad (6.2)$$

即 $T_n\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)\xrightarrow{(w)L^1}\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)$ 由此 $\{T_n\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)\}$ 是一致可积的；又 $|I_n|=1, n\geqslant 1$，故 $\{I_n\}$ 一致可积，因此

$$T_n\{W_n-\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)\}=I_n-T_n\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)$$

是一致可积的，注意到当 $|x|\leqslant 1$ 时，$|r(x)|\leqslant|x|^3$. 对每一固定的 $t\neq 0$，令

$$\Lambda_n=\{w\in\Omega:|t|\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}|D_{nj}(w)|\leqslant 1\}$$

由条件(1)与(2)有

$$I_{\Lambda_n}|\sum_{j=1}^{k_n}r(tD_{nj})|\leqslant I_{\Lambda_n}|t|^3\sum_{j=1}^{k_n}|D_{nj}|^3$$

$$\leqslant I_{\Lambda_n}|t|^3\max_{1\leqslant j\leqslant k_n}|D_{nj}|(\sum_{j=1}^{k_n}D_{nj}^2)$$

$$\xrightarrow{P} 0 \qquad (n\to\infty).$$

但 $P(\Lambda_n)\to 1$ $(n\to\infty)$. 故有

$$\sum_{j=1}^{k_n}r(tD_{nj})\xrightarrow{P}0.$$

因此

$$W_n-\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)\xrightarrow{P}0.$$

由 $\{T_n[W_n-\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)]\}$ 的一致可积性可得

$$ET_n[W_n-\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)]I_B\to 0. \qquad (6.3)$$

由(6.2)与(6.3)即得(6.1)式. 证毕

注 [10]已将上述引理推广到平方可积的极限鞅差阵的情形.

定理 6.11 设$\{D_{nj},\mathscr{F}_{nj},1\leqslant j\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$是零均值平方可积的鞅差阵列. 满足条件

(1) $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}|D_{nj}|\xrightarrow{P}0$

(2) $U_{nk_n}^2=\sum\limits_{j=1}^{k_n}|D_{nj}^2|\xrightarrow{P}\eta^2$,其中$\eta^2$是 a.e. 有限的随机变量

(3) $E(\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}D_{nj}^2)$ 对 n 一致有界且对 $1\leqslant j\leqslant k_n$

$$\mathscr{F}_{nj}\subset\mathscr{F}_{n+1\,j},n\geqslant 1.$$

则

$$X_{nk_n}=\sum_{j=1}^{k_n}D_{nj}\xrightarrow{d}Z(\text{稳定}),$$

其中 Z 是特征函数为 $E\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)$ 的随机变量.

证 1° 首先假设 η^2 是 a.e. 有界的,即有 $c>0$,使

$$P(\eta^2<c)=1.$$

令

$$D'_{nj}=D_{nj}I_{(\sum_{k=1}^{j-1}D_{nk}^2\leqslant 2c)},X'_{nj}=\sum_{k=1}^{j}D'_{nk},$$

则$\{X'_{nj},\mathscr{F}_{nj},1\leqslant j\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$也是鞅阵列. 因为

$$P(\bigcup_{j=1}^{k_n}\{D'_{nj}\neq D_{nj}\})$$
$$\leqslant P(U_{nk_n}^2>2c)\to 0, \tag{6.4}$$

故有 $\qquad P(X'_{nk_n}\neq X_{nk_n})\to 0,$

因而 $\qquad E|\exp(itX'_{nk_n})-\exp(itX_{nk_n})|\to 0,$

于是 $X_{nk_n}\to Z$(稳定)当且仅当 $X'_{nk_n}\xrightarrow{d}Z$(稳定). 由(6.4),鞅差阵阵列$\{D'_{nj},\mathscr{F}_{nj},1\leqslant j\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$满足引理 6.10 中的条件(1)与(2). 只须验证:对每一实数 t,$T'_n=\prod\limits_{j=1}^{k_n}(1+itD'_{nj})$ 满足引理 6.10 中的条件(3),记

$$J_n = \begin{cases} \min\{s \leqslant k_n, \ U_{ns}^2 > 2c\}, \text{若 } U_{nk_n}^2 > 2c, \\ k_n, \quad \text{其它}, \end{cases}$$

则

$$E|T'_n|^2 = E\prod_{j=1}^{k_n}(1 - t^2 D_{nj}^2)$$

$$\leqslant E\{[\exp(t^2\sum_{j=1}^{J_n - 1} D'^2_{nj})](1 + t^2 D_{nJ_n}^2)\}$$

$$\leqslant [\exp(2ct^2)](1 + t^2 E D_{nJ_n}^2).$$

由条件(3)知 $\sup_n E|T'_n|^2 < \infty$，从而$\{T'_n\}$一致可积.

对固定的 $m \geqslant 1$，设 $B \in \mathscr{F}_{mk_m}$，由(3)得知 $B \in \mathscr{F}_{nk_n}$，$\forall\, n \geqslant m$，有

$$ET'_n I_B = E[I_B\prod_{j=1}^{k_n}(1 + itD'_{nj})]$$

$$E[I_B\prod_{j=1}^{k_m}(1 + itD'_{nj})\prod_{j=k_m-1}^{k_n} E((1 + itD'_{nj})|\mathscr{F}_{n,j-1})]$$

$$E[I_B\prod_{j=1}^{k_m}(1 + itD'_{nj})],$$

由(1)知：对每一固定的 $m, n \to \infty$ 时

$$I_B\prod_{j=1}^{k_m}(1 + itD'_{nj}) \xrightarrow{P} I_B.$$

又由上面的讨论可知$\{I_B\prod_{j=1}^{k_m}(1 + itD'_{nj})\}$一致可积，因此

$$ET'_n I_B \to P(B). \tag{6.5}$$

令 $\mathscr{F}_\infty = \bigvee_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_{nk_n}$，对任一 $B' \in \mathscr{F}_\infty$ 和任一 $\varepsilon > 0$，存在 m 和 $B \in \mathscr{F}_{mk_m}$，使得 $P(B\triangle B') < \varepsilon$，因为$\{T'_n\}$一致可积，且

$$|ET'_n I_B - ET'_n I_{B'}| \leqslant E|T'_n| I_{B\triangle B'},$$

所以只要取 ε 足够小，即可使 $\sup_n|ET'_n I_B - ET'_n I_{B'}|$ 充分小，由(6.5)得

$$ET'_n I_{B'} \to P(B').$$

从而，对任意有界的 $\mathscr{F}_\infty$ 可测的随机变量 ξ，有 $ET'_n\xi \to E\xi$. 最后，若 $A \in \mathscr{F}$，则

$$ET'_nI_A = E(T'_nE(I_A|\mathscr{F}_\infty)] \to E[E(I_A|\mathscr{F}_\infty)]$$
$$= P(A).$$

即 T'_n 满足引理 6.10 中的条件(3)，这就证明了当 η^2 $a.e.$ 有界时定理成立.

2° 一般情形. 若 η^2 不 $a.e.$ 有界，则对给定的 $\varepsilon > 0$，存在 η^2 的连续点 c，使 $P(\eta^2 > c) < \varepsilon$ 令

$$\eta_c^2 = \eta^2 I_{\{\eta^2 \leqslant c\}} + cI_{\{\eta^2 > c\}}$$
$$D''_{nk} = D_{nk}I_{\{\sum_{j=1}^{k-1} D_{nj}^2 \leqslant c\}},$$
$$X''_{nk} = \sum_{j=1}^{k} D''_{nj}.$$

则 $\{X''_{nk}, \mathscr{F}_{nk}, 1 \leqslant k \leqslant k_n, n \geqslant 1\}$ 是鞅阵列，并满足定理 6.11 的条件(1) 与(3)，又

$$\Big(\sum_{j=1}^{k_n} D_{nj}^2\Big)I_{\{\sum_{j=1}^{k_n} D_{nj}^2 \leqslant c\}} + cI_{\{\sum_{j=1}^{k_n} D_{nj}^2 > c\}}$$
$$\leqslant \sum_{j=1}^{k_n} D''^2_{nj}$$
$$\leqslant \Big(\sum_{j=1}^{k_n} D_{nj}^2\Big)I_{\{\sum_{j=1}^{k_n} D_{nj}^2 \leqslant c\}} + (c + \max_{1 \leqslant j \leqslant k_n} D_{nj}^2)I_{\{\sum_{j=1}^{k_n} D_{nj}^2 > c\}},$$

因 c 是 η^2 的分布函数的连续点，故

$$I_{\{\sum_{j=1}^{k_n} D_{nj}^2 \leqslant c\}} \xrightarrow{P} I_{\{\eta^2 \leqslant c\}}.$$

所以 $$\sum_{j=1}^{k_n} D''^2_{nj} \xrightarrow{P} \eta_c^2.$$

因为 η_c^2 是 $a.e.$ 有界的，故由 1° 的证明有

$$X''_{nk_n} \xrightarrow{d} Z_c（稳定）$$

这里 Z_c 是特征函数为 $E\exp\{-\frac{1}{2}\eta_c^2 t^2\}$ 的随机变量，如果 $A \in \mathscr{F}$，

则

$$
\begin{aligned}
&|E[I_A\exp(itX_{nk_n})]-E[I_A\exp(-\frac{1}{2}\eta_c^2t^2)]|\\
&\leqslant E|\exp(itX_{nk_n})-\exp(itX''_{nk_n})|\\
&\quad +|E[I_A\exp(itX_{nk_n})]-E[I_A\exp(-\frac{1}{2}\eta_c^2t^2)]|\\
&\quad +E|\exp(-\frac{1}{2}\eta_c^2t^2-\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)]|, \qquad (6.6)
\end{aligned}
$$

由于 $X''_{nk_n}\xrightarrow{d}Z_c$(稳定),上式右边第二项收敛于零,又因为

$$
\begin{aligned}
P(X_{nk_n}\neq X''_{nk_n})&\leqslant P(D''_{nj}\neq D_{nj}),\text{对某 } j)\\
&\leqslant P(U^2_{nk_n}>c)\to P(\eta^2>c)<\epsilon,
\end{aligned}
$$

所以上面(6.6)式右边的第一、三两项的极限均小于 2ϵ,由 ϵ 的任意性得.

$$
\limsup_{n\to\infty}|E[I_A\exp(itX_{nk_n})]-E[I_A\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)]|
$$

$$
=0.
$$

再由特征函数收敛性定理知定理结论成立.

推论 6.12 设$\{D_{nj},\mathscr{F}_{nj},1\leqslant j\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$是零均值平方可积的鞅差阵列,满足条件:

(1) $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}|D_{nj}|\xrightarrow{P}0$,

(2) $U^2_{nk_n}=\sum\limits_{j=1}^{k_n}D^2_{nj}\xrightarrow{P}1$,

(3) $E(\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k_n}D^2_{nj})$ 对 n 一致有界且对 $1\leqslant j\leqslant k_n$,有

$$
\mathscr{F}_{nj}\subset\mathscr{F}_{n+1\,j},\qquad n\geqslant 1.
$$

则

$$
X_{nk_n}=\sum_{j=1}^{k_n}D_{nj}\xrightarrow{d}N(0,1)\ (\text{稳定}),
$$

其中 $N(0,1)$ 表示标准正态分布的随机变量.

定理 6.13 设鞅差阵列$\{D_{nj},\mathscr{F}_{nj},1\leqslant j\leqslant k_n,n\geqslant 1\}$满足定理 6.11 中的条件，且 $P(\eta^2>0)=1$，则

$$X_{nk_n}/U_{nk_n}\longrightarrow N(0,1)\ (\text{混合}).$$

证 由定理 6.11 知 $X_{nk_n}\xrightarrow{d}Z$（稳定），故对任意的实数 t 和 $A\in\mathscr{F}$，有

$$E[\exp(itX_{nk_n})I_A]\to E[\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)I_A],$$

因此对任一有界的 $\mathscr{F}$ 可测的随机变量 ξ 有

$$E[\exp(itX_{nk_n})\xi]\to E[\exp(-\frac{1}{2}\eta^2t^2)\xi].$$

令 $\xi=\exp(iu\eta+ivI_A)$，其中 u 和 v 是固定的实数，于是(X_{nk_n},η,I_A)的联合特征函数收敛于$(\eta N,\eta,I_A)$的联合特征函数，其中N是与(η,I_A)独立的标准正态随机变量，由此可得

$$(\eta^{-1}X_{nk_n},I_A)\xrightarrow{d}(N,I_A),$$

利用题设条件得

$$(U_{nk_n}^{-1}X_{nk_n},I_A)\xrightarrow{d}(N,I_A),$$

这就证明了定理.

第三章　实值鞅型序列

近年来,鞅型序列的研究有很大发展,本章我们将讨论实值鞅型序列,恒设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间,$\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$是$\mathscr{F}$的单调上升的子σ代数序列,$\overline{T}$表$\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$停时全体,T表$\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$有界停时全体.对$\sigma\in T$,记$T(\sigma)=\{\tau:\tau\in T,\tau\geqslant\sigma\}$.实值可积随机变量序列$\{X_n,n\in N\}$,若满足条件:$\sup\limits_{n\in N}|EX_n|<\infty$,则称$\{X_n,n\in N\}$是$E$有界序列.显然,$L^1$有界的随机变量序列是$E$有界序列.本章所讨论的随机变量仍假定是实值随机变量,并用L^1表实值可积随机变量全体.

§1　各种鞅型序列的定义及其相互关系

定义 1.1　设$X=\{X_n=\sum\limits_{i=0}^{n}D_i,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是可积适应随机变量序列.

(1) 称X是拟鞅[11][12],如果$\sum\limits_{n=0}^{\infty}E|E(D_{n+1}|\mathscr{F}_n)|<\infty$.

(2) 称X是循序鞅[13],如果存在$C_n\subset C_{n+1}$,$C_n\in\mathscr{F}_n$,$(\forall n\geqslant 0)$,$P(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}C_n)=1$,且

$$E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)=X_n,\omega\in C_n,\forall n\geqslant 0.$$

(3) 称X是终鞅[14],如果$P(E(X_{n-1}|\mathscr{F}_n)\neq X_n,i.o.)=0$.

(4) 称X是渐近鞅[15][16],如果网$\{EX_\tau\}_{\tau\in T}$收敛到有限的极限.

(5) 称 X 是概率渐近鞅[17]，如果对任意的 $\epsilon > 0$，有

$$\lim_{\sigma\in T}\sup_{\tau\in T(\sigma)} P(|E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma) - X_\sigma| > \epsilon) = 0,$$

(6) 称 X 是极限鞅[18]，如果

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{m\geqslant n}|E(X_m|\mathscr{F}_n) - X_n| = 0, a.e.,$$

(7) 称 X 是 Mil[19]，如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 p，使对每一 $n \geqslant p$，有

$$P(\sup_{p\leqslant q\leqslant n}|E(X_n|\mathscr{F}_q) - X_q| > \epsilon) \leqslant \epsilon,$$

(8) 称 X 是概率极限鞅[20]，如果对任意 $\epsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{m\geqslant n} P(|E(X_m|\mathscr{F}_n) - X_n| > \epsilon) = 0,$$

(9) 称 X 是 L^1 极限鞅，如果

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{m\geqslant n} E|E(X_m|\mathscr{F}_n) - X_n| = 0, a.e.,$$

(10) 称 X 是拟终鞅[21]，如果

$$\sum_{n=0}^{\infty}|E(D_{n+1}|\mathscr{F}_n)| < \infty \ a.e.,$$

(11) 称 X 是相邻极限鞅[22]，如果

$$|E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) - X_n| \to 0 \ a.e.,$$

由定义立即看出：鞅 ⇒ 循序鞅 ⇒ 终鞅 ⇒ 拟终鞅 ⇒ 相邻极限鞅；鞅 ⇒E 有界上(下)鞅 ⇒ 拟鞅 ⇒ 拟终鞅；L^1 极限鞅 ⇒ 概率极限鞅. 关于鞅型序列之间的关系，我们还有下面的定理，但定理中各命题的逆命题均不成立.

定理 1.1 (1) 拟鞅是渐近鞅；

(2) 渐近鞅是概率渐近鞅，亦是 L^1 极限鞅；

(3) 极限鞅是 Mil；

(4) Mil 是概率极限鞅；

(5) 循序鞅是概率渐近鞅；

(6) 概率渐近鞅是极限鞅.

证 (1) 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是拟鞅，由拟鞅的定义知：$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ n_0 > 0$，使得对一切 $n \geqslant n_0$，有

$$\sum_{k=n}^{\infty} E|E(X_{k+1}|\mathscr{F}_k) - X_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对任一$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$有界停时$\tau, \tau \geqslant n_0$，则存在正整数$n_1 \geqslant \tau$，且

$$|EX_\tau - EX_{n_1}| = |\sum_{k=n_0}^{n_1} E(X_k - X_{n_1}) I_{\{\tau=k\}}|$$

$$= |\sum_{k=n_0}^{n_1} \sum_{n=k}^{n_1-1} \int_{\{\tau=k\}} (X_n - X_{n+1}) dP|$$

$$= |\sum_{n=n_0}^{n_1-1} \sum_{k=n_0}^{n_1} \int_{\{\tau=k\}} (X_n - E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)) dP|$$

$$\leqslant \sum_{n=n_0}^{n_1-1} \sum_{k=n_0}^{n_1} \int_{\{\tau=k\}} |E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) - X_n| dP$$

$$\leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} E|E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) - X_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

于是，对任意$\tau_1, \tau_2 \in T$，$\tau_1, \tau_2 \geqslant n_0$，取$n_1 \geqslant \max(\tau_1, \tau_2)$，则

$$|EX_{\tau_1} - EX_{\tau_2}| \leqslant |EX_{\tau_1} - EX_{n_1}| + |EX_{\tau_2} - EX_{n_1}|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这就证明了X是渐近鞅.

(2) 设$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$是渐近鞅，为证明$X$是概率渐近鞅，又是$L^1$极限鞅，只须证明

$$\lim_{\sigma \in T} \sup_{\tau \in T(\sigma)} E|E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma) - X_\sigma| = 0.$$

这里我们先引用一个结果，即渐近鞅的 Riesz 分解定理，我们将在§3 中证明这个定理（见定理 3.8 与定理 3.7）. 设$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为渐近鞅，则对每一$n \in N$，有$X_n = Y_n + Z_n$，其中$\{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为鞅，而$\{Z_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为渐近鞅且$\lim_{\tau \in T} E|Z_\tau| = 0$. 这样，对任意$\tau, \sigma \in T$，$\tau \geqslant \sigma$，由鞅的 Doob 停时定理有

$$
\begin{aligned}
&E|E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma) - X_\sigma| \\
&= E|E(Y_\tau|\mathscr{F}_\sigma) - Y_\sigma + E(Z_\tau|\mathscr{F}_\sigma) - Z_\sigma| \\
&= E|E(Z_\tau|\mathscr{F}_\sigma) - Z_\sigma| \\
&\leqslant E|Z_\tau - Z_\sigma|,
\end{aligned}
$$

由于$\lim\limits_{\tau\in T} E|Z_\tau| = 0$,于是有

$$\lim_{\sigma\in T}\sup_{\tau\in T(\sigma)} E|E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma) - X_\sigma| = 0.$$

这就证明了(2)成立.

(3) 设 $X = \{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是可积适应随机变量序列,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{m\geqslant n}|E(X_m|\mathscr{F}_n) - X_n| = 0,a.e.$ 的充要条件是 $\operatorname{elim}\limits_{\sigma\in T}\sup\limits_{m\geqslant\sigma}|E(X_m|\mathscr{F}_\sigma) - X_\sigma| = 0,a.e.$. 现设 X 为极限鞅,则 $\{\sup\limits_{m\geqslant\sigma}|E(X_m|\mathscr{F}_\sigma) - X_\sigma|\}_{\sigma\in T}$ 本性收敛于 0,由第一章的定理 4.4 与定理 4.3 知 $\{\sup\limits_{m\geqslant\sigma}|E(X_m|\mathscr{F}_\sigma) - X_\sigma|\}_{\sigma\in T}$ 依概率收敛于 0,即 $\forall\ \varepsilon > 0$,有

$$\lim_{\sigma\in T}P(\sup_{m\geqslant\sigma}|E(X_m|\mathscr{F}_\sigma) - X_\sigma| > \varepsilon) = 0,$$

从而,对任意 $\varepsilon > 0$,必存在正整数 p,使对每一 $n\geqslant p$,有

$$P(\sup_{p\leqslant q\leqslant n}|E(X_n|\mathscr{F}_q) - X_q| > \varepsilon)\leqslant\varepsilon,$$

即 X 是 Mil.

(4) 设 $X = \{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是 Mil,则对任意 $\varepsilon > 0$,存在正整数 p,使对每一 $n\geqslant p$,有

$$P(\sup_{p\leqslant q\leqslant n}|E(X_n|\mathscr{F}_q) - X_q| > \varepsilon)\leqslant\varepsilon,$$

于是,对任意 $n\geqslant q\geqslant p$,有

$$P(|E(X_n|\mathscr{F}_q) - X_q| > \varepsilon)\leqslant\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{q\to\infty}\sup\limits_{n\geqslant q}P(|E(X_n|\mathscr{F}_q) - X_q| > \varepsilon) = 0$,这就证明了 X 为概率极限鞅.

(5) 设 $X = \{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是(C_n)循序鞅,对任意的 $\delta > 0$,存在 $k\in N$,使得 $P(C_k^c) < \delta$. 对固定的 k,$X^{(k)} = \{X_nI_{C_k},\mathscr{F}_n,n\geqslant k\}$ 是鞅,对 $\tau,\sigma\in T$,当 $\tau\geqslant\sigma\geqslant k$ 时,则 τ,σ 为$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant k\}$停时,

由 Doob 停时定理有 $E(X_\tau I_{C_k}|\mathscr{F}_\sigma) = X_\sigma I_{C_k}$，从而有

$$|E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma) - X_\sigma| = |E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma) - X_\sigma| I_{C_k^c},$$

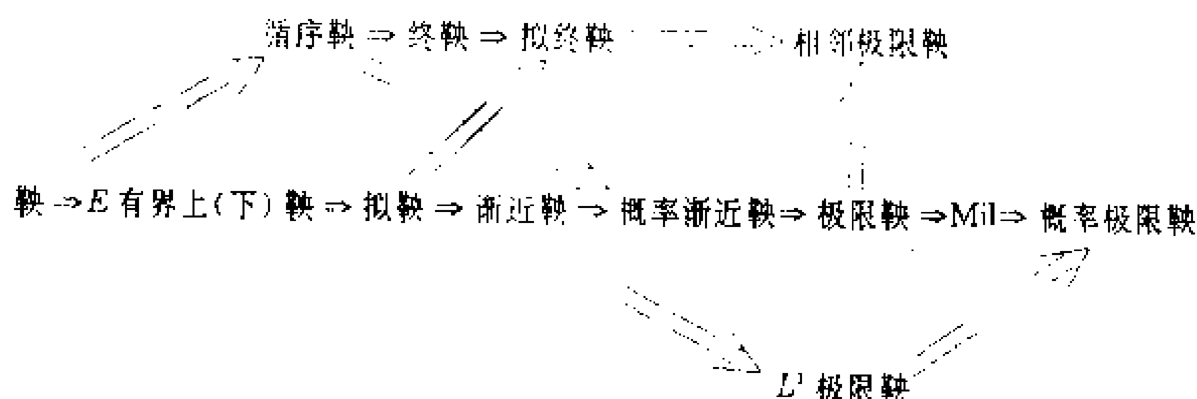
于是，对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$P(|E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma) - X_\sigma| > \varepsilon) \leqslant P(C_k^c) < \delta,$$

由 ε,δ 的任意性知 X 是概率渐近鞅.

(6) 我们在第六章就更一般的 **B** 值情形证明概率渐近鞅是极限鞅，这里证明略.

由上面的讨论知，关于鞅型序列有如下的真蕴含关系：



§2 鞅型序列的收敛性及收敛条件

定义 2.1 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是可积适应随机变量序列，称 X 满足条件 (C)（或 (D)、(B)、(d)），并记为 $X \in (C)$（或 (D)、(B)、(d)），如果 $\int_{\{\tau<\infty\}} |X_\tau| dP < \infty, \forall\, \tau \in \overline{T}$（或 $\sup\limits_n E|X_n| < \infty$，$\sup\limits_{\tau\in T} E|X_\tau| < \infty$，$\varliminf\limits_{n\to\infty} E|X_n| < \infty$）.

显然，$(d) \Leftarrow (D) \Leftarrow (B) \Rightarrow (C)$. 这四个条件是研究鞅型序列收敛时通常使用的条件. 已知对实值渐近鞅而言，这四个条件是等价的. Yamasaki[23] 指出：对极限鞅而言，条件 (C) 与 (D) 不等价.

首先，我们讨论 Mil 的收敛性（见[24][25]）.

定理 2.1 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是一 Mil，若 $EX_\tau^- I_{\{\tau<\infty\}}$

$<\infty, \forall \tau \in \overline{T}$,则

$$\lim_{n\to\infty} X_n \ a.e. \text{ 存在且} \lim_{n\to\infty} X_n > -\infty \ a.e..$$

证 用反证法证明，设$\{X_n\}$不是 $a.e.$ 收敛，令

$$A_{(a,b)} = \{\liminf X_n(\omega) < a < b < \limsup X_n(\omega)\},$$

则对某实数$a<b$,有$P(A_{(a,b)})>0$,不失一般性，不妨设$a\geqslant 0$（否则考虑$\{X_n+c\}$即可，其中c为常数，$c\geqslant|a|$)，我们先证明下面的论断成立：

令$n_1\in N,\varepsilon>0$,则存在$n_2>n_1$,使得每个满足下列条件的D：$D\in\mathscr{F}_{n_1}$且$P(D)>\delta P(A_{(a,b)})$,(其中$0<\delta<1$)每个$n\geqslant n_2$,均存在$E\in\mathscr{F}_{n_2}$,$P(E)<\varepsilon$,$E\cap D=\varnothing$,且

$$\int_E X_n dP \geqslant \frac{b-a}{3}[(1-\delta)P(A_{(a,b)})-\frac{7}{4}\varepsilon],$$

事实上，简记$A=A_{(a,b)}$,因$A\in\bigvee_k \mathscr{F}_k$,对$\varepsilon>0$由测度论知，可取$k>n_1$,$A_1\in\mathscr{F}_k$,且$P(A\triangle A_1)<\frac{\varepsilon}{2}$,再由 Mil 的定义，可设$k$足够大使得对一切$n\geqslant k$,有

$$P(\sup_{k\leqslant p\leqslant n}|E(X_n|\mathscr{F}_p)-X_p|>\frac{b-a}{3})<\frac{\varepsilon}{8}. \tag{2.1}$$

取$p_1>k$,由于$A\subset\{\limsup X_n>b\}\subset\bigcup_{n=p_1}^{\infty}\{X_n>b\}$,$(\bigcup_{n=p_1}^{m}\{X_n>b\})\uparrow\bigcup_{n=p_1}^{\infty}\{X_n>b\}(m\to\infty)$,于是，可取$p_1+(l-1)$使$P(A-\bigcup_{n=p_1}^{p_1+l-1}\{X_n>b\})<\frac{\varepsilon}{4}$,$p_1$至$p_1+(l-1)$的自然数记为$p_1<p_2<\cdots<p_l$,从而，

$$\begin{aligned}
&P(A_1\setminus\bigcup_{n=p_1}^{p_l}\{X_n>b\})\\
&\leqslant P(A\setminus\bigcup_{n=p_1}^{p_l}\{X_n>b\})+P(A_1\setminus A)\\
&<\frac{3}{4}\varepsilon,
\end{aligned}$$

于是，对序列 $k < p_1 < p_2 < \cdots < p_l$，若 $1 \leqslant i \leqslant l$，令 $B_1 = \{X_{p_1} > b\} \cap A_1$，$B_i = (\{X_{p_i} > b\} \cap A_1) \setminus \bigcup_{1 \leqslant j < i} \{X_{p_j} > b\}$，$i = 2,3,\cdots,l$. 则 $\{B_i\}$ 两两不交，令

$$B = \bigcup_{i=1}^{l} B_i = A_1 \cap (\bigcup_{i=1}^{l} \{X_i > b\}).$$

故

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{l} P(B_i) = P(A_1 \cap (\bigcup_{i=1}^{l} \{X_i > b\})) \\
&= P(A_1) - P(A_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{l} \{X_{p_i} > b\}) \\
&= P(A_1 \setminus A) + P(A_1 \cap A) - P(A_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{l} \{X_{p_i} > b\}) \\
&= P(A_1 \setminus A) + P(A) - P(A \setminus A_1) - P(A_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{l} \{X_{p_i} > b\}) \\
&> P(A) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{3\varepsilon}{4} \\
&= P(A) - \frac{5}{4}\varepsilon.
\end{aligned}$$

注意，$B_i \in \mathscr{F}_{p_i}$，$B \in \mathscr{F}_{p_l}$，$B \subset A_1$，且 $P(B \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}$. 取 $q_1 > p_l$，由于 $A \subset \{\liminf X_n < a\} \subset \bigcup_{n=q_1}^{\infty} \{X_n < a\}$，则可取 $q_1 + (m-1)$ 使

$$P(A \setminus \bigcup_{n=q_1}^{q_1+(m-1)} \{X_n < a\}) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

记 q_1 至 $q_1 + (m-1)$ 的自然数为 $q_1 < q_2 < \cdots < q_m$，于是，对序列 $p_l < q_1 < q_2 < \cdots < q_m$，当 $1 \leqslant j \leqslant m$，令

$$C_1 = \{X_{q_1} < a\} \cap B,$$

$$C_j = (\{X_{q_j} < a\} \cap B) \setminus (\bigcup_{1 \leqslant i < j} \{X_{q_i} < a\}),$$

$$j = 2,3,\cdots,m.$$

则 $\{C_j\}$ 两两不交，记 $C = \bigcup_{j=1}^{m} C_j = B \cap (\bigcup_{j=1}^{m} \{X_{q_j} < a\})$. 于是，

$$\sum_{j=1}^{m}P(C_j) = P(B \cap (\bigcup_{j=1}^{m}\{X_{q_j} < a\}))$$

$$= P(B) - P(B \setminus \bigcap_{j=1}^{m}\{X_{q_j} < a\})$$

$$\geqslant P(B) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4}$$

$$= P(B) - \frac{3}{4}\varepsilon.$$

令 $n_2 = q_m$，则 $n_2 > n_1$，对 $n \geqslant n_2$，$D \in \mathscr{F}_{n_1}$，$P(D) < \delta P(A)$，$(0 < \delta < 1)$，对 $1 \leqslant i \leqslant l$，令

$$H_i = \{|E(X_n|\mathscr{F}_{p_i}) - X_{p_i}| > \frac{b-a}{3}\},$$

由(2.1)式得 $P(\bigcup_{i=1}^{l}H_i) < \frac{\varepsilon}{8} < \frac{\varepsilon}{2}$. 令 $B_i^1 = B_i \setminus (H_i \cup D)$，$1 \leqslant i \leqslant l$，则 $\{B_i^1\}$ 两两不交，记 $B^1 = \bigcup_{i=1}^{l}B_i^1$，$B^1 \in \mathscr{F}_{p_l}$，且有

$$\sum_{i=1}^{l}P(B_i^1) = P(\bigcup_{i=1}^{l}B_i^1)$$

$$= P(\bigcup_{i=1}^{l}(B_i \cap H_i^c \cap D^c))$$

$$= P([\bigcup_{i=1}^{l}(B_i \cap H_i^c)] \cap D^c)$$

$$\geqslant P(\bigcup_{i=1}^{l}(B_i \cap H_i^c)) - P(D)$$

$$\geqslant P(\bigcup_{i=1}^{l}B_i) - P(\bigcup_{i=1}^{l}H_i) - P(D)$$

$$\geqslant P(A) - \frac{5}{4}\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} - \delta P(A)$$

$$= (1-\delta)P(A) - \frac{7}{4}\varepsilon.$$

对 $1 \leqslant j \leqslant m$，令

$$K_j = \{|E(X_n|\mathscr{F}_{q_j}) - X_{q_j}| > \frac{b-a}{3}\},$$

由(2.1)式得 $P(\bigcup_{j=1}^{m} K_j) < \frac{\varepsilon}{8}$. 令 $C_j^1 = B^1 \cap (C_j \cap K_j^c)$, $j = 1, 2, \cdots, m$, 则 $C_j^1 \in \mathscr{F}_{q_j}$, $\bigcup_{j=1}^{m} C_j^1 = B^1$、且

$$\sum_{j=1}^{m} P(C_j^1) \geqslant P(\bigcup_{j=1}^{m} C_j^1) = P(B^1 \cap (\bigcup_{j=1}^{m}(C_j \cap K_j^c)))$$

$$= P(B^1) - P(B^1 \setminus \bigcup_{j=1}^{m}(C_j \cap K_j^c)).$$

由于 $B^1 \subset B$, 故 $B^1 \setminus \bigcup_{j=1}^{m}(C_j \cap K_j^c) \subset B \setminus \bigcup_{j=1}^{m}(C_j \cap K_j^c)$, 又由于 $\bigcup_{j=1}^{m}(C_j \cap K_j^c) \subset \bigcup_{j=1}^{m} C_j \subset B$ 及 $\{C_j\}$ 两两不交, 故

$$\begin{aligned}
&P(B^1 \setminus \bigcup_{j=1}^{m}(C_j \cap K_j^c)) \\
&\leqslant P(B \setminus \bigcup_{j=1}^{m}(C_j \cap K_j^c)) \\
&= P(B) - P(\bigcup_{j=1}^{m}(C_j \cap K_j^c)) \\
&= P(B) - \sum_{j=1}^{m} P(C_j \cap K_j^c) \\
&= P(B) - \sum_{j=1}^{m} P(C_j) + \sum_{j=1}^{m} P(C_j \cap K_j) \\
&\leqslant P(B) - \sum_{j=1}^{m} P(C_j) + P(\bigcup_{j=1}^{m} K_j) \\
&\leqslant \frac{3}{4}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{8} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

于是, $\sum_{j=1}^{m} P(C_j^1) \geqslant P(\bigcup_{j=1}^{m} C_j^1) > P(B^1) - \varepsilon$.

对 $1 \leqslant i \leqslant l$, 由于在 B_i^1 上,

$$E(X_n | \mathscr{F}_{p_i}) \geqslant X_{p_i} - \frac{b-a}{3} \geqslant \frac{2b+a}{3},$$

于是有

$$\int_{B_i^1} X_n dP = \int_{B_i^1} E(X_n | \mathscr{F}_{p_i}) dP \geqslant \frac{2b+a}{3} P(B_i^1). \qquad (2.2)$$

对 $1 \leqslant j \leqslant m$，令 $L_{ij} = B_i^1 \cap C_j, M_i = B_i^1 \setminus \bigcup_{j=1}^{m} L_{ij}$，由于 $L_{ij} \in \mathscr{F}_{q_j}$，且在 L_{ij} 上有

$$E(X_n | \mathscr{F}_{q_j}) \leqslant X_{q_j} + \frac{b-a}{3} \leqslant \frac{b+2a}{3},$$

故

$$\int_{L_{ij}} X_n dP = \int_{L_{ij}} E(X_n | \mathscr{F}_{q_j}) dP \leqslant \frac{b+2a}{3} P(L_{ij}).$$ 将上式对 $1 \leqslant j \leqslant m$ 求和立即得

$$\int_{B_m^1 \setminus M_j} X_n dP \leqslant \frac{b+2a}{3} P(B_i^1 \setminus M_i) \leqslant \frac{b+2a}{3} P(B_i^1). \qquad (2.3)$$

比较(2.2)与(2.3)两式，立即得

$$\int_{M_i} X_n dP \geqslant \frac{b-a}{3} P(B_i^1). \qquad (2.4)$$

令 $E = \bigcup_{i=1}^{l} M_i$，因 $M_i \in \mathscr{F}_{q_m}$，故 $E \in \mathscr{F}_{q_m} = \mathscr{F}_{n_2}$，显然，$E \cap D = \varnothing$，$P(E) = P(B^1 \setminus \bigcup_{j=1}^{m} (C_j^1)) < \varepsilon$. 将(2.4)式两边对 $1 \leqslant i \leqslant l$ 求和，立即得

$$\int_{E} X_n dP \geqslant \frac{b-a}{3} \sum_{i=1}^{l} P(B_i^1) \geqslant \frac{b-a}{3} [(1-\delta)P(A) - \frac{7}{4}\varepsilon].$$

这就证明了前面论断的正确性. 下面用归纳法可求得正整数列 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ 及集合序列 $\{D_i\}$ 满足：$\{D_i\}$ 两两不交，$P(D_i) < \frac{P(A)}{3^i}$ 且

$$\int_{D_i} X_{n_i} dP \geqslant \frac{b-a}{3} (\frac{1}{2} P(A) - \frac{7}{4 \times 3^i} P(A)), \forall\, i \geqslant 2.$$

任取正整数 n_1 及 $D_1 = \varnothing \in \mathscr{F}_{n_1}$，$P(D_1) = 0 < \frac{P(A)}{3}$，取 $\varepsilon =$

$\frac{P(A)}{3^2}$，于是由前面的论断知：存在 $n_2 > n_1$，$D_2 \in \mathscr{F}_{n_2}$，$P(D_2) < \frac{P(A)}{3^2}$，$D_2 \cap D_1 = \varnothing$，且

$$\int_{D_2} X_{n_2} dP \geqslant \frac{b-a}{3}\left[\frac{1}{2}P(A) - \frac{7}{4\times 3^2}P(A)\right].$$

由于 $P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) < (\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2})P(A)$，$D_1 \cup D_2 \in \mathscr{F}_{n_2}$，取 $\varepsilon = \frac{P(A)}{3^3}$，再利用前面的论断知：存在 $n_3 > n_2$，存在 $D_3 \in \mathscr{F}_{n_3}$，$P(D_3) < \frac{P(A)}{3^3}$，$(D_1 \cup D_2) \cap D_3 = \varnothing$，且

$$\int_{D_3} X_{n_3} dP \geqslant \frac{b-a}{3}\left[\frac{1}{2}P(A) - \frac{7}{4\times 3^3}P(A)\right].$$

设 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ 及 $D_1, D_2, \cdots, D_k$ 已求出，$D_1, D_2, \cdots, D_k$ 两两不相交且 $P(D_i) < \frac{P(A)}{3^i}$，$i = 1, \cdots, k$，

$$\int_{D_i} X_{n_i} dP \geqslant \frac{b-a}{3}\left[\frac{1}{2}P(A) - \frac{7}{4\times 3^i}P(A)\right]$$

因 $\bigcup_{i=1}^{k} D_i \in \mathscr{F}_{n_k}$，且 $P(\bigcup_{i=1}^{k} D_i) = \sum_{i=1}^{k} P(D_i) < \sum_{i=1}^{k} \frac{P(A)}{3^i}$，这时取 $\varepsilon = \frac{P(A)}{3^{k+1}}$，用前述论断知：存在 $n_{k+1} > n_k$，$D_{k+1} \in \mathscr{F}_{n_{k+1}}$，$P(D_{k+1}) < \frac{P(A)}{3^{k+1}}$，$(\bigcup_{i=1}^{k} D_i) \cap D_{k+1} = \varnothing$，且

$$\int_{D_{k+1}} X_{n_{k+1}} dP \geqslant \frac{b-a}{3}\left[(1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{3^i})P(A) - \frac{7}{4\times 3^{k+1}}P(A)\right]$$

$$\geqslant \frac{b-a}{3}\left[\frac{1}{2}P(A) - \frac{7}{4\times 3^{k+1}}P(A)\right].$$

显然 $P(D_i) > 0$，$i \geqslant 2$. 定义停时 τ 如下：

$$\tau(\omega) = \begin{cases} n_k, \omega \in D_k, k = 2, 3, \cdots, \\ \infty, \text{其它}. \end{cases}$$

则 $\tau \in \overline{T}$，且

$$\int_{\{\tau<\infty\}} X_\tau^+ dP = \sum_{k=2}^{\infty} \int_{\{\tau=n_k\}} X_{n_k}^+ dP$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \int_{D_k} X_{n_k}^+ dP \geqslant \sum_{k=2}^{\infty} \int_{D_k} X_{n_k} dP$$

$$\geqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b-a}{3}\left[\frac{1}{2}P(A) - \frac{7}{4\times 3^k}P(A)\right] = \infty.$$

这样就得到矛盾，故 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ a.e. 存在.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n > -\infty$ a.e. 不成立，则 $P(H_1) = \delta > 0$，其中 $H_1 = \{\lim\limits_{n\to\infty} X_n = -\infty\}$. 则对任意的 $0 < \varepsilon < \delta$，存在子列 $\{m'_i\}$，使得

$$\sup_{\sigma\in T(m'_i)} \sup_{m\geqslant\sigma} P\left(|E(X_m|\mathscr{F}_\sigma) - X_\sigma| > \frac{1}{4}\right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2^{i+2}},\ i \geqslant 1.$$

对任意固定的 $m_1 \geqslant m'_1$，取 $M_1 > 1$ 充分大使

$$P(X_{m_1} \leqslant -M_1 + 1) \leqslant \frac{\varepsilon}{8}.$$

由 H_1 的定义知存在 $n_1 > m_1$ 使得

$$P\left(H_1 \backslash \left\{X_{n_1} < -\frac{4M_1}{\delta}\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

令

$$A_1 = \{X_{m_1} > -M_1 + 1, |E(X_{n_1}|\mathscr{F}_{m_1}) - X_{m_1}| \leqslant 1\},$$

$$B_1 = \left\{X_{n_1} < -\frac{4M_1}{\delta}\right\} \cap A_1.$$

则 $P(H_1\backslash A_1) < \frac{\varepsilon}{4}$，$P(H_1A_1\backslash B_1) < \frac{\varepsilon}{4}$，$P(H_1B_1) > P(H_1) - \frac{\varepsilon}{2}$，且

$$\int_{A_1\backslash B_1} X_{n_1} dP = \int_{A_1} E(X_{n_1}|\mathscr{F}_{m_1}) dP - \int_{B_1} X_{n_1} dP$$

$$\geqslant M_1\left[\frac{4}{\delta}P(B_1) - P(A_1)\right].$$

若$(H_k,m_k,M_k,n_k,A_k,B_k)$已给定，且

$$M_k > 1, n_k > m_k > \max(n_{k-1}, m'_k),$$

$$B_{k-1} \supset A_k \supset B_k, A_k \in \mathscr{F}_{m_k}, B_k \in \mathscr{F}_{n_k},$$

$$P(H_k) \geqslant P(H_1) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^j}\varepsilon, P(H_k - A_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k-1}},$$

$$P(H_k A_k - B_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k-1}},$$

$$\int_{A_k - B_k} X_{n_k} dP \geqslant M_k\left(\frac{4}{\delta}P(B_k) - P(A_k)\right), 2 \leqslant k < i.$$

令 $H_i = H_{i-1}B_{i-1}$，则有

$$P(H_i) \geqslant P(H_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{2^{i-1}} \geqslant P(H_1) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^j}\varepsilon.$$

固定 $m_i > \max(n_{i-1}, m'_i)$，取 $M_i > 1, n_i > m_i$ 使有

$$P(X_{m_i} \leqslant - M_i + 1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{i-2}},$$

$$P\left(H_i - \left\{X_{n_i} < - \frac{4M_i}{\delta}\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{2^{i-2}}.$$

再令

$$A_i = \{X_{m_i} > - M_{i-1}, |E(X_{n_i} | \mathscr{F}_{m_i}) - X_{m_i}| \leqslant 1\},$$

$$B_i = A_i \cap \left\{X_{n_i} < - \frac{4M_i}{\delta}\right\},$$

则 $P(H_i - A_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i-1}}, P(H_iA_i - B_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i-1}}$，且

$$\int_{A_i - B_i} X_{n_i} dP \geqslant M_i\left(\frac{4}{\delta}P(B_i) - P(A_i)\right).$$

由归纳法可构造一列$(H_i,m_i,M_i,n_i,A_i,B_i)_{i\geqslant 1}$，因为

$$P(B_i) \geqslant P(H_iB_i) \geqslant P(H_1) - \sum_{k=1}^{i} \frac{\varepsilon}{2^k} > \frac{\delta}{2}, i \geqslant 1.$$

于是 $\frac{4}{\delta}P(B_i) - P(A_i) \geqslant 1, i \geqslant 1$. 现令

$$\tau(\omega) = \begin{cases} n_i, \omega \in A_i - B_i, i \geqslant 1, \\ \infty, \text{其它}. \end{cases}$$

则 $\tau \in T$ 且 $EX_\tau^- I_{\{\tau<\infty\}} = \infty$，这就得到矛盾，故 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n > -\infty$ $a.e.$.

推论 2.2 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是 Mil，满足条件(C)，则 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ $a.e.$ 存在且有限.

证 由定理 2.1 知 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ $a.e.$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n > -\infty$ $a.e.$. 再注意到若 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是 Mil，则 $-X = \{-X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 仍是 Mil，由 X 满足条件(C) 知 $E(-X_\tau)^- I_{\{\tau<\infty\}} < \infty, \forall \tau \in T$，于是用定理 2.1 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(-X_n)$ $a.e.$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(-X_n) > -\infty$ $a.e.$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n < \infty$ $a.e.$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ $a.e.$ 有限.

定理 2.3 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是 Mil，满足条件(d)，则 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ $a.e.$ 存在且可积.

证 反设 $\{X_n\}$ 不 $a.e.$ 收敛，往证 $\lim\limits_{n\to\infty} E|X_n| = \infty$. 由 $\{X_n\}$ 不 $a.e.$ 收敛，总存在实数 $a < b$，

$$A = \{\lim\inf X_n(\omega) < a < b < \lim\sup X_n(\omega)\},$$

使得 $P(A) > 0$. 不失一般性，不妨设 $a \geqslant 0$，类似于定理 2.1 中的证明我们可证得下面的结论成立：

令 $n_1 \in N, 0 < \varepsilon \leqslant \frac{P(A)}{7}$，则存在 $n_2 \geqslant n_1$，使对每一 $D \in \mathscr{F}_{n_1}$，$P(D) < \frac{P(A)}{2}$ 及每一 $n \geqslant n_2$，存在 $E \in \mathscr{F}_{n_2}, P(E) < \varepsilon, E \cap D = \varnothing$，有

$$\int_E |X_n| dP \geqslant \frac{(b-a)P(A)}{12}.$$

为证定理成立，反复用上述结论，我们可用归纳法构造出具有下述性质的递增序列 $\{n_p\}$：

当 $D_p \in \mathscr{F}_{n_p}, P(D_p) \leqslant \frac{P(A)}{2^p}, n \geqslant n_{p+1}$，存在 $D_{p+1} \in \mathscr{F}_{n_{p+1}}$，$P(D_{p+1}) < \frac{P(A)}{2^{p+1}}, D_{p+1} \cap D_p = \varnothing$，且

$$\int_{D_{p+1}} |X_n| dP \geqslant \frac{(b-a)P(A)}{12}.$$

现令 $n \geqslant n_p$，对 $i \leqslant p$，由上面用归纳法构造出的在不相交的集合 $\{D_i\}$ 满足：$D_i \in \mathscr{F}_{n_i}, D_1 = \varnothing, P(D_i) \leqslant \frac{P(A)}{2^i}$，且

$$\int_{D_i} |X_n| dP \geqslant \frac{(b-a)P(A)}{12}.$$

于是，当 $n \geqslant n_p$ 时有：

$$E|X_n| \geqslant \sum_{i=1}^{p} \int_{D_i} |X_n| dP \geqslant \frac{(p-1)(b-a)P(A)}{12}.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} E|X_n| = \infty$，这就得到矛盾，故 $\{X_n\}$ $a.e.$ 收敛，用 Fatou 引理知 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ 可积，由此知 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$ $a.e.$ 有限.

定义 2.2 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是可积适应随机变量序列，若存在上升的集合序列 $\{A_n\}$，满足：

(1) $A_n \in \mathscr{F}_n, n \in N$，且 $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n = \Omega$，

(2) 对每一固定的 $k \in N$，$\{X_n I_{A_k}, n \geqslant k\}$ 为一致可积. 则称 X 为渐近一致可积的适应序列，显然，渐近一致可积性弱于一致可积性.

定理 2.4 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为渐近一致可积的适应序列，则下列陈述等价：

(1) $\{X_n\}$ $a.e.$ 收敛；

(2) $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为 Mil.

证 (1)⇒(2) 由渐近一致可积的定义知：存在上升的集合序列 $\{A_n\}$ 满足：$A_n \in \mathscr{F}_n, n \in N$，$\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n = \Omega$，且对每一固定的 $k \in N$，$\{X_n I_{A_k}, n \geqslant k\}$ 为一致可积，于是，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists\, k \in N$，使 $P(A_k^c)$

$<\frac{\varepsilon}{2}$. 对上述固定的 k, $\{X_n I_{A_k}, n\geqslant k\}$ 为一致可积且 $\{X_n I_{A_k}\}$ $a.e.$ 收敛，因此 $\{X_n I_{A_k}\}$ L^1 收敛，从而 $\{X_n I_{A_k}, \mathscr{F}_n, n\geqslant k\}$ 为 Mil（见[19]的定理 2）. 这样，存在正整数 $p\geqslant k$，使对每一 $n\geqslant p$，有

$$P(\sup_{p\leqslant q\leqslant n}|E(X_n I_{A_k}|\mathscr{F}_q)-X_q I_{A_k}|>\varepsilon)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}&P(\sup_{p\leqslant q\leqslant n}|E(X_n|\mathscr{F}_q)-X_q|>\varepsilon)\\&\leqslant P(\sup_{p\leqslant q\leqslant n}|E(X_n I_{A_k}|\mathscr{F}_q)-X_q I_{A_k}|>\varepsilon)+P(A_k^c)\\&\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

即 $X=\{X_n, \mathscr{F}_n, n\in N\}$ 为 Mil.

(2) ⇒(1)　设 X 为 Mil，则对每一 $k\in N$, $\{X_n I_{A_k}, \mathscr{F}_n, n\geqslant k\}$ 仍为 Mil. 事实上，$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ p\geqslant k$，使对一切 $n\geqslant p$，有

$$P(\sup_{p\leqslant q\leqslant n}|E(X_n|\mathscr{F}_q)-X_q|>\varepsilon)\leqslant\varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned}&P(\sup_{p\leqslant q\leqslant n}|E(X_n I_{A_k}|\mathscr{F}_q)-X_q I_{A_k}|>\varepsilon)\\&\leqslant P(\sup_{p\leqslant q\leqslant n}|E(X_n|\mathscr{F}_q)-X_q|>\varepsilon)\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

又 $\{X_n I_{A_k}, n\geqslant k\}$ 一致可积，从而 $\{X_n I_{A_k}\}$ $a.e.$ 收敛，由 A_k 的任意性知 $\{X_n\}$ $a.e.$ 收敛.

下面讨论拟终鞅的收敛性.

定义 2.3　设 $X=\{X_n, \mathscr{F}_n, n\in N\}$ 是可积适应随机变量序列. 称 X 为拟终(上)下鞅，若

$$\sum_{n=0}^{\infty}[E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)-X_n]^{(+)-}<\infty\ a.e..$$

显然，X 为拟终鞅的充要条件是 X 既是拟终上鞅，又是拟终下鞅.

定理 2.5　设 $X=\{X_n, \mathscr{F}_n, n\in N\}$ 是拟终下鞅，若满足条件 $\int_{\{\tau<\infty\}}X_\tau^+ dP<\infty$, $\forall\ \tau\in\overline{T}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n$ $a.e.$ 存在且 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n>-\infty$ $a.$

$e.$.

证 令 $Y_0=0, Z_0=X_0, Y_n=\sum_{i=0}^{n-1}[E(X_{i+1}|\mathscr{F}_i)-X_i]^-, Z_n=X_n+Y_n, n\geqslant 1$,则 $\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为下鞅,对任意取定的 $\lambda>0$,令

$$\tau=\inf\{n\in N: Y_{n-1}>\lambda\},\ \inf\varnothing=\infty.$$

则 $\tau\in\overline{T}$,由 Doob 停时定理知 $\{W_n=Z_{\tau\wedge n},\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为下鞅,现设 σ 是任一 $\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 停时,则 $\tau\wedge\sigma\in\overline{T}$,且

$$\int_{\{\sigma<\infty\}} W_\sigma^+ dP=\int_{\{\sigma<\infty\}} Z_{\tau\wedge\sigma}^+ dP\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\{\sigma=k\}}(X_{\tau\wedge k}^+ + Y_{\tau\wedge k})dP$$

$$\leqslant\lambda+\int_{\{\tau\wedge\sigma<\infty\}} X_{\tau\wedge\sigma}^+ dP<\infty.$$

由第二章第一节的定理 1.9 知 $\lim_{n\to\infty}W_n=\lim_{n\to\infty}Z_{\tau\wedge n}$ $a.e.$ 收敛且 $\lim_{n\to\infty}W_n>-\infty$,从而在 $\{\tau=\infty\}$ 上 $\lim_{n\to\infty}Z_n$ $a.e.$ 收敛且 $\lim_{n\to\infty}Z_n>-\infty$ $a.e.$. 因而

$$\{\sup Y_n\leqslant\lambda\}\subset\{\lim_{n\to\infty}X_n \text{ 存在且} >-\infty\},$$

由 λ 的任意性及拟终下鞅的定义知 $\lim_{n\to\infty}X_n$ $a.e.$ 收敛且

$$\lim_{n\to\infty}X_n>-\infty\ a.e..$$

推论 2.6 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是拟终鞅,满足条件 (C),则 $\lim_{n\to\infty}X_n$ $a.e.$ 收敛且有限.

Tomkins(1983) 分别给出例子说明在条件 (D) 下概率极限鞅与终鞅不一定具有 $a.e.$ 收敛性(见[26]). 下面我们讨论概率极限鞅的依概率收敛性.

定理 2.7 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是一概率极限鞅,满足条件 (C),则 $\{X_n\}$ 依概率收敛.

证 由概率极限鞅的定义可选取子列 $\{n_k\}$ 使有

$$\sup_{m\geqslant n_k}P(|E(X_m|\mathscr{F}_{n_k})-X_{n_k}|>\frac{1}{2^k})<\frac{1}{2^k}, k\geqslant 0.$$

令 $A_k = \{|E(X_{n_{k+1}}|\mathscr{F}_{n_k}) - X_{n_k}| > \frac{1}{2^k}\}, k \geqslant 0$，则 $\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) < \infty$，于是由Borel－Cantelli引理知$\{X_{n_k}, \mathscr{F}_{n_k}, k \in N\}$是拟终鞅. 对任意的子列 $\{m_k\}$，$\{X_{m_k}, \mathscr{F}_{m_k}, k \in N\}$ 仍是概率极限鞅，由上面的证明知存在子列$\{n_k\} \subset \{m_k\}$ 使得$\{X_{n_k}, \mathscr{F}_{n_k}, k \in N\}$ 是一拟终鞅且满足条件(C)，由推论 2.5 知$\lim\limits_{n \to \infty} X_{n_k}$ $a.e.$ 存在且有限. 由[27]中第二章的定理 3.8(P.40) 知$\{X_n\}$ 依概率收敛.

定理 2.8 设$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$是概率极限鞅，满足条件$(D)$，则$\{X_n\}$ 依概率收敛.

证 首先证明对任一概率极限鞅必存在子列$\{n_k\}$，使其$\{X_{n_k}, \mathscr{F}_{n_k}, k \in N\}$为Mil. 事实上，由概率极限鞅的定义知存在子列$\{n_k\}$使有

$$\sup_{m \geqslant n_k} P(|E(X_m|\mathscr{F}_{n_k}) - X_{n_k}| > \frac{1}{2^k}) < \frac{1}{2^k}, k \geqslant 0.$$

对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 p，使有

$$\sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon.$$

于是，对每一 $m \geqslant p$，有

$$\begin{aligned} &P(\sup_{p \leqslant q \leqslant m} |E(X_{n_m}|\mathscr{F}_{n_q}) - X_{n_q}| > \varepsilon) \\ &\leqslant \sum_{q=p}^{m} P(|E(X_{n_m}|\mathscr{F}_{n_q}) - X_{n_q}| > \frac{1}{2^q}) \\ &\leqslant \sum_{q=p}^{m} \frac{1}{2^q} < \varepsilon. \end{aligned}$$

即$\{X_{n_k}, \mathscr{F}_{n_k}, k \in N\}$为Mil. 任取子列$\{m_k\} \subset N$，则$\{X_{m_k}, \mathscr{F}_{m_k}, k \in N\}$ 仍为概率极限鞅，由上面证明知存在子列$\{n_k\} \subset \{m_k\}$ 使$\{X_{n_k}, \mathscr{F}_{n_k}, k \in N\}$ 为 Mil. 由 X 满足条件(D) 知$\{X_{n_k}\}$ 亦满足条件(D)，更满足条件(d)，用定理2.3 知$\lim\limits_{k \to \infty} X_{n_k}$ $a.e.$ 存在且有限. 故$\{X_n\}$ 依概率收敛.

推论 2.9 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是概率极限鞅，

(1) 若$\{X_n\}$一致可积，则$\{X_n\}L^1$收敛；

(2) 若$\{|X_n|^p, n\in N\}$一致可积，则$\{X_n\}L^p$收敛.

定理 2.10 设$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是渐近一致可积的适应序列，则下列陈述等价：

(1) $\{X_n\}$依概率收敛；

(2) $\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是概率极限鞅.

证 (1)⇒(2) 设$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$关于$\{A_n\}$渐近一致可积，对任意$\varepsilon>0,\delta>0$，必可选取$k$使得$P(A_k)>1-\frac{\delta}{2}$，这时$\{X_nI_{A_k},n\geqslant k\}$仍依概率收敛且一致可积，所以$\{X_nI_{A_k},\mathscr{F}_n,n\geqslant k\}$是概率极限鞅，故必存在$n_0\geqslant k$，使当$m\geqslant n\geqslant n_0$时有

$$P(|E(X_mI_{A_k}|\mathscr{F}_n)-X_nI_{A_k}|>\varepsilon)<\frac{\delta}{2},$$

这时有

$$\begin{aligned}&P(|E(X_m|\mathscr{F}_n)-X_n|>\varepsilon)\\&\leqslant P(|E(X_mI_{A_k}|\mathscr{F}_n)-X_nI_{A_k}|>\varepsilon)+P(A_k^c)\\&<\delta.\end{aligned}$$

由ε,δ的任意性知$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是概率极限鞅.

(2)⇒(1) 因为$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是概率极限鞅，所以对任意的$k\in N$，$\{X_nI_{A_k},\mathscr{F}_n,n\geqslant k\}$仍是概率极限鞅，而$\{X_nI_{A_k},n\geqslant k\}$一致可积，由定理 2.8 知$\{X_nI_{A_k}\}$依概率收敛，再由$k$的任意性知$\{X_n\}$依概率收敛.

最后，我们讨论弱鞅的收敛性. 弱鞅的概念是由 P. Nelson(1970[28]) 最先引入并加以研究的.

定义 2.4 可积随机变量序列$\{X_n,n\in N\}$称为弱鞅（或弱下鞅），如果

$$E(X_n|X_m)=X_m,\ \forall\, n\geqslant m.$$

$$(\text{或 } E(X_n|X_m)\geqslant X_m).$$

引理 2.11 设$\mathscr{A}$是$\mathscr{F}$的任一子σ代数，Y是$\mathscr{A}$可测的可

积随机变量，X 是可积随机变量，满足下列二条件之一：

(1) $E(X|\mathscr{A}) = Y$；

(2) $E(X|\mathscr{A}) \geqslant Y \geqslant 0$.

则有

(i) $$\int_{\{|Y|\leqslant\lambda\}} |X-Y|dP \leqslant 2\int_{\{|Y|\leqslant\lambda,|X|\leqslant\lambda\}} |X-Y|dP + 2(E|X| - E|Y|),$$

(ii) $$\int_{\{|X|\leqslant\lambda,|Y|\leqslant\lambda\}} (X-Y)^2 dP \leqslant \lambda E\{\Phi(X) - \Phi(Y)\}.$$

其中

$$\Phi(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2}{\lambda}, |t| \leqslant \lambda, \\ 2|t| - \lambda, |t| \geqslant \lambda, \end{cases} \qquad 0 < \lambda < \infty.$$

证 先证(i). (i) 的左边 $= \int_{\{|Y|\leqslant\lambda\}} |X-Y|dP$

$$= \int_{\{Y=0\}} |X|dP + \int_{\{0<|Y|\leqslant\lambda\}} |X-Y|dP$$

$$= \int_{\{Y=0\}} |X|dP + \int_\Omega |X(\mathrm{sgn}Y)I_{\{0<|Y|\leqslant\lambda\}} - Y(\mathrm{sgn}Y)I_{\{0<|Y|\leqslant\lambda\}}|dP$$

(i) 的右边 $= 2\int_{\{|Y|\leqslant\lambda,|X|\leqslant\lambda\}} |X-Y|dP + 2(E|X| - E|Y|)$

$$= 2\int_{\{|Y|=0,|X|\leqslant\lambda\}} |X|dP + 2\int_{\{|X|\leqslant\lambda\}} |X(\mathrm{sgn}Y)I_{\{0<|Y|\leqslant\lambda\}}$$

$$- Y(\mathrm{sgn}Y)I_{\{0<|Y|\leqslant\lambda\}}|dP + 2(\int_{\{|Y|=0\}} |X|dP$$

$$+ \int_\Omega (|X(\mathrm{sgn}Y)I_{\{0<|Y|\leqslant\lambda\}}| - |Y(\mathrm{sgn}Y)I_{\{0<|Y|\leqslant\lambda\}}|)dP)$$

$$+ 2(\int_\Omega (|XI_{\{|Y|>\lambda\}}| - |YI_{\{|Y|>\lambda\}}|)dP).$$

但由题设条件知：

$$\int_{\{|Y|>\lambda\}} |X|dP \geqslant \int_{\{|Y|>\lambda\}} |Y|dP,$$

因此为证(i) 成立，只须证明

$$\int_{\Omega} |X(\mathrm{sgn}Y)I_{\{0<|Y|\leqslant\lambda\}} - Y(\mathrm{sgn}Y)I_{\{0<|Y|\leqslant\lambda\}}|dP$$

$$\leqslant 2\int_{\{|X|\leqslant\lambda\}} |X(\mathrm{sgn}Y)I_{\{0<|Y|\leqslant\lambda\}} - Y(\mathrm{sgn}Y)I_{\{0<|Y|\leqslant\lambda\}}|dP$$

$$+ 2\int_{\Omega}(|X(\mathrm{sgn}Y)I_{\{0<|Y|\leqslant\lambda\}}| - |Y(\mathrm{sgn}Y)I_{\{0<|Y|\leqslant\lambda\}}|)dP$$

由于 $Y(\mathrm{sgn}Y)I_{\{0<|Y|\leqslant\lambda\}}$ 是 $\mathscr{A}$ 可测的随机变量，$0 \leqslant Y(\mathrm{sgn}Y)I_{\{0<|Y|\leqslant\lambda\}} \leqslant \lambda$，$X(\mathrm{sgn}Y)I_{\{0<|Y|\leqslant\lambda\}}$ 是可积随机变量且满足引理的条件(1) 或(2). 于是为证上式成立，只要对任意满足引理条件的 X 与 Y，$0 \leqslant Y \leqslant \lambda$，有

$$\int_{\Omega}|X - Y|dP \leqslant 2\int_{\{|X|\leqslant\lambda\}} |X - Y|dP + 2(\int_{\Omega}|X|dP - \int_{\Omega}|Y|dP).$$

事实上，由恒等式 $|a| + a = 2a^+$ 得

$$\int_{\Omega}|Y - X|dP = \int_{\Omega}(2(Y - X)^+ + (X - Y))dP$$

$$= 2\int_{\{-\lambda\leqslant X\leqslant Y\}} |Y - X|dP + 2\int_{\{X<-\lambda\}} (Y - X)dP$$

$$+ \int_{\Omega}(X - Y)dP.$$

但在集合 $\{X < -\lambda\}$ 上有 $Y \leqslant \lambda \leqslant -X$，于是

$$\int_{\{X<-\lambda\}} (Y - X)dP \leqslant \int_{\{X<-\lambda\}} 2(-X)dP \leqslant \int_{\Omega}2(-X)^+ dP$$

$$= \int_{\Omega}(|X| - X)dP.$$

因此，

$$\int_{\Omega}|X-Y|dP \leqslant 2\int_{\{-\lambda\leqslant X\leqslant Y\}}|X-Y|dP+2\int_{\Omega}|X|dP$$

$$-\int_{\Omega}(X+Y)dP \leqslant 2\int_{\{|X|\leqslant\lambda\}}|X-Y|dP+2\int_{\Omega}|X|dP-2\int_{\Omega}YdP.$$

这就证明了(i). 下面证(ii).

$$\text{(ii) 的右边} = \lambda\int_{\Omega}(\Phi(X)-\Phi(Y))dP$$

$$=\lambda\int_{\{|Y|\leqslant\lambda\}}(\Phi(X)-\Phi(Y))dP+\lambda\int_{\{|Y|>\lambda\}}(\Phi(X)-\Phi(Y))dP.$$

由于Φ是R上的凸函数且在$[0,\infty)$上是单调上升的，由 Jensen 不等式知：

$$\lambda\int_{\{|Y|>\lambda\}}(\Phi(X)-\Phi(Y))dP \geqslant 0$$

故欲证(ii)，只须证

$$\int_{\{|X|\leqslant\lambda,|Y|\leqslant\lambda\}}(X-Y)^2dP \leqslant \lambda\int_{\{|Y|\leqslant\lambda\}}(\Phi(X)-\Phi(Y))dP.$$

事实上，

$$\lambda\int_{\{|Y|\leqslant\lambda\}}(\Phi(X)-\Phi(Y))dP$$

$$=\int_{\{|Y|\leqslant\lambda,|X|\leqslant\lambda\}}(X^2-Y^2)dP+\int_{\{|Y|\leqslant\lambda,|X|>\lambda\}}(2\lambda|X|-\lambda^2-Y^2)dP$$

$$=\int_{\{|Y|\leqslant\lambda\}}(X^2-Y^2)dP-\int_{\{|Y|\leqslant\lambda,|X|>\lambda\}}(X^2-Y^2)dP$$

$$+\int_{\{|Y|\leqslant\lambda,|X|>\lambda\}}(2\lambda|X|-\lambda^2-Y^2)dP$$

$$=\int_{\{|Y|\leqslant\lambda\}}(X^2-Y^2)dP-\int_{\{|Y|\leqslant\lambda,|X|>\lambda\}}(|X|-\lambda)^2dP$$

由题设条件有

$$E(XY|\mathscr{A})=YE(X|\mathscr{A})\geqslant Y^2,$$

于是，

$$E((X-Y)^2|\mathscr{A}) = E((X^2-2XY+Y^2)|\mathscr{A})$$
$$\leqslant E((X^2-Y^2)|\mathscr{A}),)$$

因此，

$$\lambda \int_{\{|Y|\leqslant\lambda\}} (\Phi(X)-\Phi(Y))dP$$
$$\geqslant \int_{\{|Y|\leqslant\lambda\}} (X-Y)^2 dP - \int_{\{|Y|\leqslant\lambda,|X|>\lambda\}} (|X|-\lambda)^2 dP$$
$$= \int_{\{|Y|\leqslant\lambda,|X|\leqslant\lambda\}} (X-Y)^2 dP$$
$$+ \int_{\{|Y|\leqslant\lambda,|X|>\lambda\}} ((X-Y)^2-(|X|-\lambda)^2)dP.$$

由于在集合$\{|Y|\leqslant\lambda,|X|>\lambda\}$上$|X-Y|\geqslant|X|-|Y|\geqslant|X|-\lambda$,故

$$\int_{\{|Y|\leqslant\lambda,|X|>\lambda\}} ((X-Y)^2-(|X|-\lambda)^2)dP\geqslant 0.$$

所以

$$\lambda \int_{\{|Y|\leqslant\lambda\}} (\Phi(X)-\Phi(Y))dP \geqslant \int_{\{|Y|\leqslant\lambda,|X|\leqslant\lambda\}} (X-Y)^2 dP.$$

这就证明了(ii).

定理 2.12　设$X=\{X_n,n\in N\}$是L^1有界的随机变量序列，若下列二条件之一成立，

(1) $E(X_{n-1}|X_n)=X_n,\forall\, n\in N$,

(2) $E(X_{n-1}|X_n)\geqslant X_n\geqslant 0,\forall\, n\in N$.

则对每一$\lambda>0$,下列二不等式成立.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{|X_{n-1}|\leqslant\lambda,|X_n|\leqslant\lambda\}} (X_n-X_{n-1})^2 dP \leqslant 2\lambda \sup_n E|X_n|$,

(ii) $\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\{|X_{n-1}|\leqslant\lambda\}} |X_n-X_{n-1}|dp\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant (8\lambda\sup_n E|X_n|)^{\frac{1}{2}}$

$+2\sup_n E|X_n|$, 其中$X_{-1}=0$.

证 先证(i). 由引理 2.11 的(ii) 知:对每一 $n \geqslant 1$,有

$$\int_{\{|X_{n-1}|\leqslant\lambda,|X_n|\leqslant\lambda\}} (X_n - X_{n-1})^2 dP \leqslant \lambda\{E\Phi(X_n) - E\Phi(X_{n-1})\},$$

而对 $n = 0$ 这一项,则有

$$\int_{\{|X_{-1}|\leqslant\lambda,|X_0|\leqslant\lambda\}} (X_0 - X_{-1})^2 dP = \int_{\{|X_0|\leqslant\lambda\}} X_0^2 dP$$

$$= \lambda \int_{\{|X_0|\leqslant\lambda\}} \Phi(X_0) dP \leqslant \lambda E\Phi(X_0),$$

对任意 $m \geqslant 0$,将上述不等式对 $n = 0,1,\cdots,m$ 相加得

$$\sum_{n=0}^{m} \int_{\{|X_{n-1}|\leqslant\lambda,|X_n|\leqslant\lambda\}} (X_n - X_{n-1})^2 dP \leqslant \lambda E\Phi(X_m) \leqslant 2\lambda E|X_m|,$$

于是,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{|X_{n-1}|\leqslant\lambda,|X_n|\leqslant\lambda\}} (X_n - X_{n-1})^2 dP \leqslant 2\lambda \sup_n E|X_n|.$$

下面证(ii). 由引理 2.11 的(i) 知:对每一 $n \geqslant 0$,有

$$\int_{\{|X_{n-1}|\leqslant\lambda\}} |X_n - X_{n-1}| dP \leqslant 2 \int_{\{|X_{n-1}|\leqslant\lambda,|X_n|\leqslant\lambda\}} |X_n - X_{n-1}| dP$$

$$+ 2(E|X_n| - E(|X_{n-1}|),$$

由 l_2 中的三角形不等式,L^2 中的 Cauchy — Schwarz 不等式及已证的(i) 得

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\{|X_{n-1}|\leqslant\lambda\}} |X_n - X_{n-1}| dP\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant 2\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\{|X_{n-1}|\leqslant\lambda,|X_n|\leqslant\lambda\}} |X_n - X_{n-1}| dp\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$- 2\sum_{n=0}^{\infty}(E|X_n| - E|X_{n-1}|)$$

$$\leqslant (8\lambda \sup_n E|X_n|)^{\frac{1}{2}} + 2\sup_n E|X_n|.$$

推论 2.13 设 $X=\{X_n,n\in N\}$ 是 L^1 有界的弱鞅或正弱下鞅，则对每一 $\lambda>0$，有

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{n\geqslant m}\int_{\{|X_m|\leqslant\lambda\}}|X_n-X_m|dP=0.$$

证 若结论不成立，则存在 $\varepsilon>0$，及子序列 $\{X_{n_k}\}$ 使得

$$\int_{\{|X_{n_{2k}}|\leqslant\lambda\}}|X_{n_{2k+1}}-X_{n_{2k}}|dP\geqslant\varepsilon\ (\forall\ k\geqslant1),$$

这与定理 2.12 的 (ii) 矛盾. 这就证明了推论 2.13 成立.

推论 2.14 设 $X=\{X_n,n\in N\}$ 是 L^1 有界的弱鞅或正弱下鞅，则 $\{X_n\}$ 依概率收敛.

证 任给 $\varepsilon>0$，取 $\lambda>0$ 使得 $\lambda^{-1}\sup E|X_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. 由推论 2.13 知：存在 m_0 使得 $n>m\geqslant m_0$ 时，有

$$\int_{\{|X_m|\leqslant\lambda\}}|X_n-X_m|dP\leqslant\frac{\varepsilon^2}{2},$$

对上述 m,n，有

$$P(\{|X_n-X_m|>\varepsilon\}\cap\{|X_m|\leqslant\lambda\})$$
$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_{\{|X_m|\leqslant\lambda\}}|X_n-X_m|dP\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

又

$$P(|X_m|\geqslant\lambda)\leqslant\lambda^{-1}E|X_m|\leqslant\lambda^{-1}\sup E|X_n|<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是

$$P(|X_n-X_m|>\varepsilon)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon(\forall\ n>m\geqslant m_0),$$

即 $\{X_n,n\in N\}$ 是依概率收敛的 Cauchy 序列，故 $\{X_n,n\in N\}$ 依概率收敛. 上面的证明属于 L. E. Dor[29]. F. Knight 与 D. L. Burkholder 曾分别独立证明了 L^1 有界的弱鞅是依概率收敛的.

定理 2.15 设 $X=\{X_n,n\in N\}$ 是弱鞅，则下列陈述等价：

(1) $\{X_n,n\in N\}$ L^1 收敛；

(2) 存在可积随机变量 X,使得

$$E(X|X_n) = X_n, \forall\, n \in N;$$

(3) $\{X_n, n \in N\}$ 一致可积.

证 (1)⇒(2). 设 X 是 $\{X_n, n \in N\}L^1$ 收敛的极限,则显然有

$$\begin{aligned} E(X|X_n) &= E(\lim_{m\to\infty} X_m | X_n) \\ & \lim_{m\to\infty} E(X_m | X_n) \\ &= X_n, \ \forall\, n \in N. \end{aligned}$$

(2)⇒(3) 显然,(3)⇒(1). 由(3) 及推论 2.14 知 $\{X_n, n \in N\}$ 依概率收敛,再结合(3) 知 $\{X_n, n \in N\}L^1$ 收敛.

1974 年 Stout[8] 提出了一个很著名的公开问题,即关于弱鞅是否有 $a.e.$ 收敛的有意义的结果. 1990 年甘师信[30] 引入了广义极限鞅的概念,证明了 L^1 有界的广义极限鞅 $a.e.$ 收敛于一可积随机变量. 由此得到 L^1 有界的弱鞅在一定条件下是 $a.e.$ 收敛的,从而对 Stout 提出的问题给出了一个回答.

§3 鞅型序列的 Riesz 分解

在下面的几节中,令 $\mathscr{H}$ 表示 §1 中所定义的任意一类鞅型序列的全体.

定义 3.1 称 Riesz 分解对 $\mathscr{H}$ 成立,如果对 $\mathscr{H}$ 中的每一成员 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$,有如下分解:

$$X_n = Y_n + Z_n, n \in N,$$

其中 $\{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为鞅,而 $\{Z_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 仍为 $\mathscr{H}$ 中的成员且 $\int_A Z_n dP \to 0, \forall\, A \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n$.

显然,若 Riesz 分解对 $\mathscr{H}$ 成立,则对 $\mathscr{H}$ 中的任一成员 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$,序列 $\{EX_n\}$ 必收敛. 因为 $EX_n = EY_n + EZ_n =$

$EY_0 + EZ_n \to EY_0$.

定理 3.1 (1) 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为可积适应随机变量序列,满足条件(B),则对每一 $\lambda > 0$,有

$$P(\sup_{n\in N}|X_n| > \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}\sup_{\tau\in T}E|X_\tau| < \infty.$$

(2) 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为渐近鞅,则 $\{EX_\tau\}_{\tau\in T}$ 有界,即 $\sup\limits_{\tau\in T}|EX_\tau| < \infty$.

证 (1) 对任意固定的 $n \in N$,令

$$A_n = \{\sup_{0\leqslant i\leqslant n}|X_i| > \lambda\}$$

定义 σ 如下:

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} \min\{k \in N: k \leqslant n, |X_k(\omega)| > \lambda\}, & 当\ \omega \in A_n, \\ n, & 当\ \omega \overline{\in} A_n. \end{cases}$$

则 $\sigma \in T$,且

$$\sup_{\tau\in T}E|X_\tau| \geqslant E|X_\sigma| \geqslant \int_{A_n}|X_\sigma|dP \geqslant \lambda P(A_n).$$

由于 $A_n \uparrow \{\sup\limits_{i\in N}|X_i| > \lambda\}$,在上面不等式中令 $n \to \infty$ 得

$$P(\sup_{n\in N}|X_n| > \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}\sup_{\tau\in T}E|X_\tau|.$$

(2) 由渐近鞅的定义知 $\{EX_\tau\}_{\tau\in T}$ 收敛,于是存在 $n_0 \in N$,使得对一切 $\tau \in T, \tau \geqslant n_0$,有

$$|EX_\tau - EX_{n_0}| \leqslant 1.$$

若 τ 是任一简单停时,则 $|EX_{\tau\wedge n_0}| \leqslant E(\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n_0}|X_k|)$,这样,

$$\begin{aligned}|EX_\tau| &= |\int_\Omega X_{\tau\wedge n_0}dP + \int_\Omega X_{\tau\vee n_0}dP - \int_\Omega X_{n_0}dP| \\ &\leqslant E(\max_{0\leqslant k\leqslant n_0}|X_k|) + 1,\end{aligned}$$

从而

$$\sup_{\tau\in T}|EX_\tau| \leqslant E(\max_{0\leqslant k\leqslant n_0}|X_k|) + 1 < \infty.$$

定理 3.2 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 与 $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$

均为可积适应随机变量序列且 L^1 有界，则

(1) 若 $\{EX_\tau\}_{\tau\in T}$ 与 $\{EY_\tau\}_{\tau\in T}$ 是上有界的（或下有界的），则 $\{E(X_\tau\vee Y_\tau)\}_{\tau\in T}$ 与 $\{E(X_\tau\wedge Y_\tau\}_{\tau\in T}$ 也是上有界的（或下有界的）；

(2) 若 X 与 Y 还是渐近鞅，则 $\{X_n\vee Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 与 $\{X_n\wedge Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 也是渐近鞅.

证 (1) 我们只证：若 $\{EX_\tau\}_{\tau\in T}$ 与 $\{EY_\tau\}_{\tau\in T}$ 是上有界的，则 $\{E(X_\tau\vee Y_\tau)\}_{\tau\in T}$ 是上有界的，由对称性立即得其它情形下的结论，$\forall\ \tau\in T$，取 $n\in N,n\geqslant\tau$，令

$$\sigma=\begin{cases}\tau,\{X_\tau\geqslant 0\},\\ n,\{X_\tau<0\},\end{cases}$$

$$\sigma'=\begin{cases}\tau,\{Y_\tau\geqslant 0\},\\ n,\{Y_\tau<0\}.\end{cases}$$

则 $\sigma,\sigma'\in T$，这样，

$$\int_\Omega(X_\tau\vee Y_\tau)dP\leqslant\int_{\{X_\tau\geqslant 0\}}X_\tau dP+\int_{\{Y_\tau\geqslant 0\}}Y_\tau dP$$

$$=\int_\Omega X_\sigma dP-\int_{\{X_\tau<0\}}X_n dP+\int_\Omega Y_{\sigma'}dP-\int_{\{Y_\tau<0\}}Y_n dP$$

$$\leqslant\sup_{\tau\in T}EX_\tau+\sup_{n\in N}|EX_n|+\sup_{\tau\in T}EY_\tau+\sup_{n\in N}E|Y_n|.$$

由于 $\{EX_\tau\}_{\tau\in T}$ 与 $\{EY_\tau\}_{\tau\in T}$ 是上有界的，故

$$\sup_{\tau\in T}E(X_\tau\vee Y_\tau)<\infty.$$

(2) 我们先证 $\{X_n\vee Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为渐近鞅，令 $Z_n=X_n\vee Y_n,n\in N$，则 Z_n 是 $\mathscr{F}_n$ 可测的且可积，由定理 3.1 知 $\{EX_\tau\}_{\tau\in T}$ 与 $\{EY_\tau\}_{\tau\in T}$ 均为有界的，再由已证的(1) 知 $\{EZ_\tau\}_{\tau\in T}$ 是有界的，由渐近鞅定义知：任意给定 $\epsilon>0$，可取 $\tau_0\in T$，使得当 $\sigma,\tau\geqslant\tau_0$，$\sigma,\tau\in T$，有

$$|EX_\sigma-EX_\tau|<\epsilon,|EY_\sigma-EY_\tau|<\epsilon.$$

又可取 $\tau_1\in T,\tau_1\geqslant\tau_0$，使得当 $\sigma\geqslant\tau_0$ 时有

$$EZ_\sigma\leqslant EZ_{\tau_1}-\epsilon.$$

对任意给定的简单停时 $\sigma \geqslant \tau_1$，令

$$A = \{X_{\tau_1} < Y_{\tau_1}\},$$

定义

$$\sigma_1 = \begin{cases} \tau_1, \omega \in A, \\ \sigma, \omega \in A^c, \end{cases}$$

则 $\sigma_1 \in T$ 且

$$\int_\Omega X_{\tau_1} dP = \int_{A^c} Z_{\tau_1} dP + \int_A X_{\tau_1} dP,$$

$$\int_\Omega X_{\sigma_1} dP = \int_{A^c} X_\sigma dP + \int_A X_{\tau_1} dP,$$

从而，

$$\int_{A^c} Z_{\tau_1} dP = \int_{A^c} X_\sigma dP + \int_\Omega X_{\tau_1} dP - \int_\Omega X_{\sigma_1} dP$$

$$\leqslant \int_{A^c} Z_\sigma dP + \epsilon.$$

同理，

$$\int_\Omega Y_{\tau_1} dP = \int_A Z_{\tau_1} dP + \int_{A^c} Y_{\tau_1} dP,$$

$$\int_\Omega Y_{\sigma_1} dP = \int_A Y_\sigma dP + \int_{A^c} Y_{\tau_1} dP,$$

从而，

$$\int_A Z_{\tau_1} dP = \int_A Y_\sigma dP + \int_\Omega Y_{\tau_1} dP - \int_\Omega Y_{\sigma_1} dP,$$

$$\leqslant \int_A Z_\sigma dP + \epsilon,$$

这样，

$$\int_\Omega Z_\tau dP \leqslant \int_\Omega Z_\sigma dP + 2\epsilon, \quad |EZ_\tau - EZ_{\tau_1}| \leqslant 2\epsilon.$$

这就证明了$\{EZ_\tau\}_{\tau\in T}$是哥西网，从而$\{EZ_\tau\}_{\tau\in T}$收敛，即$\{X_n \vee Y_n,$

$\mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是渐近鞅.

由$\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为渐近鞅知$\{-X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为渐近鞅.再利用$X_n \wedge Y_n = -((-X_n) \vee (-Y_n))$立即知$\{X_n \wedge Y_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为渐近鞅.

推论 3.3 设$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为渐近鞅,且$\sup\limits_{n \in N} E|X_n| < \infty$,则

(1) $\{|X_n|\}, \{X_n^+\}, \{X_n^-\}, \{-\lambda \vee X_n \vee \lambda\}$ $(\lambda \geq 0)$均为L^1有界的渐近鞅,

(2) $\sup\limits_{\tau \in T} E|X_\tau| < \infty$,

(3) $\sup\limits_{n \in N} E|X_n| < \infty$, a.e..

证 (1) 因$\{X_n\}$与$\{-X_n\}$均为渐近鞅,由定理 3.2 知:$\{|X_n| = X_n \vee (-X_n), \mathscr{F}_n, n \in N\}$为渐近鞅,在定理 3.2 中令$Y_n \equiv \lambda$, $n \in N$,显然$\{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为$L^1$有界的渐近鞅,特别$\lambda = 0$时为渐近鞅,这样,$\{X_n^+ = X_n \vee 0, \mathscr{F}_n, n \in N\}$, $\{X_n^- = -(X_n \wedge 0), \mathscr{F}_n, n \in N\}$, $\{-\lambda \vee X_n \wedge \lambda, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为$L^1$有界的渐近鞅.

(2) 由已证的(1)知$\{|X_n|, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为$L^1$有界的渐近鞅,再用定理 3.1 的(2)知$\sup\limits_{\tau \in T} E|X_\tau| < \infty$.

(3) 由已证的(2)及定理 3.1 的(1)知(3)成立.

定理 3.4 设$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$是渐近鞅,$\{\mathscr{G}_n, n \in N\}$是上升的子$\sigma$代数序列且$\mathscr{G}_n \subset \mathscr{F}_n, n \in N$,令$Y_n = E(X_n | \mathscr{G}_n)$,则$\{Y_n, \mathscr{G}_n, n \in N\}$为渐近鞅.

证 显然,对每一$n \in N$, Y_n可积且$\mathscr{G}_n$可测,又每一$\{\mathscr{G}_n, n \in N\}$有界停时$\tau$一定是$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$停时,且

$$\int_\Omega X_\tau dP = \int_\Omega Y_\tau dP.$$

对任意$\epsilon > 0$,由$\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为渐近鞅知:存在$n_0 \in N$,对任意$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$有界停时$\tau, \sigma$,只要$\tau, \sigma \geq n_0$,有

$$\left|\int_\Omega X_\tau dP - \int_\Omega X_\sigma dP\right| < \epsilon,$$

这样，对任意$\{\mathscr{G}_n, n \in N\}$有界时$\tau,\sigma$，只要$\tau,\sigma \geqslant n_0$，总有

$$|\int_\Omega Y_\tau dP - \int_\Omega Y_\sigma dP| = |\int_\Omega X_\tau dP - \int_\Omega X_\sigma dP| < \varepsilon,$$

即$\lim EY_\tau$存在且有限，故$\{X_n, \mathscr{G}_n, n \in N\}$为渐近鞅.

定理 3.5 设$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为渐近鞅，$\{\tau_k, k \in N\}$为非降的$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$有界停时序列. 令 $Y_k = X_{\tau_k}, \mathscr{G}_k = \mathscr{F}_{\tau_k}, k \in N$，则$\{Y_k, \mathscr{G}_k, k \in N\}$为渐近鞅，特别对任意停时$\tau$，$\{X_{\tau\wedge n}, \mathscr{F}_{\tau\wedge n}, n \in N\}$为渐近鞅.

证 显然对每一$k \in N$，Y_k是可积的且Y_k是$\mathscr{G}_k$可测的，若σ是$\{\mathscr{G}_k, k \in N\}$有界停时，则$\tau_\sigma$是$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$有界停时. 由渐近鞅的定义知：任给$\varepsilon > 0$，存在$n_0 \in N$，对任意$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$有界停时$\tau,\tau'$，只要$\tau,\tau' \geqslant n_0$，有

$$|\int_\Omega X_\tau dP - \int_\Omega X_{\tau'} dP| < \varepsilon$$

令$\tau_\infty = \lim_{k\to\infty} \tau_k$，则$\tau_\infty$是$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$停时，又$X_{\tau_k \wedge n_0} \longrightarrow X_{\tau_\infty \wedge n_0}$，当$k \to \infty$)，且

$$\int_\Omega \sup_k |X_{\tau_k \wedge n_0}| dP \leqslant \int_\Omega (|X_0| \vee |X_1| \vee \cdots \vee |X_{n_0}|) dP < \infty$$

这样，由控制收敛定理知$\{X_{\tau_k \wedge n_0}, \mathscr{G}_k, k \in N\}$是渐近鞅. 于是，可取$k \in N$，使对一切$\{\mathscr{G}_n, n \in N\}$有界停时$\sigma, \sigma', \sigma, \sigma' \geqslant k$，有

$$|\int_\Omega X_{\tau_\sigma \wedge n_0} dP - \int_\Omega X_{\tau_{\sigma'} \wedge n_0} |dP < \varepsilon.$$

现设σ, σ'是$\{\mathscr{G}_n, n \in N\}$有界停时，$\sigma, \sigma' \geqslant k$，则$\tau_\sigma, \tau_\sigma'$是$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$有界停时，因此

$$|\int_\Omega Y_\sigma dP - \int_\Omega Y_{\sigma'} dP| \leqslant |\int_\Omega X_{\tau_\sigma \vee n_0} dP - \int_\Omega X_{\tau_{\sigma'} \vee n_0} dP| + |\int_\Omega X_{\tau_\sigma \wedge n_0} dP - \int_\Omega X_{\tau_\sigma \wedge n_0} dP|$$

$$\leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

这就证明了$\{Y_k, \mathscr{G}_k, k \in N\}$是渐近鞅.

定理 3.6 设对一切$n, m \in N$，均有$\mathscr{F}_n = \mathscr{F}_m$，$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为渐近鞅，则$\int_\Omega \sup_{n \in N} |X_n| dP < \infty$.

证 由于$\sup_{n \in N} |X_n| \leqslant (\sup_{n \in N} X_n)^+ + (\inf_{n \in N} X_n)^-$，为证$\sup_{n \in N} |X_n|$可积，只须证$\sup_{n \in N} X_n$与$\inf_{n \in N} X_n$同时可积，我们只证$\sup_{n \in N} X_n$可积，$\inf_{n \in N} X_n$可积类似证明。假设$\sup_{n \in N} X_n \overline{\in} L^1$. 由于$X_0 \in L^1$，$X_0 \leqslant \sup_{n \geqslant 0} X_n$，则必有$\int_\Omega \sup_{n \geqslant 0} X_n dP = +\infty$. 又因为$(\sup_{0 \leqslant n \leqslant m} X_n) \uparrow \sup_{n \geqslant 0} X_n (m \to \infty)$，因此，由单调收敛定理知：对每一$M = 1, 2, 3, \cdots$必存在$m_M \in N$，使得

$$\int_\Omega \sup_{0 \leqslant n \leqslant m_M} X_n dP \geqslant M.$$

定义$\tau_{m_M} = \inf\{k \leqslant m_M, X_k = \sup_{0 \leqslant n \leqslant m_M} X_n\}$，由于对一切$n \in N$，$\mathscr{F}_n = \mathscr{F}_0$，故$\tau_{m_M}$是$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$有界停时且

$$\int_\Omega X_{\tau_{m_M}} dP = \int_\Omega \sup_{0 \leqslant n \leqslant m_M} X_n dP \geqslant M.$$

记$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$有界停时全体为$T$，则

$$\sup_{\tau \in T} \int_\Omega X_\tau dP = \infty.$$

这与定理 3.1 的(2)相矛盾，故$\sup_{n \geqslant 0} |X_n|$可积.

定理 3.7 $\{Z_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$是渐近鞅，且对每一$m \in N$，有$\lim_{n \to \infty} E(Z_n | \mathscr{F}_m) = 0.\ a.e.$，则

(1) $\int_\Omega \sup_n |E(Z_n | \mathscr{F}_m)| dP < \infty$，$\forall\, m$；

(2) $E(Z_n | \mathscr{F}_m) \xrightarrow{L^1} 0$，$\forall\, m$；

(3) $\lim_{\tau \in T} \int_\Omega |Z_\tau| dP = 0$；

(4) $Z_n \longrightarrow 0$, $a.e.$ (L^1);

(5) $\{Z_\tau, \tau \in T\}$ 一致可积.

证 (1) 由于$\{Z_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为渐近鞅,对每一$m \in N$,由定理3.4知:$\{E(Z_n|\mathscr{F}_m), \mathscr{F}_m, n \geqslant m\}$是渐近鞅,再由定理3.6知:

$$\int_\Omega \sup_n |E(Z_n|\mathscr{F}_m)| dP < \infty, (\forall\, m \in N).$$

(2) 由于对每一$m \in N$, $\lim_{n\to\infty} E(Z_n|\mathscr{F}_m) = 0$ $a.e.$ 又由(1)知$\{E(Z_n|\mathscr{F}_m), n \geqslant m\}$是一致可积的,故$E(Z_n|\mathscr{F}_m) \xrightarrow{L^1} 0$.

(3) 由于$\int_\Omega Z_n dP = \int_\Omega E(Z_n|\mathscr{F}_0) dP \longrightarrow 0$及$\{Z_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$是渐这鞅,故$\lim_{\tau \in T} \int_\Omega Z_\tau dP = 0$. 令$m \in N$,则$A_m = \{Z_m < 0\} \in \mathscr{F}_m$,由(2)有$\lim_{n\to\infty} \int_{A_m} Z_n dP = \lim_{n\to\infty} \int_{A_m} E(Z_n|\mathscr{F}_m) dP = 0$.因此可取$n \geqslant m$使得$|\int_{A_m} Z_n dP| < 2^{-m}$.定义$\tau_m$如下:

$$\tau_m = \begin{cases} m & \omega \in A_m^c \\ n & \omega \in A_m \end{cases}$$

显然$\tau_m \in T$且$|\int_\Omega Z_m^- dP - \int_\Omega Z_{\tau_m} dP| = |\int_{A_m} Z_n dP| < 2^{-m}$. 但$\int_\Omega Z_{\tau_m} dP \to 0$,所以$\int_\Omega Z_m^- dP \to 0$.类似地,有$\int_\Omega Z_m dP \to 0$. 所以$\int_\Omega |Z_m| dP \to 0$.即$\{Z_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$是$L^1$有界的渐近鞅,由推论3.3知$\{|Z_n|\}$是$L^1$有界的渐近鞅,从而$\lim_{\tau \in T} \int_\Omega |Z_\tau| dP = 0$.

(4) 由于$\{Z_n\}$是L^1有界的渐近鞅,由定理2.4知$\{Z_n\}$ $a.e.$ 收敛,又由(3)知:$Z_n \xrightarrow{L^1} 0$. 从而$Z_n \longrightarrow 0$, $a.e.$.

(5) 对任给的$\varepsilon > 0$,取$n_1 \in N$,使得对一切$\tau \in T$, $\tau \geqslant n_0$有

$\int_\Omega |Z_\tau| dP \leqslant \varepsilon$. 由于$\{Z_n\}$为$L^1$有界渐近鞅，由推论 3.3 知 $\sup|Z_n| < \infty$ $a.e.$，故存在$\lambda > 0$，使得

$$\int_{\{\sup|Z_n|>\lambda\}} |Z_1| \vee \cdots \vee |Z_{n_0}| dP \leqslant \varepsilon,$$

于是，对任意$\tau \in T$，有

$$\int_{\{|Z_\tau|>\lambda\}} |Z_\tau| dP \leqslant \int_\Omega |Z_{\tau \vee n_0}| dP +$$

$$\int_{\{\sup\limits_{n \in N} |Z_\tau| > \lambda\}} |Z_{\tau \wedge n_0}| dP \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

即$\{Z_\tau, \tau \in T\}$一致可积.

定理 3.8 设$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为渐近鞅，则

(1) X能唯一分解成$X_n = Y_n + Z_n, n \in N$，其中$Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为鞅，$Z = \{Z_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为渐近鞅且$Z_n \to 0(L^1)$. 即 Riesz 分解对渐近鞅类成立.

(2) 若X为L^1有界的渐近鞅，则其 Riesz 分解中的鞅Y亦为L^1有界的.

证 (1) 对每一固定的$m \in N$，对每一$n \in N$，令$X_{m,n} = E(X_n | \mathscr{F}_m)$，由定理 3.4 知$\{X_{m,n}, \mathscr{F}_m, n \geqslant m\}$是渐近鞅，再由定理 3.6 知：$\int_\Omega \sup\limits_n |X_{m,n}| dP < \infty$. 从而用定理 2.4 得$X_{m,n}$ $a.e.$ 收敛. 令$Y_m = \lim\limits_{n\to\infty} X_{m,n}, m \in N$. 显然$Y_m$是$\mathscr{F}_m$可测的且可积. 由条件期望的控制收敛定理知

$$\begin{aligned} E(Y_{m-1} | \mathscr{F}_m) &= E(\lim_n E(X_n | \mathscr{F}_{m-1}) | \mathscr{F}_m) \\ &= \lim_n E(E(X_n | \mathscr{F}_{m-1}) | \mathscr{F}_m) \\ &= \lim_n E(X_n | \mathscr{F}_m) = Y_m. \end{aligned}$$

这就证明了$Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为鞅. 令$Z_n = X_n - Y_n, n \in N$，则$X_n = Y_n + Z_n, n \in N$，从而 $\int_\Omega Z_\tau dP = \int_\Omega X_\tau dP - \int_\Omega Y_\tau dP =$

$\int_\Omega X_\tau dP - \int_\Omega Y_\tau dP$，所以 $Z = \{Z_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为渐近鞅，最后，对每一 $m \in N$；有

$$\lim_{n \to \infty} E(Z_n | \mathscr{F}_m) = \lim_{n \to \infty} E(X_n | \mathscr{F}_m) - \lim_{n \to \infty} E(Y_n | \mathscr{F}_m)$$
$$= Y_m - Y_m = 0, \ a.e..$$

再由定理 3.7 知 $Z_n \to 0 \ (L^1)$.

最后证唯一性，设 $X_n = Y_n + Z_n = Y'_n + Z'_n, n \in N$，则 $\{|Y_n - Y'_n|, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为下鞅，从而 $\int_\Omega |Y_n - Y'_n| dP \uparrow$ 但 $\int_\Omega |Y_n - Y'_n| dP = \int_\Omega |Z'_n - Z_n| dP \to 0$，这样，对每一 $n \in N$，$\int_\Omega |Y_n - Y'_n| dP = 0$. ，从而 $Y_n = Y'_n \ a.e.$ ，$Z_n = Z'_n \ a.e.$ $\forall \ n \in N$.

(2) 由已证的(1) 知(2) 成立.

定理 3.9 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为可积适应随机变量序列，则下列两条件等价：

(1) X 为渐近鞅，

(2) $\lim\limits_{\tau \in T} \sup\limits_{\sigma \in T(\tau)} E|E(X_\sigma | \mathscr{F}_\tau) - X_\tau| = 0$.

证 (1)⇒(2). 设 $X_n = Y_n + Z_n, (n \in N)$ 为 X 的 Riesz 分解，则 $X_\tau = Y_\tau + Z_\tau, \forall \ \tau \in T$，由定理 3.7 知 $\lim\limits_{\tau \in T} E|Z_\tau| = 0$，又由鞅的 Doob 停时定理有

$$E|E(X_\sigma | \mathscr{F}_\tau) - X_\tau| = E|E(Z_\sigma | \mathscr{F}_\tau) - Z_\tau|$$
$$\leqslant E|Z_\sigma - Z_\tau|, \forall \ \tau \in T, \forall \ \sigma \in T(\tau),$$

从而，$\lim\limits_{\tau \in T} \sup\limits_{\sigma \in T(\tau)} E|E(X_\sigma | \mathscr{F}_\tau) - X_\tau| = 0$.

(2) ⇒(1). 由于对任意 $\sigma \geqslant \tau, \sigma, \tau \in T$ 有

$$\left|\int_\Omega X_\sigma dP - \int_\Omega X_\tau dP\right| = \left|\int_\Omega E(X_\sigma | \mathscr{F}_\tau) dP - \int_\Omega X_\tau dP\right| \leqslant E|E(X_\sigma | \mathscr{F}_\tau) - X_\tau|,$$

从而 $\{EX_\tau, \tau \in T\}$ 收敛且有限.

由定理 3.9 立即推知:渐近鞅一定是概率渐近鞅.渐近鞅亦是 L^1 极限鞅.

例 3.10 (Edgar and Sucheston [31] 1977) 对极限鞅类 Riesz 分解不成立.即存在极限鞅 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$,$X$ 不能分解成 $X_n=Y_n+Z_n,n\in N$,其中$\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为鞅,$\int_A Z_n dP\to 0,\forall A\in\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n$,从而,对 Mil 及概率极限鞅类 Riesz 分解亦不成立.

证 文献[31]证明了这个结论.下面我们另外给出一个简单明了的例子说明上述结论成立.取 $\Omega=[0,1]$,$\mathscr{F}$ 是[0,1]中的 Borel σ 代数,P 为勒贝格测度,则$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间,取两实数序列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 使得 $b_n\geqslant 1$, $b_n\uparrow\infty$, 但极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$不存在(例如取 $b_n=n+1,a_n=(-1)^n b_{n-1},n\in N$),对每一 $n\in N$,令

$$X_n(\omega)=a_n I_{[0,\frac{1}{b_n}]}(\omega),\forall\ \omega\in\Omega,$$

$$\mathscr{F}_n=\sigma(X_0,X_1,\cdots,X_n).$$

由本章后面即将证明的引理 5.1 知$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为极限鞅,又因为

$$EX_n=\int_\Omega a_n I_{[0,\frac{1}{b_n}]}dP=\frac{a_n}{b_n},\ \forall\ n\in N.$$

故$\{EX_n\}$ 极限不存在,所以$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 不具有 Riesz 分解.

例 3.11 (Tomkins [32],1984) 对循序鞅类 Riesz 分解不成立.

证 考虑独立同分布的随机变量序列$\{Y_n,n\in N\}$,其中 $P(Y_0=4)=P(Y_0=0)=\dfrac{1}{2}$.令 $X_n=Y_0Y_1\cdots Y_n$, $\mathscr{F}_n=\sigma(Y_0,\cdots,Y_n)$,$n\in N$. 由于 $EX_n=2^{n-1}\to\infty$ $(n\to\infty)$. 故 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 不具有 Riesz 分解.但 $E(X_n|\mathscr{F}_{n-1})=2X_{n-1}$,若 $X_n=0$,则 $X_{n-1}=0$. 由 Borel 0 − 1 律得

$$P(X_n \neq 0,\ i.o.) = 0.$$

所以 X 为循序鞅，这就证明了对循序鞅类 Riesz 分解不成立. 从而对终鞅类、拟终鞅类及概率渐近鞅类 Riesz 分解均不成立.

定理 3.12 （刘智慧[33]1987，甘师信[34]1990）对 L^1 极限鞅类 Riesz 分解成立.

我们将在更一般的条件下证明这个定理. 这里证明略.

§4 鞅型序列的最优停时性与可选择样性

定义 4.1 称 $\mathscr{K}$ 具有最优停时性，如果对 $\mathscr{K}$ 中的每一成员 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 及任一 $\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$ 停时 τ，$X^\tau = \{X_{\tau\wedge n}, \mathscr{F}_{\tau\wedge n}, n \in N\}$ 仍属于 $\mathscr{K}$.

由第二章的定理 3.1 及条件期望的性质立即推知：鞅类、上（下）鞅类均具有最优停时性质. 由本章的定理 3.5 知渐近鞅类也具有最优停时性，关于其它鞅型序列是否具有最优停时性，我们有下面的一些结论.

定理 4.1 概率渐近鞅类具有最优停时性.

我们在更一般的 **B** 值情形来证明这个结论（见第六章的定理 1.9），故这里证明略.

定理 4.2 循序鞅类、终鞅类、拟鞅类均具有最优停时性.

证 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是可积适应随机变量序列，令 σ 是任一 $\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$ 停时，注意到对 $n \geqslant 0$，有

$$\begin{aligned} E(X_{\sigma\wedge n} | \mathscr{F}_{\sigma\wedge(n-1)}) &= X_\sigma I_{\{\sigma < n\}} + E(X_n | \mathscr{F}_{n-1}) I_{\{\sigma \geqslant n\}} \\ &= X_{\sigma\wedge(n-1)} + [E(X_n | \mathscr{F}_{n-1}) - X_{n-1}] I_{\{\sigma \geqslant n\}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

现设 X 是循序鞅，要使得对某 $n \in N$，有

$$E(X_{\sigma\wedge n} | \mathscr{F}_{\sigma\wedge(n-1)}) = X_{\sigma\wedge(n-1)},$$

则由(4.1)式知:或者 $E(X_n|\mathscr{F}_{n-1})=X_{n-1}$,或者 $\sigma<n$.而由循序鞅的定义知:存在 $C_n\uparrow, C_n\in\mathscr{F}_n, P(\bigcup_{n=0}^{\infty}C_n)=1$,且在 C_n 上有

$$E(X_n|\mathscr{F}_{n-1})=X_{n-1},$$

从而由(4.1)式知在 C_n 上有

$$E(X_{\sigma\wedge n}|\mathscr{F}_{\sigma\wedge(n-1)})=X_{\sigma\wedge(n-1)},$$

另一方面,若 $\sigma<n$,则 $\sigma<n-1$,由(4.1)式知在 $\{\sigma<n\}$ 上有

$$E(X_{\sigma\wedge n}|\mathscr{F}_{\sigma\wedge(n-1)})=X_{\sigma\wedge(n-1)}.$$

令 $C'=C_n\cup\{\sigma<n\}$,则 $C'_n\uparrow, C'_n\in\mathscr{F}_n, P(\bigcup_{n=0}^{\infty}C'_n)=1$,且在 $C'_n=C_n\cup\{\sigma<n\}$ 上有

$$E(X_{\sigma\wedge n}|\mathscr{F}_{\sigma\wedge(n-1)})=X_{\sigma\wedge(n-1)},$$

这就证明了 $X^\sigma=\{X_{\sigma\wedge n},\mathscr{F}_{\sigma\wedge n},n\in N\}$ 为循序鞅.

由(4.1)式知:只要 $E(X_n|\mathscr{F}_{(n-1)})=X_{n-1}$,就有 $E(X_{\sigma\wedge n}|\mathscr{F}_{\sigma\wedge(n-1)})=X_{\sigma\wedge(n-1)}$,因此

$$\{E(X_{\sigma\wedge n}|\mathscr{F}_{\sigma\wedge(n-1)})\neq X_{\sigma\wedge(n-1)}\}$$
$$\subset\{E(X_n|\mathscr{F}_{n-1})\neq X_{n-1}\}$$

现设 X 为终鞅,于是有

$$P(E(X_{\sigma\wedge n}|\mathscr{F}_{\sigma\wedge(n-1)})\neq X_{\sigma\wedge(n-1)},i.o.)$$
$$\leqslant P(E(X_n|\mathscr{F}_{n-1})\neq X_{n-1},i.o.)$$
$$=0$$

这就证明了 $X^\sigma=\{X_{\sigma\wedge n},\mathscr{F}_{\sigma\wedge n},n\in N\}$ 为终鞅.

最后,由(4.1)式得

$$E|E(X_{\sigma\wedge n}|\mathscr{F}_{\sigma\wedge(n-1)})-X_{\sigma\wedge(n-1)}|$$
$$\leqslant E|E(X_n|\mathscr{F}_{n-1})-X_{n-1}|.$$

若 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是拟鞅,则 $X^\sigma=\{X_{\sigma\wedge n},\mathscr{F}_{\sigma\wedge n},n\in N\}$ 为拟鞅. 定理证毕.

定理 4.3 极限鞅类与概率极限鞅类不具有最优停时性. 即存在极限鞅 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 及停时 σ 且 $P(\sigma=\infty)>0$.

使得 $X^\sigma = \{X_{\sigma\wedge n},\mathscr{F}_{\sigma\wedge n},n\in N\}$ 甚至不是概率极限鞅.

证 设 $\{A_n,n\in N\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的独立事件序列且 $P(A_0)=P(A_1)=0,P(A_n)=\dfrac{1}{n^2},n\geqslant 2$. 令 $X_n=nI_{A_n}$ 及 $\mathscr{F}_n=\sigma(X_0,X_1,\cdots,X_n),n\in N$. 由 Borel — Cantelli 引理知:

$$\lim_{n\to\infty}X_n=0\qquad a.e..$$

由独立性得

$$E(X_m|\mathscr{F}_n)-X_n=\int_\Omega X_m dP-X_n\to 0,(m\geqslant n\to\infty)\ a.e..$$

因此, $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为极限鞅,再令

$$\sigma=\inf\{n\in N,X_n\neq 0\}.$$

则 $\sigma\in T$,且 $P(\sigma=\infty)=\prod_{n=2}^{\infty}(1-\dfrac{1}{n^2})=\dfrac{1}{2}$. 记 $Y_n=X_{\sigma\wedge n},\mathscr{G}_n=\mathscr{F}_{\sigma\wedge n},n\in N$. 下面我们证明:

$$\forall\ \omega\in\{\sigma=\infty\},\text{有}\sup_{m\geqslant n}|E(Y_m|\mathscr{G}_n)-Y_n|(\omega)=\infty.$$

令 $M>0$ 固定. 取 $m,n\in N,m\geqslant n$,且 $\sum_{k=n+1}^{m}\dfrac{1}{k}\geqslant 2M$. 但 $\omega\in\{\sigma=\infty\}\subset\{\Omega-A_2\}\cap\cdots\cap\{\Omega-A_n\},\forall\ n\geqslant 2$ 及 $\bigcap_{k=2}^{n}\{\Omega-A_k\}$ 是 $\mathscr{G}_n$ 中的一个原子. 于是

$$E(Y_m|\mathscr{G}_n)(\omega)=\sum_{k=n+1}^{m}E(X_kI_{\{\sigma=k\}}|\mathscr{G}_n),$$

由于 $X_k(\omega)=0,k=2,\cdots,n$. 因此,

$$E(Y_m|\mathscr{G}_n)(\omega)=\sum_{k=n+1}^{m}kE(I_{A_2^c\cap\cdots\cap A_{k-1}^c\cap A_k}|\mathscr{G}_n)$$

$$=\sum_{k=n+1}^{m}k\frac{\prod_{j=2}^{k-1}(1-\frac{1}{j^2})\frac{1}{k^2}}{\prod_{j=2}^{k-1}(1-\frac{1}{j^2})},$$

由独立性,对每一 $M>0,m,n\in N,m\geqslant n$,有

$$E(Y_m|\mathscr{G}_n)(\omega)\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}\geqslant M.$$

由于 $Y_n(\omega)=0$，因此，

$$\sup_{m\geqslant n}|E(Y_m|\mathscr{G}_n)-Y_n|=\infty.$$

这就证明了 $\{Y_n,\mathscr{G}_n,n\in N\}$ 不是概率极限鞅.

定理 4.4 L^1 极限鞅类不具有最优停时性.

证 设 $\{A_n,n\in N\}$ 是一列相互独立的事件且 $P(A_0)=P(A_1)=0, P(A_n)=\frac{1}{n^2},(n\geqslant 2)$，令

$$X_n=nI_{A_n},\mathscr{F}_n=\sigma(X_0,X_1,\cdots,X_n),n\in N.$$

则任意 $m,n\in N,m\geqslant n$，有

$$E|E(X_m|\mathscr{F}_n)-X_n|\leqslant E|X_m|+E|X_n|$$

$$=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\to 0,(m\geqslant n\to\infty).$$

即 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为 L^1 极限鞅，令

$$\sigma=\inf\{n\in N,X_n\neq 0\},$$

由 $\sigma\in \overline{T}$ 且

$$\int_\Omega X_{\sigma\wedge n}dP\geqslant\sum_{i=2}^n\int_{\{\sigma=i\}}X_idP$$

$$=\sum_{i=2}^n iP(\{\sigma=i\}\cap A_i)$$

$$=\sum_{i=2}^n iP(A_1^c\cap A_2^c\cap\cdots\cap A_{i-1}^c\cap A_i)$$

$$=\sum_{i=3}^n i(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{(i-1)^2})\frac{1}{i^2}+2\times\frac{1}{2^2}$$

$$=\sum_{i=3}^n\frac{1}{i}\prod_{j=2}^{i-1}(1-\frac{1}{j^2})+2\times\frac{1}{2^2}.$$

由于 $\prod_{j=2}^{i-1}(1-\frac{1}{j^2})\downarrow\frac{1}{2}(i\to\infty)$，所以，

$$\int_\Omega X_{\sigma\wedge n}dP\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=2}^n\frac{1}{i}\to\infty\ (n\to\infty).$$

由定理 3.12 知：$X^\sigma = \{X_{\sigma\wedge n}, \mathscr{F}_{\sigma\wedge n}, n \in N\}$ 不是 L^1 极限鞅.

定义 4.2 称 $\mathscr{X}$ 具有可选采样性，如果对 $\mathscr{X}$ 中的每一成员 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 及每一 $\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$ 有界递增停时序列 $\tau_n \uparrow$，$\{X_{\tau_n}, \mathscr{F}_{\tau_n}, n \in N\}$ 仍属于 $\mathscr{X}$.

由定义知：若 $\mathscr{X}$ 具有可选采样性，则 $\mathscr{X}$ 具有最优停时性，反之，若 $\mathscr{X}$ 不具有最优停时性，则 $\mathscr{X}$ 不具有可选采样性. 显然，鞅类与渐近鞅类均具有可选采样性，由定理 4.3 及定理 4.4 知：极限鞅类、概率极限鞅类、L^1 极限鞅类都不具有可选采样性.

定理 4.5 拟鞅类具有可选采样性.

证 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是拟鞅，令

$$D_n = X_n - X_{n-1}(n \geqslant 0), X_{-1} = 0, \mathscr{F}_{-1} = \{\varnothing, \Omega\}.$$

因为 $\{X_n - \sum_{j=0}^{n} E(D_j|\mathscr{F}_{j-1}), \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是鞅，由[6]的 7.4 中的推论 4 知：对每一有界停时 σ，有

$$E((X_\sigma - X_n)|\mathscr{F}_n) = E(\sum_{j=n+1}^{\sigma} E(D_j|\mathscr{F}_{j-1})|\mathscr{F}_n), \text{ 在 } \{\sigma \geqslant n\} \text{ 上},$$

设 $\{\tau_n\}$ 是单调上升的 $\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$ 有界停时列，对每一 $n \in N$，令 $X^*_n = X_{\tau_n}, \mathscr{F}^*_n = \mathscr{F}_{\tau_n}$，于是由(4.2)式得

$$\begin{aligned}
& E|E(X^*_k|\mathscr{F}^*_{k-1}) - X^*_{k-1}|I_{\{\tau_{k-1}=n\}} \\
&= E|E(\sum_{j=n+1}^{\tau_k} E(D_j|\mathscr{F}_{j-1})|\mathscr{F}_n)|I_{\{\tau_{k-1}=n\}} \\
&\leqslant E(E((\sum_{j=\tau_{k-1}+1}^{\tau_k} |E(D_j|\mathscr{F}_{j-1})|)I_{\{\tau_{k-1}=n\}}|\mathscr{F}_n)) \\
&= E(\sum_{j=n+1}^{\tau_k} |E(D_j|\mathscr{F}_{j-1})|)I_{\{\tau_{k-1}=n\}},
\end{aligned}$$

上述不等式两边对 n 求和，则对每一 $k \in N$，有

$$E|E(X^*_k|\mathscr{F}^*_{k-1}) - X^*_{k-1}| \leqslant E(\sum_{j=\tau_{k-1}+1}^{\tau_k} |E(D_j|\mathscr{F}_{j-1})|).$$

于是，

$$\sum_{k=1}^{\infty} E|E(X_k^*|\mathscr{F}_{k-1}^*) - X_{k-1}^*|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} E\Big(\sum_{j=\tau_{k-1}+1}^{\tau_k} |E(D_j|\mathscr{F}_{j-1})|\Big)$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} E|E(D_n|\mathscr{F}_{n-1})| < \infty.$$

下面的例子表明即使一致有界的终鞅与循序鞅也不具有可选采样性.

例 4.6 设$\{Y_n, n \geqslant 1\}$是独立随机变量序列,满足$P(Y_n = 1) = \frac{1}{n^2}$, $P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}(n \geqslant 1)$,令$X_1 = 0, X_n = Y_{n-1}, (n \geqslant 2)$, $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_1, \cdots, Y_n)$,则对$n > 1$,有

$$\{E(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) \neq X_{n-1}\} = \{Y_{n-1} \neq Y_{n-2}\},$$

但$P(Y_n \neq 0, i.o.) = 0$,所以$\{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$是终鞅. 但注意到

$$\{E(X_{n+2}|\mathscr{F}_n) \neq X_n\} = \{Y_{n-1} \neq (n+1)^{-2}\} = \Omega,$$

取$\tau_k = 2k, k \geqslant 1$,则$\{X_{\tau_k}, \mathscr{F}_{\tau_k}, k \geqslant 1\}$不是终鞅,这表明终鞅类不具有可选采样性.

例 4.7 令$\mathscr{F}_n = \mathscr{F}_0, \forall n \geqslant 0, X_0 = X_2 = 1$,其它$X_n$均为0,则$\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为循序鞅,令$\tau_0 = 0, \tau_n = n + 1, n \geqslant 1$,显然有

$$E(X_{\tau_1}|\mathscr{F}_{\tau_0}) = X_{\tau_0},$$

但$E(X_{\tau_2}|\mathscr{F}_{\tau_1}) \neq X_{\tau_1}$,于是,$\{X_{\tau_n}, \mathscr{F}_{\tau_n}, n \in N\}$不是循序鞅,这表明循序鞅类不具有可选采样性.

§5 鞅型序列的稳定性

Bellow[35][36] 首先讨论了渐近鞅的稳定性,即什么样的函数$f: R \to R$能够使每个实值L^1有界的渐近鞅$\{X_n\}$变换为实值L^1有界的渐近鞅$\{f(X_n)\}$. 后来 Gut[37]、甘师信[24]、刘培德[38]

等人进一步讨论了其它鞅型序列如概率渐近鞅、极限鞅、Mil、概率极限鞅、L^1 极限鞅等的稳定性. 记

$$\Phi = \{f: R \to R, f \text{ 连续, 且} \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ 与} \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ 存在有限}\}$$

$$\Psi = \{f: R \to R, f \text{ 连续, 当 } |x| \to \infty \text{ 时}, f(x) = O(x)\}.$$

显然, $\Phi \subset \Psi$.

引理 5.1 设 $\Omega = [0,1]$, $\mathscr{F}$ 是$[0,1]$中的 Borel σ 代数, P 为勒贝格测度, $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 是两实数序列且 $b_n \geq 1, b_n \uparrow +\infty$, 对每一 $n \in N$, 令

$$X_n(\omega) = a_n I_{(0,\frac{1}{b_n})}(\omega) \quad \forall\ \omega \in \Omega,$$

$$\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)$$

则

(1) $X_n \to 0$, a.e. $(n \to \infty)$.

(2) $\{X_n\}$ L^1 有界 $\Leftrightarrow \{\frac{a_n}{b_n}\}$ 是有界序列.

(3) $\{X_n\}$ 一致可积 $\Leftrightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0, (n \to \infty)$.

(4) $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为极限鞅, 更是 Mil.

(5) $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为 L^1 有界的渐近鞅 $\Leftrightarrow \{\frac{a_n}{b_n}\}$ 是收敛序列.

证 (1) 对任一 $\omega \in (0,1]$, 存在整数 $M > 0$, 当 $n \geq M$ 时, $\frac{1}{b_n} < \omega$, 从而 $X_n(\omega) = 0$, 故 $X_n(\omega) \to 0, (n \to \infty)$, 这就证明了(1)成立.

(2) 注意到对每一 $n \in N$, 有

$$E|X_n| = \int_\Omega |a_n| I_{(0,\frac{1}{b_n})} dP = \frac{|a_n|}{b_n}$$

由此立即知(2) 成立.

(3) 由于 $E|X_n| = \frac{|a_n|}{b_n}, \forall\ n \in N$, 若 $\frac{a_n}{b_n} \to 0$, 则 $X_n \to 0(L^1)$.

故$\{X_n\}$一致可积，反之，若$\{X_n\}$一致可积，由(1)得$X_n \to 0\ (L^1)$，即$\frac{|a_n|}{b_n} = E|X_n| \to 0(n \to \infty)$，从而$\frac{a_n}{b_n} \to 0(n \to \infty)$.

(4) 因为$\{E(X_m|\mathscr{F}_n) - X_n \neq 0\} \subset [0\ \frac{1}{b_n}]$，$\forall\ m \geqslant n$，故$\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为极限鞅，更为Mil.

(5) 注意到$EX_n = \frac{a_n}{b_n}$立即知(5)成立.

定理 5.2 设$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$是可积适应序列，若$E \sup\limits_{n \in N} |X_n| < \infty$，则下列两陈述等价：

(1) X是渐近鞅；

(2) $\{X_n\}$ $a.e.$ 收敛.

证 由于实值渐近鞅为Mil，由定理2.4知(1)⇒(2)为显然，下证(2)⇒(1)，设$\{X_n\}$ $a.e.$ 收敛于Y，由法都引理知$\int_\Omega |Y| dP < \infty$，如果$\tau_n \in T$，且$\tau_n \uparrow \infty$，则$X_{\tau_n} \to Y$，$a.e.$，又对每一$n \in N$，$|X_{\tau_n}| \leqslant \sup\limits_{n \in N} |X_n|$，于是，由控制收敛定理得

$$\int_\Omega X_{\tau_n} dP \to \int_\Omega Y dP,$$

从而有

$$\lim_{\tau \in T} \int_\Omega X_\tau dP = \int_\Omega Y dP.$$

这就证明了X是渐这鞅.

定理 5.3 对函数$G: R \to R$. 下列两陈述等价：

(1) $G \in \Phi$.

(2) 若$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$是$L^1$有界渐近鞅，则$\{G(X_n), \mathscr{F}_n, n \in N\}$是$L^1$有界的渐近鞅.

证 (1)⇒(2)，只须证明下面的命题(P)成立即可.

(P) 对任意$G \in \Phi$，任意非负的L^1有界的渐近鞅$\{X_n\}$，$\{G(X_n)\}$是L^1有界的渐近鞅.

事实上，若(P)已证成立，设 $G\in\Phi$，$\{X_n\}$ 是任一 L^1 有界的渐近鞅，令 $G_1(x)=G(x)-G(0)$，($\forall\ x\in R$)，则 $G_1\in\Phi$，且 $G(X_n)=G_1(X_n)+G(0)$，($\forall\ n\in N$)，于是 $\{G(X_n)\}$ 是 L^1 有界渐近鞅的充要条件是 $\{G_1(X_n)\}$ 为 L^1 有界渐近鞅，由推论 3.3 知 $\{X_n^+\}$ 与 $\{X_n^-\}$ 均为 L^1 有界渐近鞅且

$$\begin{aligned} G_1(X_n) &= G_1(X_n^+)+G_1(-X_n^-) \\ &= G_1(X_n^+)+G_1^*(X_n^-),\ \forall\ n\in N \end{aligned}$$

其中 $G_1^*(x)=G_1(-x)$，$\forall\ x\in R$，显然，$G_1^*\in\Phi$，于是 $\{G_1(X_n)\}$ 是 L^1 有界渐近鞅，下证(P)成立，令 $G\in\Phi$，$\{X_n\}$ 是 L^1 有界的非负渐近鞅，不失一般性，可设 $G(0)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{G(x)}{x}=0$（否则，令 $H(x)=G(x)-G(0)-\alpha x$，$\forall\ x\in R$，$\alpha=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{G(x)}{x}$，用 H 代替 G 即可，因为 $H\in\Phi$，$H(0)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{H(x)}{x}=0$，$H(X_n)=G(X_n)-G(0)-\alpha X_n$，$\forall\ n\in N$. 从而 $\{G_1(X_n)\}$ 为 L^1 有界渐近鞅的充要条件是 $\{H(X_n)\}$ 为 L^1 有界渐近鞅）.

由定理 3.1 的(2)知存在 $M>0$，使得

$$\int_\Omega X_\tau dP\leqslant M,\forall\ \tau\in T.$$

由于渐近鞅是 Mil，由定理 2.4 知存在随机变量 X_∞ 及零概集 A_∞ 使得

$$\lim_{n\to\infty}X_n(\omega)=X_\infty(\omega),\ \forall\ \omega\notin A_\infty.$$

对任意 $\varepsilon>0$，由假设条件知可取 $k>0$，使得

$$x\geqslant k\Rightarrow|G(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3M}x$$

及

$$P(B_\infty)\triangleq P(X_\infty=k)=0.$$

对每一 $n\in N$，定义

$$U_n=X_nI_{\{X_n<k\}},\ V_n=X_nI_{\{X_n\geqslant k\}}.$$

则 $X_n = U_n + V_n$ 且 $G(X_n) = G(U_n) + G(V_n)$. 而 $P(A_\infty \cup B_\infty) = 0$，对每一 $\omega \overline{\in} A_\infty \cup B_\infty$，如果 $X_\infty(\omega) < k$，则对足够大的 n，$U_n(\omega) = X_n(\omega) < k$. 若 $X_\infty(\omega) > k$，则对足够大的 n，$X_n(\omega) > k$，于是 $U_n(\omega) = 0$. 所以，对 $\omega \overline{\in} A_\infty \cup B_\infty$，总有 $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(\omega)$ 存在，显然，对每一 $n \in N$，U_n 是 $\mathscr{F}_n$ 可测的且 $0 \leqslant U_n \leqslant k$，又 G 是连续的，从而 $\{G(U_n)\}$ 是一致有界的，由定理 5.2 知 $\{G(U_n)\}$ 是渐近鞅，于是，对上述 ε，$\exists\, n_0 \in N$，当 $\sigma, \tau \in T$，$\sigma, \tau \geqslant n_0$，有

$$|EG(U_\tau) - EG(U_\sigma)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

另一方面，显然有 $0 \leqslant V_n \leqslant X_n$，及 $|G(V_n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M} V_n$，$\forall\, n \in N$，因此，

$$|G(V_\tau)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M} V_\tau \leqslant \frac{\varepsilon}{3M} X_\tau, \forall\, \tau \in T.$$

从而，

$$E|G(V_\tau)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \forall\, \tau \in T,$$

于是，当 $\sigma, \tau \in T(n_0)$ 时，有

$$\begin{aligned}
&|EG(X_\tau) - EG(X_\sigma)| \\
&\leqslant |EG(U_\tau) - EG(U_\sigma)| + |EG(V_\tau) - EG(V_\sigma)| \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

这就证明了 $\{G(X_n)\}$ 是 L^1 有界渐近鞅.

(2)⇒(1). 设(2)成立，由于实数序列是渐近鞅的充要条件是该序列收敛，由此推知 G 是连续的，同上面证明一样，可以假定 $G(0) = 0$，我们只证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{G(x)}{x}$ 存在且有限. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{G(x)}{x}$ 存在，有限类似证明，采用反证法证明，设"$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{G(x)}{x}$ 存在且有限"不成立，则只可能有以下两情形：

1. $-\infty < \alpha = \varliminf\limits_{x\to\infty} \frac{G(x)}{x} < \varlimsup\limits_{x\to\infty} \frac{G(x)}{x} = \beta < \infty$，

2. $\varliminf_{x\to\infty}\frac{G(x)}{x}$ 或 $\varlimsup_{x\to\infty}\frac{G(x)}{x}$（也可能两者）为无穷（$\infty$，或 $-\infty$）.

取概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 如同引理 5.1，先看情形 1. 令 $y_n>1$，$y_n\uparrow\infty$，使得

$$\frac{G(y_{2n})}{y_{2n}}\to\beta,\frac{G(y_{2n-1})}{y_{2n-1}}\to\alpha.$$

再令

$$X_n(\omega)=y_nI_{[0,\frac{1}{y_n})}(\omega),(\omega\in\Omega,n\in N).$$

则 $G(X_n)(\omega)=G(y_n)I_{[0,\frac{1}{y_n})}(\omega),\forall\ \omega\in\Omega,\forall\ n\in N$. 先取 $a_n=b_n=y_n$，再取 $a_n=G(y_n),b_n=y_n,n\in N$. 由引理 5.1 知$\{X_n\}$是 L^1 有界渐近鞅，而$\{G(X_n)\}$是 L^1 有界的，但它不是渐近鞅，这与题设相矛盾，再看情形 2，又有以下四种情况：

2.1 $\varlimsup_{x\to\infty}\frac{G(x)}{x}=\infty$.

由归纳法可构造出一个实数序列$\{x_n\}$，$x_n>1$，$x_n\uparrow\infty$，使得对每一 $n\in N$，有

$$\frac{G(x_n)}{x_n}>2^{n-1}\quad 及\quad \frac{G(x_n)}{x_{n-1}}<1.$$

由于映射 $t\to\frac{G(x_k)}{t}$ 在区间$[x_k,x_{k+1}]$上是单调递减的，故可找到序列$\{y_k\}$，$x_k<y_k<x_{k+1}$，使得

$$\frac{G(x_{2n})}{y_{2n}}=2\quad 及\quad \frac{G(x_{2n-1})}{y_{2n-1}}=1.$$

于是，对一切 $n\in N$，有

$$\frac{x_{2n}}{y_{2n}}=\frac{2x_{2n}}{G(X_{2n})}<\frac{2}{2^{2n-1}}$$

及

$$\frac{x_{2n-1}}{y_{2n-1}}=\frac{2x_{2n-1}}{G(X_{2n-1})}<\frac{1}{2^{2n}}.$$

令 $X_n(\omega)=x_nI_{[0,\frac{1}{y_n})}(\omega),\forall\ \omega\in\Omega,n\in N$，则 $G(X_n)(\omega)=G(x_n)I_{[0,\frac{1}{y_n})}(\omega),\forall\ \omega\in\Omega,n\in N$. 先取 $a_n=x_n,b_n=y_n$，再取 a_n

$=G(X_n), b_n=y_n$ 应用引理 5.1 得 $\{X_n\}$ 是 L^1 有界渐近鞅，而 $\{G(X_n)\}$ 是 L^1 有界的，但不是渐近鞅，这也得到矛盾，

2.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{G(x)}{x}=-\infty.$

由归纳法可构造出一实数序列 $\{x_n\}, x_n>1, x_n\uparrow\infty$，使得对每一 $n\in N$，有

$$\frac{G(x_n)}{x_n}<-2^{n-1} \quad 及 \quad \frac{G(x_n)}{x_{n-1}}>-1$$

于是可找到序列 $\{y_k\}, x_k<y_k<x_{k-1}$，使得

$$\frac{G(x_{2n})}{y_{2n}}=-2, \frac{G(x_{2n-1})}{y_{2n-1}}=-1.$$

令 $X_n(\omega)=x_n I_{[0,\frac{1}{y_n})}(\omega), \forall\ \omega\in\Omega, n\in N$，于是，$\{X_n\}$ 为 L^1 有界渐近鞅，而 $\{G(X_n)\}$ 是 L^1 有界的，但不是渐近鞅，这也得到矛盾.

2.3 $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\dfrac{G(x)}{x}=-\infty.$

则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{G(x)}{x}=-\infty$. 这就化为情况 2.2.

2.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{G(x)}{x}=\infty.$

则 $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\dfrac{G(x)}{x}=\infty$. 就化为情况 2.1. 这就证明了 $(2)\Rightarrow(1)$. 定理证毕.

定理 5.4[38] 设 $G\in\Phi$，则对任一 L^1 有界概率渐近鞅 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n\in N\}$，$\{G(X_n), \mathscr{F}_n, n\in N\}$ 是 L^1 有界概率渐近鞅，G 的连续性对结论成立是必要的.

证 由于 L^1 有界适应序列 $\{X_n\}$ 是概率渐近鞅的充要条件是 $\{X_n^-\}$ 与 $\{X_n^+\}$ 均为概率渐近鞅(见[19]的定理 10,11). 类似于定理 5.3 的讨论，我们只须证明：对任意 $G\in\Phi$，任意非负的 L^1 有界概率渐近鞅 $\{X_n\}$，$\{G(X_n)\}$ 是 L^1 有界概率渐近鞅. 不失一般性，可假定 $G(0)=0$，以及 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{G(x)}{x}=0$.

由于$\{X_n\}$是L^1有界概率渐近鞅，故存在随机变量$X_\infty \in L^1$，使得$X_n \to X_\infty$, $a.e.$. $\forall \varepsilon > 0$，可取$k \geqslant 0$，使得当$x \geqslant k$时，有

$$\frac{|G(x)|}{x} < \varepsilon \qquad \text{或者} \qquad -\varepsilon x < G(x) < \varepsilon x.$$

及

$$P(X_\infty = k) = 0.$$

令　$U_n = X_n I_{\{X_n < k\}}, V_n = X_n I_{\{X_n \geqslant k\}}$，则

$$X_n = U_n + V_n \text{ 且 } G(X_n) = G(U_n) + G(V_n).$$

由[38]的引理2知$\{U_n\}$及$\{V_n\}$均为概率渐近鞅且$a.e.$收敛. 由G的连续性，不妨设在$[0,k]$上，$|G(x)| \leqslant \varphi_0$，则$G(U_n)$是一致有界的，从而满足条件$(B)$，且$G(U_n)$ $a.e.$收敛，由[39]的定理2.8知$\{G(U_n)\}$是概率渐近鞅.

而　$V_n(\omega)$　或者等于0或者大于等于k，故有

$$-\varepsilon V_n \leqslant G(V_n) \leqslant \varepsilon V_n$$

从而　$-\varepsilon V_\tau \leqslant G(V_\tau) \leqslant \varepsilon V_\tau \quad (\tau \in T)$

$$-\varepsilon E(V_\tau|\mathscr{F}_\sigma) \leqslant E(G(V_\tau)|\mathscr{F}_\sigma) \leqslant \varepsilon E(V_\tau|\mathscr{F}_\sigma)$$

$$(\tau, \sigma \in T, \tau \geqslant \sigma)$$

于是

$$\begin{aligned} & -\varepsilon(E(V_\tau|\mathscr{F}_\sigma) - V_\sigma) - 2\varepsilon V_\sigma \\ & \leqslant E(G(V_\tau)|\mathscr{F}_\sigma) - G(V_\sigma) \\ & \leqslant \varepsilon(E(V_\tau|\mathscr{F}_\sigma) - V_\sigma) + 2\varepsilon V_\sigma \end{aligned}$$

即

$$|E(G(V_\tau)|\mathscr{F}_\sigma) - G(V_\sigma)| \leqslant \varepsilon|E(V_\tau|\mathscr{F}_\sigma) - V_\sigma| + 2\varepsilon V_\sigma$$

由于V_n $a.e.$收敛于$V_\infty = X_\infty I_{\{X_\infty \geqslant k\}}$并且$V_\infty \in L^1$. $\forall \delta > 0$，取$M > 0$，使$P(V_\infty > M) < \frac{\delta}{2}$，由叶果洛夫定理知可取$A \in \mathscr{F}$，$P(A) < \frac{\delta}{2}$，使得在$\Omega - A$上$V_n$一致收敛于$V_\infty$. 于是存在$n_0$，当$n \geqslant n_0$时，有

$$|V_n(\omega) - V_\infty(\omega)| \leqslant 1, \omega \in \Omega - (\{V_\infty > M\} \cup A).$$

注意$P(\{V_\infty > M\} \cup A) < \delta$　并且当$\sigma \geqslant n$时，

$V_\sigma(\omega) \leqslant 1 + V_\infty(\omega) \leqslant 1 + M, \omega \in \Omega - (\{V_\infty > M\} \cup A).$
取 $\varepsilon < (M+1)^{-1}\delta$，则

$$P(\varepsilon V_\sigma > \delta) \leqslant P(V_\sigma > M+1) \leqslant P(\{V_\infty > M\} \cup A) < \delta$$

即 $(\varepsilon V_\sigma)_\sigma \geqslant n$ 当 $\varepsilon \to 0, n \to \infty$ 时依概率收敛于 0. 由[38]的引理 3 知$\{G(V_n)\}$是概率渐近鞅，从而$\{G(X_n)\}$是概率渐近鞅，又因

$$\begin{aligned} E|G(X_n)| &\leqslant E|G(U_n)| + E|G(V_n)| \\ &\leqslant \varphi_0 + \varepsilon EV_n \\ &\leqslant \varphi_0 + \varepsilon \sup E|X_n| < \infty \end{aligned}$$

这就证明了$\{G(X_n)\}$是 L^1 有界的，由于实数序列是概率渐近鞅的充要条件是该序列收敛，从而推知 G 必是连续的.

定理 5.5 设 $G \in \Psi$，则有

(1) 若 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为一致可积的 L^1 极限鞅，则$\{G(X_n), \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为一致可积 L^1 极限鞅.

(2) 若 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为一致可积(或渐近一致可积)的概率极限鞅，则$\{G(X_n), \mathscr{F}_n, n \in N\}$为一致可积(或渐近一致可积)的概率极限鞅.

(3) 若 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为一致可积(或渐近一致可积)的 Mil，则$\{G(X_n), \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为一致可积(或渐近一致可积)的 Mil.

(4) 若 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为满足条件(B)的极限鞅(或 Mil)，则$\{G(X_n), \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为满足条件(B)的极限鞅或(Mil).

函数 G 的连续性对定理成立是必要的.

证 不失一般性，不妨设 $G(0) = 0$，我们先证明：若$\{X_n\}$一致可积，则$\{G(X_n)\}$一致可积. 先证$\{G(X_n)\}L^1$ 有界. 由于 $|x| \to \infty$, $G(x) = O(x)$，故存在 $K, L > 0$，使当 $|x| > K$ 时，有 $|G(x)| < L|x|$，设在$[-K, K]$上，$|G(x)| \leqslant M_0$，则对每一 $n \in N$，有

$$\begin{aligned} E|G(X_n)| &= \int_{\{|X_n| \leqslant K\}} |G(X_n)| dP + \int_{\{|X_n| > K\}} |G(X_n)| dP \\ &\leqslant M_0 + LE|X_n| \leqslant M_0 + L \sup_n E|X_n|. \end{aligned}$$

于是，$\sup\limits_n E|G(X_n)| < \infty$. 其次，$\forall\, \varepsilon > 0$，由于$\{X_n\}$一致可积，可取$a_0 \geqslant K$，使有

$$\int_{\{|X_n|>a_0\}} |X_n| dP < \frac{\varepsilon}{2L}, \forall\, n \in N.$$

设在$[-a_0, a_0]$上，$|G(x)| \leqslant M$，记$S = \sup\limits_n E|G(X_n)| < \infty$，若$a > 2MS\varepsilon^{-1}$，则

$$\int_{\{|G(X_n)|>a\}} |G(X_n)| dP = \int_{\{|G(X_n)|>a\}\cap\{|X_n|\leqslant a_0\}} |G(X_n)| dP$$

$$+ \int_{\{|G(X_n)|>a\}\cap\{|X_n|>a_0\}} |G(X_n)| dP$$

$$\leqslant MP(|G(X_n)| > a) + L \int_{\{|X_n|>a_0\}} |X_n| dP$$

$$\leqslant \frac{MS}{a} + L \times \frac{\varepsilon}{2L} < \varepsilon, \forall\, n \in N.$$

这就表明$\{G(X_n)\}$一致可积.

下面证明若$\{X_n\}$渐近一致可积，则$\{G(X_n)\}$亦渐近一致可积，由假设，存在上升集合序列$\{A_n\}$满足(a) $A_n \in \mathscr{F}_n, n \in N$. (b) $\bigcup\limits_n A_n = \Omega$，且对每一固定的$k \in N$，$\{X_n I_{A_k}, n \geqslant k\}$为一致可积，类似于前可证$\{G(X_n) I_{A_k}, n \geqslant k\}$一致可积，这表明$\{G(X_n)\}$为渐近一致可积. 利用[39]的定理3.1的推论及[40]的定理1与[41]的定理1的推论1立即知(1)与(2)成立. 利用定理2.3及[41]的定理5立即知(3)成立.

最后证(4). 设X为满足条件(B)的极限鞅，则存在$X_\infty \in L^1$，使得$X_n \to X_\infty$ $a.e.$，由于G连续，故$G(X_n) \to G(X_\infty)$，$a.e.$ $(n \to \infty)$.

设$|x| > k$时，$|G(x)| < L|x|$；当$|x| \leqslant k$时，$|G(x)| \leqslant \varphi_0$，则

$$E|G(X_\tau)| = E|G(X_\tau) I_{\{|X_\tau| \leqslant k\}}| + E|G(X_\tau) I_{\{|X_\tau| > k\}}|$$

$$\leqslant \varphi_0 P(|X_\tau| \leqslant K) + LE|X_\tau|$$
$$\leqslant \varphi_0 K^{-1} \sup_{\tau \in T} E|X_\tau| + L \sup_{\tau \in T} E|X_\tau| < \infty.$$

所以$\{G(X_n)\}$满足条件(B)，由[39]的定2.8知道$\{G(X_n)\}$是概率极限鞅，更是极限鞅(或Mil)。这就证明了(4)成立，因常数序列为概率渐近鞅(或L^1极限鞅，或Mil，或概率极限鞅)的充要条件是该序列收敛，由此推知$G(x)$必连续。

定理 5.6 设$G:R \to R$满足条件：

(1) 连续，

(2) 当$x \to \infty$时，$G(x) = o(x)$，

则对任一L^1有界的Mil$\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$，$\{G(X_n), \mathscr{F}_n, n \in N\}$是$L^1$有界的Mil。

证明不难，从略。

§6 鞅型序列的变换性

设$V = \{V_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$为可预报序列，称$\mathscr{X}$关于$V$具有变换性，如果对$\mathscr{X}$中的每一成员$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$，$X$关于$V$的变换

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} V_k(X_k - X_{k-1}), n \geqslant 0, (X_{-1} = 0)$$

满足(1) $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$仍是$\mathscr{X}$中的成员，

(2) 若X是L^1有界的，则在$\{\sup_n |V_n| < \infty\}$上$Y_n$ a.e. 收敛。

我们知道：若$\mathscr{X}$是实值鞅全体且$\mathscr{X}$中每一成员$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$关于$V = \{V_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$的变换是可积的，则$\mathscr{X}$具有变换性。

Alloin（见[13]）证明了循序鞅具有变换性。对终鞅而言(1)成立，但(2)不成立。

例 6.1 令$X_0 = 0, X_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^{-1}, n \geqslant 1, \mathscr{F}_n =$

$\sigma(X_0,X_1,\cdots,X_n),n\geqslant 0$,则 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为渐近鞅.令 $V_0=0,V_k=(-1)^{k-1},k\geqslant 1$,$X$ 关于 V 的变换为 $Y_n=\sum\limits_{k=1}^{n}V_k(X_k-X_{k-1})=\sum\limits_{k=1}^{n}k^{-1}$.由于 $Y_n\to\infty(n\to\infty)$.故 $\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 不是渐近鞅.它甚至不是概率极限鞅.这说明渐近鞅,概率渐近鞅、极限鞅、Mil、概率极限鞅、L^1 极限鞅均不具有变换性.

令 $X_0=0,X_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2},\mathscr{F}_n=\sigma(X_0,X_1,\cdots,X_n)$,则 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为一致有界的拟鞅,再令 $V_0=0,V_k=k,k\geqslant 1$,于是,X 关于 V 的变换为 $Y_0=0,Y_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$,则 $Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 不是拟鞅,这说明在一般情形下拟鞅亦不具有变换性.但是,当 $V=\{V_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 一致有界时,即存在常数 C,使得 $|V_n|\leqslant C$. $a.e.$ $(\forall\ n\in N)$,则拟鞅 X 关于 V 的变换是拟鞅.下面的定理表明拟鞅 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 关于任一可预报序列 $V=\{V_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 的变换 $Y_n=\sum\limits_{k=0}^{n}V_k(X_k-X_{k-1})$ 对于(2)总是成立的.

定理 6.2 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为 L^1 有界拟鞅,$V=\{V_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为任一可预报序列,则 $Y_n=\sum\limits_{k=0}^{n}V_k(X_k-X_{k-1})$ 在集合 $\{\sup\limits_{n\in N}|V_n|<\infty\}$ 上 $a.e.$ 收敛.

证 令 $D_n=X_n-X_{n-1}$ 和 $e_n=E(D_n|\mathscr{F}_{n-1}),n\in N$,则 $\{\sum\limits_{k=0}^{n}(D_k-e_k),\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是 L^1 有界鞅,由拟鞅的定义知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}E|e_k|<\infty$.从而

$$\sum_{n=0}^{\infty}E|e_n|<\infty\ a.e. \tag{6.1}$$

由第二章的定理 5.8 知在集合 $\{\sup\limits_{n\in N}|V_n|<\infty\}$ 上 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}V_k(D_k-e_k)$

$a.e.$ 收敛，又由(6.1)式知在集合$\{\sup\limits_{n\in N}|V_n|<\infty\}$上$\sum\limits_{k=0}^{\infty}|V_k e_k|<\infty$，$a.e.$ 由此立即得知在集合$\{\sup\limits_{n\in N}|V_n|<\infty\}$上$\sum\limits_{k=0}^{\infty}V_k D_k$ $a.e.$ 收敛.

§7 鞅型序列的平方可和性及局部收敛性

称$\mathscr{H}$具有平方可和性，如果对$\mathscr{H}$中每一成员$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$，有$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(X_n-X_{n-1})^2<\infty$ $a.e.$，(其中$X_{-1}=0$). 已知L^1有界鞅类具有平方可和性.

定理 7.1 L^1有界拟鞅类具有平方可和性.

证 设$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为$L^1$有界拟鞅. 令

$D_n=X_n-X_{n-1}$，$e_n=E(D_n|\mathscr{F}_{n-1})$，则$\{\sum\limits_{k=0}^{n}(D_k-e_k),\mathscr{F}_n,n\in N\}$是$L^1$有界鞅. 由Austin的结果(第二章定理5.7)知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(D_n-e_n)^2<\infty$ $a.e.$. 再由拟鞅的定义知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}E|e_n|<\infty$，从而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|e_n|<\infty$ $a.e.$. 于是$\sum\limits_{n=0}^{\infty}e_n^2<\infty$ $a.e.$ 及$e_n\to 0$ $a.e.$，因此$\sup\limits_{n\in N}|e_n|<\infty$ $a.e.$. 由第二章的定理5.8(2)知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}e_n(D_n-e_n)$ $a.e.$ 收敛. 因此立即得知：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(X_n-X_{n-1})^2=\sum_{n=0}^{\infty}D_n^2<\infty\ a.e..$$

Alfoin 证明了循序鞅具有平方可和性(见[13]). Tomkins 于 1983 年指出终鞅不具有平方可和性(见[26]). 下面的例子表明渐近鞅不具有平方可和性.

例 7.2 设 $X_0=0, X_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^{-\frac{1}{2}}, \mathscr{F}_n=\mathscr{F}_0=\{\varnothing, \Omega\}, n\geqslant 1$, 则 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n\in N\}$ 为一致有界的渐近鞅, 但

$$\sum_{n=0}^{\infty}(X_n-X_{n-1})^2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\infty.$$

即渐近鞅不具有平方可和性.

由上例还可知概率渐近鞅、极限鞅、Mil、L_1 极限鞅及概率极限鞅均不具有平方可和性.

定理 7.3 设 $X=\{X_n, \mathscr{F}_n, n\in N\}$ 为可积适应序列, 若满足条件(C), 则

$$\{\sup_{n\in N}|X_n|<\infty, \sum_{n=0}^{\infty}|E(X_n|\mathscr{F}_{n-1})-X_{n-1}|<\infty\}$$
$$\subset\{\sum_{n=0}^{\infty}(X_n-X_{n-1})^2<\infty\}.$$

证 令 $Y_n=X_n-\sum_{k=0}^{n}(E(X_k|\mathscr{F}_{k-1})-X_{k-1})$, 则 $\{Y_n, \mathscr{F}_n, n\in N\}$ 为鞅, 对任意取定的实数 $a>0, b>0$, 令

$$\tau=\inf\{n\in N, |X_n|>a\},$$

$$\sigma=\inf\{n\in N, \sum_{k=0}^{n}|E(X_k|\mathscr{F}_{k-1})-X_{k-1})|>b\}.$$

则 $\tau, \sigma\in \overline{T}$, 再令 $\tau_n=\tau\wedge\sigma\wedge n, n\in N$, 则 $\{\tau_n, n\in N\}\subset T$, $\{Y_{\tau_n}, \mathscr{F}_{\tau_n}, n\in N\}$ 仍为鞅, 且

$$E|Y_{\tau_n}|\leqslant E(\sum_{k=0}^{\tau_n}|E(X_k|\mathscr{F}_{k-1})-X_{k-1}|)$$

$$+\sum_{k=0}^{n}E[|X_k|(I_{\{\sigma>k=\tau\}}+I_{\{\sigma=k\leqslant\tau\}})+|X_n|I_{\{n<(\sigma\wedge\tau)\}}]$$

$$\leqslant a + b + \sum_{k=0}^{n} E|X_k| I_{(\sigma \geqslant k-\tau)}$$

$$\leqslant a + b + \int_{(\tau < \infty)} |X_\tau| dP < \infty, \forall\, n \in N.$$

故$\sup_{n \in N} E|Y_{\tau_n}| < \infty$，由鞅有平方可和性（见第二章定理 5.7）知：

$$\sum_{n=0}^{\infty} (Y_{\tau_{n+1}} - Y_{\tau_n})^2 < \infty,$$

从而在集合$\{\sup_{n \in N} |X_n| \leqslant a, \sum_{n=0}^{\infty} |E(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) - X_{n-1}| \leqslant b\}$上 $\sum_{n=0}^{\infty} (Y_{n+1} - Y_n)^2 < \infty$，由 a,b 的任意性立即知：

$$\{\sup_{n \in N} |X_n| < \infty, \sum_{n=0}^{\infty} |E(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) - X_{n-1}| < \infty\}.$$

$$\subset \{\sum_{n=0}^{\infty} (Y_{n+1} - Y_n)^2 < \infty\}.$$

又因为

$$\{\sum_{n=0}^{\infty} |E(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) - X_{n-1}| < \infty\}$$

$$\subset \{\sum_{n=0}^{\infty} (E(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) - X_{n-1})^2 < \infty\},$$

于是由

$$\sum_{n=0}^{\infty} (X_n - X_{n-1})^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (Y_n - Y_{n-1} + (E(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) - X_{n-1}))^2$$

$$\leqslant 2\Big[\sum_{n=0}^{\infty} (Y_n - Y_{n-1})^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (E(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) - X_{n-1})^2\Big]$$

知定理成立.

推论 7.4 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是拟终鞅，若满足条件 (C)，则 $\sum_{n=0}^{\infty} (X_n - X_{n-1})^2 < \infty$, a.e..

证 由拟终鞅的定义知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|E(X_n|\mathscr{F}_{n-1})-X_{n-1}|<\infty$, $a.e.$. 再由推论 2.6 知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ $a.e.$ 存在且有限. 从而,$\sup\limits_n|X_n|<\infty$, $a.e.$, 由定理 7.3 立即知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(X_n-X_{n-1})^2<\infty$, $a.e.$.

定理 7.5 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是拟终鞅,满足条件(C),$V=\{V_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为任一可预报序列,则 X 关于 V 的变换 $\sum\limits_{k=0}^{n}V_k(X_k-X_{k-1})$ 在集合$\{\sup\limits_n|V_n|<\infty\}$ 上 $a.e.$ 收敛.

证 对任意的 $a>0$,令 $D_k=X_k-X_{k-1}$,再令

$$\tau=\inf\{n\in N,\sum_{k=0}^{n-1}|E(D_k|\mathscr{F}_{k-1})|>a\},$$

$$\tau_n=\tau\wedge n,n\in N,$$

记

$$Y_n=X_{\tau_n}-\sum_{k=0}^{\tau_n}E(D_k|\mathscr{F}_{k-1}),n\in N,$$

则$\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是鞅,对任意的 $\sigma\in\overline{T}$,有

$$\int_{\{\sigma<\infty\}}|Y_\sigma|dP\leqslant\int_{\{\sigma<\infty\}}|X_{\tau\wedge\sigma}|dP+\int_{\{\sigma<\infty\}}\sum_{k=0}^{\tau\wedge\sigma}|E(D_k|\mathscr{F}_{k-1})|dP$$

$$\leqslant\int_{\{\tau\wedge\sigma<\infty\}}|X_{\tau\wedge\sigma}|dP+a<\infty.$$

故鞅$\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$满足条件(C),从而必满足条件(D)(见[42]).于是由第二章的定理 5.8(2) 知

$$\{\sup_n|V_n|<\infty\}\subset\{\sum_{n=0}^{\infty}V_n(Y_n-Y_{n-1})\text{ 收敛}\}.$$

又因为在$\{\sum\limits_{n=0}^{\infty}|E(D_n|\mathscr{F}_{n-1})|\leqslant a\}$上 $Y_n=X_n-\sum\limits_{k=0}^{\infty}|E(D_k|\mathscr{F}_{k-1})|$,所以

$$\{\sup_n |V_n| < \infty, \sum_{n=0}^{\infty} |E(D_n | \mathscr{F}_{n-1})| \leqslant a\}$$

$$\subset \{\sum_{n=0}^{\infty} [V_n(X_n - X_{n-1}) - V_n E(D_n | \mathscr{F}_{n-1})] \text{ 收敛}\},$$

再由 a 的任意性及拟终鞅的定义知本定理成立.

下面讨论鞅型序列的局部收敛性(见[43]).

定理 7.6 设 $X = \{X_n = \sum_{k=0}^{n} D_k, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为渐近鞅,若对任意停时 τ,满足:$\forall\ n \in N$,有

$$E(\sum_{k=0}^{n} D_k I_{\{\tau \geqslant k\}})^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} E(D_k^2 I_{\{\tau \geqslant k\}}),$$

则

$$\{\sum_{k=0}^{\infty} E(D_k^2 | \mathscr{F}_{k-1}) < \infty\} \subset \{X_n \rightarrow\}.$$

证 不失普遍性,可设 $D_0 = 0$,对每一固定的 $\lambda > 0$,令

$$\tau_\lambda = \inf\{n \in N, \sum_{k=0}^{n+1} E(D_k^2 | \mathscr{F}_{k-1}) > \lambda\},$$

约定 $\inf\varnothing = \infty$. 则 τ_λ 是 $\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$ 停时. 由渐近鞅的可选采样定理(见定理 3.5)知 $\{X_{\tau_\lambda \wedge n}, \mathscr{F}_{\tau_\lambda \wedge n}, n \in N\}$ 为渐近鞅,且

$$X_{\tau_\lambda \wedge n} = \sum_{k=0}^{n} D_k I_{\{\tau_\lambda \geqslant k\}}.$$

于是,由假设有

$$\begin{aligned} E(X_{\tau_\lambda \wedge n})^2 &= E(\sum_{k=0}^{n} D_k I_{\{\tau_\lambda \geqslant k\}})^2 \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} E(D_k^2 I_{\{\tau_\lambda \geqslant k\}}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} E[E(D_k^2 I_{\{\tau_\lambda \geqslant k\}} | \mathscr{F}_{k-1})] \\ &= E[\sum_{k=0}^{n} E(D_k^2 | \mathscr{F}_{k-1}) I_{\{\tau_\lambda \geqslant k\}}] \end{aligned}$$

$$= E[\sum_{k=1}^{\tau_\lambda \wedge n} E(D_k^2 | \mathscr{F}_{k-1})],$$

再利用 $|a| \leqslant a^2 + 1$,则有

$$E|X_{\tau_\lambda \wedge n}| \leqslant E(X_{\tau_\lambda \wedge n})^2 + 1 \leqslant \lambda + 1,$$

从而$\sup_n E|X_{\tau_\lambda \wedge n}| < \infty$. 但 L^1 有界的渐近鞅 $a.e.$ 收敛且有限. 故对每一 $\lambda > 0$,在$\{\tau_\lambda = \infty\}$ 上,$\lim_{n\to\infty} X_n$ $a.e.$ 存在且有限,从而

$$\{\sum_{k=0}^{\infty} E(D_k^2 | \mathscr{F}_{k-1}) < \infty\} \subset \{X_n \to\}.$$

注　上述定理中的渐近鞅换成概率渐近鞅,其它条件不变,定理仍成立.

由上述定理可立即推得第二章的定理 4.6 第一个结论,即:

推论 7.7　设 $X = \{X_n = \sum_{k=0}^{n} D_k, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为鞅,则

$$\{\sum_{k=0}^{\infty} E(D_k^2 | \mathscr{F}_{k-1}) < \infty\} \subset \{X_n \to\}.$$

证　注意到鞅是渐近鞅且鞅差序列是直交的,从而定理中的条件必然满足,故由定理 7.6 立即知推论成立.

定理 7.8　设 $X = \{X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是渐近鞅,其 Riesz 分解(见定理 3.8)为$X_n = Y_n + Z_n, n \in N$. 设$\{Y_n\}$与$\{Z_n\}$的鞅差序列分别为$\{D_n(Y)\}$与$\{D_n(Z)\}$. 又设$\{p_i\}$是一正实数序列且 $1 \leqslant p_i \leqslant 2, i \geqslant 0$. 则

$$\{\sum_{i=0}^{\infty} E(|D_i|^{p_i} | \mathscr{F}_{i-1}) < \infty, \sum_{i=0}^{\infty} |E(D_i(Z) | \mathscr{F}_{i-1})| < \infty\}$$
$$\subset \{X_n \to\}.$$

证　取常数 $c \geqslant 1$,首先,我们有

$$P(\{|D_i| \geqslant c\} | \mathscr{F}_{i-1})$$
$$= E(I_{\{|D_i| \geqslant c\}} | \mathscr{F}_{i-1})$$

$$\leqslant c^{-p_i}E(|D_i|^{p_i}I_{\{|D_i|\geqslant c\}}|\mathscr{F}_{i-1})$$
$$\leqslant c^{-1}E(|D_i|^{p_i}|\mathscr{F}_{i-1}),$$

其次，

$$|E(D_iI_{\{|D_i|\leqslant c\}}|\mathscr{F}_{i-1})|$$
$$= |E(D_i|\mathscr{F}_{i-1}) - E(D_iI_{\{|D_i|>c\}}|\mathscr{F}_{i-1})|$$
$$= |E(D_i(Z)|\mathscr{F}_{i-1}) - E(D_iI_{\{|D_i|>c\}}|\mathscr{F}_{i-1})|$$
$$\leqslant |E(D_i(Z)|\mathscr{F}_{i-1}) + E(|D_i|I_{\{|D_i|>c\}}|\mathscr{F}_{i-1})$$
$$\leqslant |E(D_i(Z)|\mathscr{F}_{i-1}) + c^{1-p_i}E(|D_i|^{p_i}|\mathscr{F}_{i-1})$$
$$\leqslant |E(D_i(Z)|\mathscr{F}_{i-1})| + E(|D_i|^{p_i}|\mathscr{F}_{i-1}),$$

最后，

$$0\leqslant E(D_i^2I_{\{|D_i|\leqslant c\}}|\mathscr{F}_{i-1}) - [E(D_iI_{\{|D_i|\leqslant c\}}|\mathscr{F}_{i-1})]^2$$
$$\leqslant E(D_i^2I_{\{|D_i|\leqslant c\}}|\mathscr{F}_{i-1})$$
$$\leqslant c^{2-p_i}E(|D_i|^{p_i}|\mathscr{F}_{i-1})$$
$$\leqslant cE(|D_i|^{p_i}|\mathscr{F}_{i-1}),$$

于是由第二章的定理 4.8 知：

$$\left\{\sum_{i=0}^{\infty}E(|D_i|^{p_i}|\mathscr{F}_{i-1})<\infty,\sum_{i=0}^{\infty}|E(D_i(Z)|\mathscr{F}_{i-1})|<\infty\right\}$$
$$\subset\left\{\sum_{i=0}^{\infty}P(\{|D_i|\geqslant c\}|\mathscr{F}_{i-1})<\infty,\sum_{i=0}^{\infty}E(D_iI_{\{|D_i|\leqslant c\}}|\mathscr{F}_{i-1})\text{ 收敛},\right.$$
$$\left.\sum_{i=0}^{\infty}[E(D_i^2I_{\{|D_i|\leqslant c\}}|\mathscr{F}_{i-1})-(E(D_iI_{\{|D_i|\leqslant c\}}|\mathscr{F}_{i-1}))^2]<\infty\right\}$$
$$\subset\{X_n\to\}.$$

由上面定理可立即推得第二章推论 4.9.

推论 7.9 设 $X=\{X_n=\sum_{i=0}^{n}D_i,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是鞅，$1\leqslant p\leqslant 2$，则

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}E(|D_n|^p|\mathscr{F}_{n-1})<\infty\right\}\subset\{X_n\to\}.$$

定理 7.10 设 $X=\{X_n=\sum_{i=0}^{n}D_i,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是可积适应序列，设正实数序列 $\{p_i\}$ 满足 $0<p_i<1,i\in N$，则

$$\{\sum_{n=0}^{\infty}E(|D_n|^{p_n}|\mathscr{F}_{n-1})<\infty\}\subset\{X_n\rightarrow\}.$$

这个定理的证明与定理 7.8 的证明类似，故证明略.

由定理 7.8 及定理 7.10 立即得下面推论.

推论 7.11 设 $X=\{X_n=\sum_{i=0}^{n}D_i,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为渐近鞅，p 为实数，$0<p\leqslant 2$，则

$$\{\sum_{n=0}^{\infty}E(|D_n|^{p}|\mathscr{F}_{n-1})<\infty,\sum_{n=0}^{\infty}|E(D_n(Z)|\mathscr{F}_{n-1})|<\infty\}$$
$$\subset\{X_n\rightarrow\}.$$

定理 7.12 设 $X=\{X_n=\sum_{i=0}^{n}D_i,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为渐近鞅，$X_n=Y_n+Z_n,n\in N$ 为其 Riesz 分解，$\{Y_n\}$ 与 $\{Z_n\}$ 的差序列分别为 $\{D_n(Y)\}$ 与 $\{D_n(Z)\}$，$\{U_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为正的可预报序列，$\{p_n\}$ 是正的实数序列且 $p_n\geqslant 2,n\in N$，则

$$\{\sum_{n=0}^{\infty}U_n<\infty,\sum_{n=0}^{\infty}U_n^{1-\frac{p_n}{2}}E(|D_n|^{p_n}|\mathscr{F}_{n-1})<\infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|E(D_n(Z)|\mathscr{F}_{n-1})|<\infty\}\subset\{X_n\rightarrow\}.$$

证 对每一固定的 $i\in N$，令

$$Y_i=[E(|D_i|^{p_i}|\mathscr{F}_{i-1})]^{\frac{2}{p_i}}$$

当 $p_i>2$ 时，则 $Y_i>U_i\Leftrightarrow[E(|D_i|^{p_i}|\mathscr{F}_{i-1})]^{\frac{2}{p_i}-1}<U_i^{1-\frac{p_i}{2}}$，于是，

$$\begin{aligned}Y_i&=Y_iI_{(Y_i\leqslant U_i)}+Y_iI_{(Y_i>U_i)}\\&\leqslant U_i+[E(|D_i|^{p_i}|\mathscr{F}_{i-1})]^{\frac{2}{p_i}-1}E(|D_i|^{p_i}|\mathscr{F}_{i-1})I_{(Y_i>U_i)}\\&\leqslant U_i+U_i^{1-\frac{p_i}{2}}E(|D_i|^{p_i}|\mathscr{F}_{i-1}).\end{aligned}$$

但是，当 $p_i=2$ 时，仍有

$$Y_i \leqslant U_i + U_i^{1-\frac{p_i}{2}} E(|D_i|^{p_i} | \mathscr{F}_{i-1}).$$

从而，在集合 $\{\sum_{i=0}^{\infty} U_i < \infty, \sum_{i=0}^{\infty} U_i^{1-\frac{p_i}{2}} E(|D_i|^{p_i} | \mathscr{F}_{i-1}) < \infty\}$ 上有

$\sum_{i=0}^{\infty} [E(|D_i|^{p_i} | \mathscr{F}_{i-1})]^{\frac{2}{p_i}} < \infty$，再由条件期望的 Jensen 不等式知：

$$[E(|D_i|^2 | \mathscr{F}_{i-1})]^{\frac{p_i}{2}} \leqslant E(|D_i|^{p_i} | \mathscr{F}_{i-1}).$$

即

$$E(|D_i|^2 | \mathscr{F}_{i-1}) \leqslant [E(|D_i|^{p_i} | \mathscr{F}_{i-1})]^{\frac{2}{p_i}}.$$

于是，由定理 7.8 知：

$$\{\sum_{i=0}^{\infty} U_i < \infty, \sum_{i=0}^{\infty} U_i^{1-\frac{p_i}{2}} E(|D_i|^{p_i} | \mathscr{F}_{i-1}) < \infty,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} |E(D_i^{(Z)} | \mathscr{F}_{i-1})| < \infty\}$$

$$\subset \{\sum_{i=0}^{\infty} E(|D_i|^2 | \mathscr{F}_{i-1}) < \infty, \sum_{i=0}^{\infty} |E(D_i^{(Z)} | \mathscr{F}_{i-1})| < \infty\}$$

$$\subset \{X_n \rightarrow\}.$$

这就证明了定理.

设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为任一可积适应序列. 令

$$Y_0 = X_0, D_n(Y) = Y_n - Y_{n-1} = X_n - E(X_n | \mathscr{F}_{n-1}), n \geqslant 1,$$

$$Z_0 = 0, D_n(Z) = Z_n - Z_{n-1} = E(X_n | \mathscr{F}_{n-1}) - X_{n-1}, n \geqslant 1.$$

则 X 有如下分解：$X_n = Y_n + Z_n, n \in N$，其中 $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是鞅，$Z = \{Z_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是可预报序列，我们称上述分解为可积适应序列的 Doob 分解，利用 Doob 分解我们可以得到.

定理 7.13 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为可积适应序列，其 Doob 分解为 $X_n = Y_n + Z_n, n \in N$，设 $\{p_i\}$ 是一正实数序列且 $1 \leqslant p_i \leqslant 2, i \in N$，则

$$\{\sum_{i=0}^{\infty} E(|X_i - X_{i-1}|^{p_i} | \mathscr{F}_{i-1}) < \infty,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}|E(X_i|\mathscr{F}_{i-1})-X_{i-1}|<\infty\}$$
$$\subset\{X_n\rightarrow\}.$$

证明仿定理 7.8,从略.

推论 7.14 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是拟终鞅,$\{p_i\}$ 是正的实数序列且 $1\leqslant p_i\leqslant 2,i\in N$,则

$$\{\sum_{n=0}^{\infty}E(|X_n-X_{n-1}|^{p_n}|\mathscr{F}_{n-1})<\infty\}\subset\{X_n\rightarrow\}.$$

定理 7.15 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为可积适应序列,其 Doob 分解为 $X_n=Y_n+Z_n,n\in N$,$\{U_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为正的可预报序列,$\{p_n\}$ 是实数序列且 $p_n\geqslant 2,n\in N$,则

$$\{\sum_{n=0}^{\infty}U_n<\infty,\{\sum_{n=0}^{\infty}U_n^{1-\frac{p_n}{2}}E(|D_n|^{p_n}|\mathscr{F}_{n-1})<\infty,$$
$$\{\sum_{n=0}^{\infty}|E(X_n|\mathscr{F}_{n-1})-X_{n-1}|<\infty\}$$
$$\subset\{X_n\rightarrow\}.$$

证 利用定理 7.13,采用定理 7.12 的证明方法,可立即推知本定理成立.

推论 7.16 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为拟终鞅,$\{b_n\}$ 为正的收敛序列,$p\geqslant 2$,则

$$\{\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{1-\frac{p}{2}}E(|D_n|^p|\mathscr{F}_{n-1})<\infty\}\subset\{X_n\rightarrow\}.$$

注 推论 7.14 与推论 7.16 改进了 Y.S.Chow 关于鞅的相应结论(见第二章的推论 4.9 及定理 4.10).

第四章 实值两指标鞅

近年来关于多指标鞅以及对它们的随机积分有了大量的研究，已出现了很多文献([45]、[46]、[47])，特别是关于两指标鞅的研究已有了专著[48]. 本章我们以两指标为例来介绍这一方面的一些基本概念与结果.

§1 主要记号与定义

记 $R^2=(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)$，$R_+^2=[0,\infty)\times[0,\infty)$，$N^2=N\times N$，简记 $S=R_+^2$，S 中的点用 z，ξ 或 η 等来表示，它们的坐标用 (s,t)，(u,v)，或 (x,y) 等来表示. 如果 $z=(s,t)$，$z'=(s',t')\in S$，我们定义如下的顺序关系：

一般偏序"$\leqslant$"：$z\leqslant z'\Longleftrightarrow s\leqslant s'$ 且 $t\leqslant t'$.

严格偏序"$<$"：$z<z'\Longleftrightarrow s<s'$ 且 $t<t'$.

S 中可以引入格论运算 $\vee$，$\wedge$.

对任意 $z=(s,t)$，$z'=(s',t')\in S$，定义

$z\wedge z'=\inf(z,z')=(\inf(s,s'),\inf(t,t'))$,

$z\vee z'=\sup(z,z')=(\sup(s,s'),\sup(t,t'))$.

令 $(z,z']=\{\xi\in S:z<\xi\leqslant z'\}$，并称之为 S 中的矩形，特别地，记 $R_z=(0,z]$，其中 $0=(0,0)$. 对于 $z=(s,t)\in S$，记

$$R_z^1=R_s^1=\{\xi=(u,v)\in S:0<u\leqslant s\},$$

$$R_z^2=R_t^2=\{\xi=(u,v)\in S:0<v\leqslant t\},$$

$$Q_z=R_z^1\cup R_z^2,$$

$$R_z = [0, z),$$

$$R_z^{+} = (z, \infty).$$

如果 $A \subset S$，我们定义

$$z \leqslant A \Longleftrightarrow z \leqslant z', \forall\ z' \in A,$$

$$z < A \Longleftrightarrow z < z', \forall\ z' \in A,$$

$$A \leqslant z \Longleftrightarrow z' \leqslant z, \forall\ z' \in A,$$

$$A < z \Longleftrightarrow z' < z, \forall\ z' \in A.$$

若 A、$B \subset S$，用类似方法可定义 $A \leqslant B$、$A < B$ 等. 若 $A \subset S$，记 $R_A = \bigcup\limits_{z \in A} R_z$，$R_A = \bigcup\limits_{z \in A} R_z$，$R_A^{+} = \bigcup\limits_{z \in A} R_z^{+}$.

若 A 是一个随机集合(即 A 是由 Ω 到 R_+^2 的子集族上的一个映射)，记 $(A, \infty)(\omega) = \bigcup\limits_{z \in A(\omega)} (z, \infty)$，$[A, \infty)(\omega) = \bigcup\limits_{z \in A(\omega)} [z, \infty)$.

设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是完备的概率空间，$\{\mathscr{F}_z, z \in R_+^2\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代族族. 如果 $z = (s, t)$，我们定义下面两个单参数的子 σ 代数族：$\{\mathscr{F}_s^1, s \in R_+\}$ 和 $\{\mathscr{F}_t^2, t \in R_+\}$，其中

$$\mathscr{F}_s^1 \triangleq \bigvee_{v \in R_+} \mathscr{F}_{(s,v)} \triangleq \sigma\Big(\bigcup_{v \in R_+} \mathscr{F}_{(s,v)}\Big) \triangleq \mathscr{F}_{s,\infty} \triangleq \mathscr{F}_z^1,$$

$$\mathscr{F}_t^2 \triangleq \bigvee_{u \in R_+} \mathscr{F}_{(u,t)} \triangleq \sigma\Big(\bigcup_{u \in R_+} \mathscr{F}_{(u,t)}\Big) \triangleq \mathscr{F}_{\infty,t} \triangleq \mathscr{F}_z^2.$$

下面两参数的子 σ 代数族经常被使用.

$$\mathscr{F}_z^{*} \triangleq \mathscr{F}_{(s,t)}^{*} \triangleq \mathscr{F}_s^1 \vee \mathscr{F}_t^2 \triangleq \sigma(\mathscr{F}_s^1 \cup \mathscr{F}_t^2), z \in R_+^2.$$

关于子 σ 代数族 $\{\mathscr{F}_z, z \in R_+^2\}$，通常附加如下几个条件：

(F_1)　单调非降性. 即子 σ 代数族关于 z 的偏序是单调上升的(或简称单增的). 亦即 $z \leqslant z' \Rightarrow \mathscr{F}_z \subset \mathscr{F}_{z'}$.

(F_2)　右连续性. 即 $\forall\ z \in R_+^2$，$\mathscr{F}_z = \bigcap\limits_{z < z'} \mathscr{F}_{z'}$.

(F_3)　完备性. 即 $\mathscr{F}_0$ 包含 $\mathscr{F}$ 的所有 P 可略集.

(F_4)　条件独立性. 即 $\forall\ z \in R_+^2$，$\mathscr{F}_z^1$ 和 $\mathscr{F}_z^2$ 关于 $\mathscr{F}_z$ 是条件独立的，亦即 $\forall\ A \in \mathscr{F}_z^1$，$\forall\ B \in \mathscr{F}_z^2$，有

$$P(AB \mid \mathscr{F}_z) = P(A \mid \mathscr{F}_z) P(B \mid \mathscr{F}_z).$$

如同单参数情形我们称 (F_1)、(F_2)、(F_3) 为通常性条件.

设 $X=\{X_z,z\in R_+^2\}$是定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的实值随机过程，在不引起混淆的情况下，有时简记 $X=\{X_z,z\in R_+^2\}$为 X 或$\{X_z\}$，简记$\{\mathscr{F}_z,z\in R_+^2\}$为$\{\mathscr{F}_z\}$. 如同单指标情形，可以定义可测随机过程及适应随机过程等概念. 若映射$(z,\omega)\to X(z,\omega)$是 $\mathscr{B}(R_+^2)\times\mathscr{F}$ 可测的，则称过程 $X=\{X_z,z\in R_+^2\}$是可测的，如果对每一 $z\in R_+^2$，X_z 是 $\mathscr{F}_z$ 可测的，则称 X 关于$\{\mathscr{F}_z\}$是适应过程，简称 X 是$\{\mathscr{F}_z\}$适应的，并记为 $X=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R_+^2\}$，如果对每一 $z\in R_+^2$，X_z 是 $\mathscr{F}_z^i$ 可测的$(i=1,2)$，则称 X 是$\{\mathscr{F}_z^i\}$适应的，简称 X 是 i-适应的$(i=1,2)$.

设 $z=(s,t)\in S$，$z'=(s',t')\in S$，称 $X_{z'}-X_z$ 为随机过程$\{X_z\}$从 z 到 z'的简单增量，若 $z<z'$，称 $X_{s',t'}-X_{s,t'}-X_{s',t}+X_{s,t}$为$\{X_z\}$在矩形$(z,z']$上的增量，记为 $X(z,z']$，在以下各节中，如无特别说明，在谈及可测集与可测函数时，总是不计它们之间的零测集差异，只有可能在引起误解时才指明这一点.

§2　分裂 σ 代数与条件(F_4)

定义 2.1　设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间，$\mathscr{B}$，$\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数，如果$\forall\ A_1\in\mathscr{A}_1$，$\forall\ A_2\in\mathscr{A}_2$，有

$$P(A_1A_2\,|\,\mathscr{B})=P(A_1\,|\,\mathscr{B})P(A_2\,|\,\mathscr{B})\qquad(2.1)$$

则称 $\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{A}_2$ 关于 $\mathscr{B}$ 是条件独立的，此时也称 $\mathscr{B}$ 分裂 $\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{A}_2$ 且称 $\mathscr{B}$ 为分裂 σ 代数. 记作$\langle\mathscr{B}\,|\,\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2\rangle$. 任给子 σ 代数 $\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{A}_2$，分裂 σ 代数总是存在的，例如取 $\mathscr{B}=\mathscr{A}_1$ 或 $\mathscr{A}_2$ 即可. 如果 $\mathscr{B}=\{\varnothing,\Omega\}$，则(2.1)式化为无条件独立性. 即条件独立性是通常无条件独立性的一般化. 如果 $\mathscr{B}=\mathscr{F}$，则任意两个子 σ 代数 $\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{A}_2$ 关于 $\mathscr{B}$ 都是条件独立的.

引理 2.1　设 $\mathscr{A}_i=\sigma(\pi_i)$，其中 π_i 为 π 类，$i=1,2$. 若对任意 $A_i\in\pi_i(i=1,2)$有(2.1)式成立，则

$$\langle \mathscr{B} | \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \rangle.$$

证 固定 $A_2 \in \pi_2$，令

$$\lambda_1 = \{A_1 \in \mathscr{A}_1 : P(A_1 A_2 | \mathscr{B}) = P(A_1 | \mathscr{B}) P(A_2 | \mathscr{B})\},$$

则 λ_1 为 λ 类，且 $\lambda_1 \supset \pi_1$，故 $\lambda_1 \supset \sigma(\pi_1) = \mathscr{A}_1$，从而(2.1)式对每一固定的 $A_1 \in \pi_2$，对一切 $A_1 \in \mathscr{A}_1$ 成立. 令任意固定 $A_1 \in \mathscr{A}_2$，同理可证(2.1)式对一切 $A_2 \in \mathscr{A}_2$ 成立.

定理 2.2 下述命题等价：

(1) $\langle \mathscr{B} | \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \rangle$，

(2) $\langle \mathscr{B} | \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{B}, \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{B} \rangle$，

(3) 对任何 $A_2 \in \mathscr{A}_2$，有

$$P(A_2 | \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{B}) = P(A_2 | \mathscr{B}),$$

(4) 对任何 $\xi_2 \in L^1(\Omega, \mathscr{A}_2, P; R)$，有

$$E(\xi_2 | \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{B}) = E(\xi_2 | \mathscr{B}).$$

(5) 对任何 $\xi_i \in L^2(\Omega, \mathscr{A}_i, P; R)$，$i=1,2$，有

$$E(\xi_1 \xi_2 | \mathscr{B}) = E(\xi_1 | \mathscr{B}) E(\xi_2 | \mathscr{B}).$$

证 (2)⇒(1)为显然. (1)⇒(2). 设 $B, B' \in \mathscr{B}$，$A_i \in \mathscr{A}_i$，$i=1,2$. 则 $A_1 B \in \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{B}$，$A_2 B' \in \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{B}$，由(1)知

$$\begin{aligned} P(A_1 B A_2 B' | \mathscr{B}) &= I_B I_{B'} P(A_1 A_2 | \mathscr{B}) \\ &= I_B P(A_1 | \mathscr{B}) I_{B'} P(A_2 | \mathscr{B}) \\ &= P(A_1 B | \mathscr{B}) P(A_2 B' | \mathscr{B}). \end{aligned}$$

但全体形如 $A_i B$ 的集类为产生 $\mathscr{A}_i \vee \mathscr{B}$ 的 π 类，由引理 2.1 知 $\langle \mathscr{B} | A_1 \vee B, A_2 \vee B \rangle$.

(3)⇒(1). $\forall A_1 \in \mathscr{A}_1$，$\forall A_2 \in \mathscr{A}_2$，由条件期望的性质有

$$\begin{aligned} P(A_1 A_2 | \mathscr{B}) &= E(P(A_1 A_2 | \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{B}) | \mathscr{B}) \\ &= E(I_{A_1} P(A_2 | \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{B}) | \mathscr{B}) \\ &= E(I_{A_1} P(A_2 | \mathscr{B}) | \mathscr{B}) \\ &= P(A_1 | \mathscr{B}) P(A_2 | \mathscr{B}). \end{aligned}$$

(1)⇒(3). $\forall A_1 \in \mathscr{A}_1$，$\forall A_2 \in \mathscr{A}_2$，由(1)有

$$E(I_{A_1} P(A_2 | \mathscr{B}) | \mathscr{B}) = P(A_1 | \mathscr{B}) P(A_2 | \mathscr{B})$$

$$=P(A_1A_2|\mathscr{B})=E(I_{A_1}P(A_2|\mathscr{A}_1\vee\mathscr{B})|\mathscr{B}),$$

从而对任意 $B\in\mathscr{B}$，有

$$\int_{A_1\cap B}P(A_2|\mathscr{B})dP=\int_{A_1\cap B}P(A_2|\mathscr{A}_1\vee\mathscr{B})dP,$$

但集类 $\{A_1\cap B:A_1\in\mathscr{A}_1,B\in\mathscr{B}\}$ 是产生 $\mathscr{A}_1\vee\mathscr{B}$ 的 π 类，且 Ω 属于该集类，于是，对任意 $C\in\mathscr{A}_1\vee\mathscr{B}$，有

$$\int_C P(A_2|\mathscr{B})dP=\int_C P(A_2|\mathscr{A}_1\vee\mathscr{B})dP.$$

又 $P(A_2|\mathscr{B})$ 及 $P(A_2|\mathscr{A}_1\vee\mathscr{B})$ 均为 $\mathscr{A}_1\vee\mathscr{B}$ 可测，故

$$P(A_2|\mathscr{A}_1\vee\mathscr{B})=P(A_2|\mathscr{B}).$$

(4)⇒(3). $\forall\ A_2\in\mathscr{A}_2$，取 $\xi_2=I_{A_2}$，由(4)可立即推得(3).

(3)⇒(4). $\forall\ A_2\in\mathscr{A}_2$，由(3)有

$$E(I_{A_2}|\mathscr{A}_1\vee\mathscr{B})=E(I_{A_2}|\mathscr{B}),$$

即(4)对 $\mathscr{A}_2$ 可测的示性函数成立. 从而(4)对任意 $\mathscr{A}_2$ 可测的简单函数成立. $\forall\ \xi_2\in L^1(\Omega,\mathscr{A}_2,P;R)$，则存在简单函数列 $\xi_2^{(n)}\in L^1(\Omega,\mathscr{A}_2,P;R)$，$n\geqslant 1$，$|\xi_2^{(n)}|\leqslant|\xi_2|$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_2^{(n)}=\xi_2$，于是对一切 $n\geqslant 1$，有

$$E(\xi_2^{(n)}|\mathscr{A}_1\vee\mathscr{B})=E(\xi_2^{(n)}|\mathscr{B}).$$

令 $n\to\infty$，由条件期望的控制收敛定理有

$$E(\xi_2|\mathscr{A}_1\vee\mathscr{B})=E(\xi_2|\mathscr{B}).$$

(5)⇒(1). $\forall\ A_i\in\mathscr{A}_i$，取 $\xi_i=I_{A_i}$，$i=1,2$，由(5)立即推得(1).

(1)⇒(5). $\forall\ A_i\in\mathscr{A}_i$，$i=1,2$. 由(1)有

$$E(I_{A_1}I_{A_2}|\mathscr{B})=E(I_{A_1}|\mathscr{B})E(I_{A_2}|\mathscr{B}),$$

即(5)在 ξ_1,ξ_2 分别为 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2$ 可测的示性函数时成立，从而对任意简单函数 $\xi_1\in L^2(\Omega,\mathscr{A}_1,P;R)$ 及 $\xi_2\in L^2(\Omega,\mathscr{A}_2,P;R)$ 有

$$E(\xi_1\xi_2)|\mathscr{B})=E(\xi_1|\mathscr{B})E(\xi_2|\mathscr{B}),$$

现对任意 $\xi_1\in L^2(\Omega,\mathscr{A}_1,P;R)$ 及 $\xi_2\in L^2(\Omega,\mathscr{A}_2,P;R)$，则存在简单函数列

$\xi_i^{(n)}\in L^2(\Omega,\mathscr{A}_i,P;R)$，$|\xi_i^{(n)}|\leqslant|\xi_i|$，$n\geqslant1$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}=\xi_i$，$i=1,2$.

于是对任意固定的 $m\geqslant1$，有

$$|\xi_1^{(n)}\xi_2^{(m)}|\leqslant|\xi_1\xi_2^{(m)}|,\ n\geqslant1,$$

$$\xi_1^{(n)}\xi_2^{(m)}\to\xi_1\xi_2^{(m)},$$

从而对一切 $n\geqslant1$ 有

$$E(\xi_1^{(n)}\xi_2^{(m)}|\mathscr{B})=E(\xi_1^{(n)}|\mathscr{B})E(\xi_2^{(m)}|\mathscr{B}).$$

令 $n\to\infty$，由条件期望的控制收敛定理有

$$E(\xi_1\xi_2^{(m)}|\mathscr{B})=E(\xi_1|\mathscr{B})E(\xi_2^{(m)}|\mathscr{B}),$$

但是

$$|\xi_1\xi_2^{(m)}|\leqslant|\xi_1\xi_2|,\ \forall\ m\geqslant1,$$

$$\xi_1\xi_2^{(m)}\to\xi_1\xi_2,\ m\to\infty.$$

在上面等式中令 $m\to\infty$ 得

$$E(\xi_1\xi_2|\mathscr{B})=E(\xi_1|\mathscr{B})E(\xi_2|\mathscr{B}).$$

即(5)得证.

定理 2.3 (1)若 $\mathscr{B}_0\subset\mathscr{A}_1$ 且$\langle\mathscr{B}_0|\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2\rangle$，则对一切 $\mathscr{B}$，$\mathscr{B}_0\subset\mathscr{B}\subset\mathscr{A}_1$，有$\langle\mathscr{B}|\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2\rangle$.

(2) 若$\langle\mathscr{B}_0|\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2\rangle$且 $\mathscr{B}_0\subset\mathscr{B}=\mathscr{B}_1\vee\mathscr{B}_2$，其中 $\mathscr{B}_1\subset\mathscr{A}_1\vee\mathscr{B}_0$，$\mathscr{B}_2\subset\mathscr{A}_2\vee\mathscr{B}_0$，则$\langle\mathscr{B}|\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2\rangle$.

证 (1) 由假设条件知 $\mathscr{A}_1\vee\mathscr{B}_0=\mathscr{A}_1\vee\mathscr{B}=\mathscr{A}_1$，由$\langle\mathscr{B}_0|\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2\rangle$用定理 2.2(3)对任意 $A_2\in\mathscr{A}_2$，有

$$P(A_2|\mathscr{A}_1)=P(A_2|\mathscr{B}_0).$$

上式两边同时对 $\mathscr{B}$ 取条件期望得

$$P(A_2|\mathscr{B})=P(A_2|\mathscr{B}_0),$$

于是有 $P(A_2|\mathscr{A}_1\vee\mathscr{B})=(A_2|\mathscr{B})$，再用定理 2.2 立即知(1)成立.

(2) 因为$\langle\mathscr{B}_0|\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2\rangle$，由定理 2.2 有$\langle\mathscr{B}_0|\mathscr{A}_1\vee\mathscr{B}_0,\mathscr{A}_2\vee\mathscr{B}_0\rangle$，令 $\widetilde{\mathscr{B}}_1=\mathscr{B}_0\vee\mathscr{B}_1$，则 $\mathscr{B}_0\subset\widetilde{\mathscr{B}}_1\subset\mathscr{A}_1\vee\mathscr{B}_0$，由已证明的(1)知$\langle\widetilde{\mathscr{B}}_1|\mathscr{A}_1\vee\mathscr{B}_0,\mathscr{A}_2\vee\mathscr{B}_0\rangle$，再用定理 2.2 得$\langle\widetilde{\mathscr{B}}_1|\mathscr{A}_1\vee\mathscr{B}_0\vee$

$\widetilde{\mathscr{B}}_1, \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{B}_0 \vee \widetilde{\mathscr{B}}_1)$，即$(\widetilde{\mathscr{B}}_1 | \mathscr{A}_1 \vee \widetilde{\mathscr{B}}_1, \mathscr{A}_2 \vee \widetilde{\mathscr{B}}_1)$，注意到

$$\widetilde{\mathscr{B}}_1 \subset \mathscr{B}_0 \vee \mathscr{B}_1 \vee \mathscr{B}_2 = \mathscr{B} \subset \mathscr{B}_0 \vee \mathscr{B}_1 \vee \mathscr{A}_2$$
$$= \mathscr{A}_2 \vee \widetilde{\mathscr{B}}_1.$$

由(1)知$(\mathscr{B} | \mathscr{A}_1 \vee \widetilde{\mathscr{B}}_1, \mathscr{A}_2 \vee \widetilde{\mathscr{B}}_2)$．更有$(\mathscr{B} | \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$.

定理 2.4 (1) 若$(\mathscr{B} | \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$，则$\mathscr{B} \supset \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2$.

(2) 设I是任一指标集，$\forall\, i \in I$，若$(\mathscr{B}_i | \mathscr{A}_1 \mathscr{A}_2)$且$\mathscr{B}_i \subset \mathscr{A}_1$，则$(\bigcap_{i \in I} \mathscr{B}_i | \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$.

(3) 对一切$n \geqslant 1$，若$(\mathscr{B}_n | \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$且$\mathscr{B}_n \downarrow \mathscr{B}$，则$(\mathscr{B} | \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$.

(4) $\forall\, \xi_1 \in L^2(\Omega, \mathscr{A}_1, P; R)$，$\forall\, \xi_2 \in L^2(\Omega, \mathscr{A}_2, P; R)$，皆有：$\xi_1 - E(\xi_1 | \mathscr{B})$与$\xi_2 - E(\xi_2 | \mathscr{B})$直交.

证 (1) 对任意$A \in \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2$，由$A \in \mathscr{A}_2$及定理 2.2 知$P(A | \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{B}) = P(A | \mathscr{B})$，又由$A \in \mathscr{A}_1$得$P(A | \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{B}) = I_A$．即$I_A = P(A | \mathscr{B})$是$\mathscr{B}$可测的，从而$A \in \mathscr{B}$. 这就证明了(1).

(2) 由$(\mathscr{B}_i | \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$及$\mathscr{B}_i \subset \mathscr{A}_1$用定理 2.2 得：$\forall\, A_2 \in \mathscr{A}_2$，有$P(A_2 | \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{B}_i) = P(A_2 | \mathscr{B}_i)$. 即$P(A_2 | \mathscr{A}_1) = P(A_2 | \mathscr{B}_i)$. 这说明对一切$i \in I$. $P(A_2 | \mathscr{A}_1)$是$\mathscr{B}_i$可测的，从而$P(A_2 | \mathscr{A}_1)$是$\bigcap_{i \in I} \mathscr{B}_i$可测的. 另一方面，$\forall\, B \in \bigcap_{i \in I} \mathscr{B}_i \subset \mathscr{A}_1$，有

$$\int_B P(A_2 | \mathscr{A}_1) dP = P(B \cap A_2) = \int_B P(A_2 | \bigcap_{i \in I} \mathscr{B}_i) dP,$$

于是$P(A_1 | \mathscr{A}_1) = P(A_2 | \bigcap_{i \in I} \mathscr{B}_i)$. 但$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_1 \vee (\bigcap_{i \in I} \mathscr{B}_i)$，即$P(A_2 | \mathscr{A}_1 \vee (\bigcap_{i \in I} \mathscr{B}_i)) = P(A_2 | \bigcap_{i \in I} \mathscr{B}_i)$. 由定理 2.2 知$(\bigcap_{i \in I} \mathscr{B}_i | \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$.

(3) 由假设$\forall\, n \geqslant 1$, $\forall\, A_1 \in \mathscr{A}_1$, $\forall\, A_2 \in \mathscr{A}_2$有

$$P(A_1 A_2 | \mathscr{B}_n) = P(A_1 | \mathscr{B}_n) P(A_2 | \mathscr{B}_n).$$

由于$\mathscr{B}_n \downarrow \mathscr{B}$，在上式中令$n \to \infty$得

$$P(A_1 A_2 | \mathscr{B}) = P(A_1 | \mathscr{B}) P(A_2 | \mathscr{B}),$$

即$(\mathscr{B} | \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$.

(4) 注意到定理 2.2 的(5)等价于

$$E((\xi_1-E(\xi_1|\mathscr{B}))(\xi_2-E(\xi_2|\mathscr{B}))|\mathscr{B})=0,$$

将上式两边同时取期望得

$$E(\xi_1-E(\xi_1|\mathscr{B}))(\xi_2-E(\xi_2|\mathscr{B}))=0.$$

即 $\xi_1-E(\xi_1|\mathscr{B})$ 与 $\xi_2-E(\xi_2|\mathscr{B})$ 是直交的.

推论 2.5 在(F_4)条件下必成立 $\mathscr{F}_z^1\cap\mathscr{F}_z^2=\mathscr{F}_z$.

证 由$(\mathscr{F}_z|\mathscr{F}_z^1,\mathscr{F}_z^2)$用定理 2.4(1)知 $\mathscr{F}_z\supset\mathscr{F}_z^1\cap\mathscr{F}_z^2$,但 $\mathscr{F}_z\subset\mathscr{F}_z^1\cap\mathscr{F}_z^2$,故 $\mathscr{F}_z^1\cap\mathscr{F}_z^2=\mathscr{F}_z$.

定理 2.6 下述命题等价:

(1) $\forall z\in R_+^2$, $\forall f\in L^2(\Omega,\mathscr{F}_z^1,P;R)$, $\forall g\in L^2(\Omega,\mathscr{F}_z^2,P;R)$,有

$$E(fg|\mathscr{F}_z)=E(f|\mathscr{F}_z)E(g|\mathscr{F}_z).$$

(2) 对任意可积随机变量 X 及任意 $z,z'\in R_+^2$,有

$$E(E(X|\mathscr{F}_z)|\mathscr{F}_{z'})=E(X|\mathscr{F}_{z\wedge z'}).$$

(3) 对任意 $z\in R_+^2$,任意可积随机变量 X,有

$$E(E(X|\mathscr{F}_z^1)|\mathscr{F}_z^2)=E(E(X|\mathscr{F}_z^2)|\mathscr{F}_z^1)=E(X|\mathscr{F}_z).$$

证 (1)⇒(3). 由定理 2.2 知对任意 $f\in L^1(\Omega,\mathscr{F}_z^2,P;R)$有

$$E(f|\mathscr{F}_z^1\vee\mathscr{F}_z)=E(f|\mathscr{F}_z),$$

即 $E(f|\mathscr{F}_z^1)=E(f|\mathscr{F}_z)$. 令 $f=E(X|\mathscr{F}_z^2)$,则

$$\begin{aligned}E(E(X|\mathscr{F}_z^2)|\mathscr{F}_z^1)&=E(E(X|\mathscr{F}_z^2)|\mathscr{F}_z)\\&=E(X|\mathscr{F}_z).\end{aligned}$$

类似可以证明 $E(E(X|\mathscr{F}_z^1)|\mathscr{F}_z^2)=E(X|\mathscr{F}_z)$.

(3)⇒(2). 设 X 为任意可积随机变量,对任意 $z,z'\in R_+^2$,在(3)中取 z 为 $z\wedge z'$ 得

$$\begin{aligned}E(X|\mathscr{F}_{z\wedge z'})&=E(E(X|\mathscr{F}_{z\wedge z'}^1)|\mathscr{F}_{z\wedge z'}^2)\\&=E(E(X|\mathscr{F}_z^1)|\mathscr{F}_{z'}^2)\\&=E(E(E(X|\mathscr{F}_z^1)|\mathscr{F}_{z'}^2)|\mathscr{F}_z^2)\\&=E(E(E(X|\mathscr{F}_z^1)|\mathscr{F}_z^2)|\mathscr{F}_{z'}^2)\end{aligned}$$

$$=E(E(X|\mathscr{F}_z)|\mathscr{F}_{z'}^2)$$
$$=E(E(E(X|\mathscr{F}_z)|\mathscr{F}_{z'}^1)|\mathscr{F}_{z'}^2)$$
$$=E(E(X|\mathscr{F}_z)|\mathscr{F}_{z'}).$$

类似可以证明 $E(X|\mathscr{F}_{z\wedge z'})=E(E(X|\mathscr{F}_{z'})|\mathscr{F}_z)$.

(2)⇒(1) $\forall\ f\in L^2(\Omega,\mathscr{F}_z^1,P;R)$, $\forall\ g\in L^2(\Omega,\mathscr{F}_z^2,P;R)$，先设 f,g 均有界，由条件期望性质得

$$E(fg|\mathscr{F}_{s,t})=E(E(fg|\mathscr{F}_{s,\infty})|\mathscr{F}_{s,t})$$
$$=E(fE(g|\mathscr{F}_{s,\infty})|\mathscr{F}_{s,t}),$$

但由(2)有

$$E(g|\mathscr{F}_{s,\infty})=E(E(g|\mathscr{F}_{\infty,t})|\mathscr{F}_{s,\infty})$$
$$=E(g|\mathscr{F}_{s,t}),$$

因此

$$E(fg|\mathscr{F}_{s,t})=E(f|\mathscr{F}_{s,t})E(g|\mathscr{F}_{s,t}).$$

对一般的 f,g，则存在简单函数列 $f_n\to f$, $g_n\to g$，且 $|f_n|\leqslant|f|$, $|g_n|\leqslant|g|$, $n\geqslant 1$，再用控制收敛定理即知(1)成立.

下面关于两指标鞅的讨论，如不特殊声明均假定 $\{\mathscr{F}_z, z\in R_+^2\}$ 满足条件 (F_1)—(F_4).

§3 各种类型两指标鞅的定义及其关系

定义 3.1 设 $X=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R_+^2\}$ 是可积适应过程，

(1) 称 X 为鞅，若 $\forall\ z,z'\in R_+^2$, $z\leqslant z'$，有

$$E(X_{z'}|\mathscr{F}_z)=X_z;$$

(2) 称 X 为弱鞅，若 $\forall\ z,z'\in R_+^2$, $z<z'$，有

$$E(X(z,z']|\mathscr{F}_z)=0;$$

(3) 称 X 为强鞅，若 X 是鞅，$\forall\ z,z'\in R_+^2$, $z<z'$，有

$$E(X(z,z']|\mathscr{F}_z^*)=0.$$

定义 3.2 设 $\{\mathscr{F}_z, z=(s,t)\in R_+^2\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的单调上升的子 σ 代数族，$X=\{X_z, z=(s,t)\in R_+^2\}$ 是可积随机变量族，称 X 为 1-

鞅，若对任意固定的 $t\in R_+$，$\{X_{s,t},\mathscr{F}_s^1,s\in R_+\}$ 是单指标鞅. 类似可定义 2-鞅.

定理 3.1 设 $X=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R_+^2\}$ 是可积适应过程，则 X 是鞅的充要条件为 X 是 1-鞅又是 2-鞅.

证 必要性. 设 $X=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R_+^2\}$ 是鞅，显然，对每一 $z\in R_+^2$，X_z 必是 $\mathscr{F}_s^1$ 和 $\mathscr{F}_t^2$ 可测的，对任意固定的 t，任取 $s<s'$ 及 $v\geqslant t$，由定理 2.6 有

$$\begin{aligned}E(X_{s',t}|\mathscr{F}_{s,v})&=E(E(X_{s',t}|\mathscr{F}_{s',t})|\mathscr{F}_{s,v})\\&=E(X_{s',t}|\mathscr{F}_{s,t})\\&=X_{s,t},\end{aligned}$$

于是，对任意 $v\geqslant t$，任意 $E\in\mathscr{F}_{s,v}$，有

$$\int_E X_{s',t}dP=\int_E X_{s,t}dP,$$

故上式对 $\bigcup\limits_{v\geqslant t}\mathscr{F}_{s,v}$ 中的每一集合成立，而 $\bigcup\limits_{v\geqslant t}\mathscr{F}_{s,v}$ 是代数，从而上式对 $\sigma(\bigcup\limits_{v\geqslant t}\mathscr{F}_{s,v})=\sigma(\bigcup\limits_{v\in R_+}\mathscr{F}_{s,v})=\mathscr{F}_s^1$ 中的每一集合成立，而 $X_{s,t}$ 又是 $\mathscr{F}_s^1$ 可测的，故

$$E(X_{s',t}|\mathscr{F}_s^1)=X_{s,t}.$$

这就证明了 X 是 1-鞅，同理可证 X 是 2-鞅.

充分性. 设 X 既是 1-鞅又是 2-鞅，则对每一 $z\in R_+^2$，X_z 既是 $\mathscr{F}_z^1$ 可测的又是 $\mathscr{F}_z^2$ 可测的，由推论 2.5 知 X_z 是 $\mathscr{F}_z$ 可测的. 对任意 $z,z'\in R_+^2$，$z\leqslant z'$，有

$$\begin{aligned}&E((X_{z'}-X_z)|\mathscr{F}_z)\\&\quad=E((X_{s',t'}-X_{s',t})|\mathscr{F}_{s,t})+E((X_{s',t}-X_{s,t})|\mathscr{F}_{s,t})\\&\quad=E(E((X_{s',t'}-X_{s',t})|\mathscr{F}_t^2)|\mathscr{F}_{s,t})\\&\qquad+E(E((X_{s',t}-X_{s,t})|\mathscr{F}_s^1)|\mathscr{F}_{s,t})=0.\end{aligned}$$

即 $E(X_{z'}|\mathscr{F}_z)=X_z$.

定理 3.2 1° $X=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R_+^2\}$ 是 1-鞅的充要条件是：

(a) $\{X_z\}$ 是 1-适应的，即 $\forall\ z\in R_+^2$，X_z 是 $\mathscr{F}_z^1$ 可测的，

(*b*) 若 $z<z'$，则 $E(X(z,z']|\mathscr{F}_z^1)=0$，

(*c*) $\{X_{s,0},\mathscr{F}_s^1,s\in R_+\}$是单指标鞅，

2° $\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R_+^2\}$是适应 1-鞅的充要条件是对任意固定 $t\in R_+$，$\{X_{s,t},\mathscr{F}_{s,t},s\in R_+\}$是单指标鞅.

证 1° 必要性. 设$\{X_z\}$是 1-鞅，由定义知$\forall\ z\in R_+^2$，X_z是$\mathscr{F}_z^1$可测的，即(*a*)成立. 对任意 $z<z'$，$z=(s,t)$，$z'=(s',t')$，则

$$\begin{aligned}&E(X(z,z']|\mathscr{F}_z^1)=E((X_{s',t'}-X_{s',t}-X_{s,t'}+X_{s,t})|\mathscr{F}_z^1)\\&=E((X_{s',t'}-X_{s,t'})|\mathscr{F}_z^1)-E((X_{s',t}-X_{s,t})|\mathscr{F}_z^1)\\&=0,\end{aligned}$$

即(*b*)成立，(*c*)成立显然.

2° 充分性. 设(*a*)，(*b*)，(*c*)成立，对任意固定的 $t\in R_+$，任意 $s\in R_+$，由(*a*)知 $X_{s,t}$是$\mathscr{F}_z^1$可测的，对任意 $s<s'$，令 $z'=(s',t)$，$z=(s,0)$，由(*b*)及(*c*)有

$$\begin{aligned}&E(X_{s',t}-X_{s,t}|\mathscr{F}_s^1)=E(X_{s',t}-X_{s,t}-X_{s',0}+X_{s,0}|\mathscr{F}_s^1)\\&=E(X(z,z']|\mathscr{F}_z^1)=0.\end{aligned}$$

这就证明了$\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R_+^2\}$是 1-鞅.

(2) 充分性. 设对任意固定的 $t\in R_+$，$\{X_{s,t},\mathscr{F}_{s,t},s\in R_+\}$是单指标鞅. 显然$\forall\ z=(s,t)\in R_+^2$，$X_z$是$\mathscr{F}_z$可测的，对任意固定的 $t\in R_+$，任意 $s<s'$，任意 $v\geqslant t$，有

$$\begin{aligned}&E(X_{s',t}-X_{s,t}|\mathscr{F}_{s,v})=E(E(X_{s',t}-X_{s,t}|\mathscr{F}_{s',t})|\mathscr{F}_{s,v})\\&=E(X_{s',t}-X_{s,t}|\mathscr{F}_{s,t})=0.\end{aligned}$$

这样，$\forall\ E\in\bigcup_{v\in R_+}\mathscr{F}_{s,v}$，有

$$\int_E(X_{s',t}-X_{s,t})dP=0,$$

从而，

$$\int_E(X_{s',t}-X_{s,t})dP=0,\forall\ E\in\sigma(\bigcup_{v\in R_+}\mathscr{F}_{s,v})=\mathscr{F}_s^1,$$

于是，$E(X_{s',t}-X_{s,t}|\mathscr{F}_s^1)=0$，即对任意固定的 $t\in R_+$，$\{X_{s,t},\mathscr{F}_s^1,s\in R_+\}$为单指标鞅. 这就证明了$\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R_+^2\}$为 1 鞅.

必要性. 设$\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R_+^2\}$是适应1-鞅,于是,对每一$z\in R_+^2$,$X_z$是$\mathscr{F}_z$可测的.对任意固定的$t\in R_+$,$s<s'$,有

$$E(X_{s',t}-X_{s,t}|\mathscr{F}_{s,t})=E(E(X_{s',t}-X_{s,t}|\mathscr{F}_s^1)|\mathscr{F}_{s,t})$$
$$=0,$$

即对每一固定的$t\in R_+$,$\{X_{s,t},\mathscr{F}_{s,t},s\in R_+\}$为单指标鞅.

下一定理的成立并不附加(F_4)条件.

定理 3.3 若$\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R_+^2\}$是强鞅,则必是$i$-鞅$(i=1,2)$且若$D_1=(z_1,z'_1]$,$D_2=(z_2,z'_2]$,$z=z_1\wedge z_2$,$D_1\cap D_2=\varnothing$,则

$$E(X(D_1)X(D_2)|\mathscr{F}_z^i)=0,i=1,2.$$

证 由于本定理未假设(F_4)成立,因此不能直接用定理3.1推出强鞅是i-鞅,故须证明.

设$z=(s,t)$,$z'=(s',t')\in R_+^2$,$z<z'$,$\Delta=(z,z']$,则

$$X(\Delta)=X_{s',t'}-X_{s',t}-X_{s,t'}+X_{s,t},$$
$$E(X(\Delta)|\mathscr{F}_{s,t'})=E(E(X(\Delta)|\mathscr{F}'_{s,t})|\mathscr{F}_{s,t'})$$
$$=0.$$

由强鞅定义知$\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R_+^2\}$是鞅,于是,

$$E(X_{s',t'}|\mathscr{F}_{s,t'})=X_{s,t'},$$

因此,

$$E(X_{s',t}-X_{s,t}|\mathscr{F}_{s,t'})=0.$$

于是

$$\int_E(X_{s',t}-X_{s,t})dP=0,\forall E\in\mathscr{F}_{s,t'},$$

从而

$$\int_E(X_{s',t}-X_{s,t})dP,\forall E\in\bigcup_{t'\geq t}\mathscr{F}_{s,t'},$$

由于$\bigcup\limits_{t'\geq t}\mathscr{F}_{s,t'}$是代数,故

$$\int_E(X_{s',t}-X_{s,t})dP,\forall E\in\mathscr{F}_s^1=\sigma(\bigcup_{t'\geq t}\mathscr{F}_{s,t'}).$$

这就证明了$\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R_+^2\}$是1-鞅.类似可以证明$\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in$

$R_-^2\}$是 2-鞅.

由于$D_1\cap D_2=\varnothing$，易知$X(D_1)$是$\mathscr{F}_{z_2}^*$可测的及$X(D_2)$是$\mathscr{F}_{z_1}^*$可测的两者中至少有一成立. 不妨设前者成立. 则

$$\begin{aligned}&E(X(D_1)X(D_2)\mid\mathscr{F}_z^i)\\&=E(E(X(D_1)X(D_2)\mid\mathscr{F}_{z_2}^*)\mid\mathscr{F}_z^i)\\&=E(X(D_1)E(X(D_2)\mid\mathscr{F}_{z_2}^*)\mid\mathscr{F}_z^i)\\&=0,\ i=1,2.\end{aligned}$$

定理证毕.

定理 3.4 $X=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R_{z_0}\}$是弱鞅的充要条件是$X$可表为$X_z=X_z^1+X_z^2$，其中$\{X_z^1\}$是适应 1-鞅，$\{X_z^2\}$是适应 2-鞅.

证 充分性. 首先证明适应i-鞅$(i=1,2)$一定是弱鞅. 事实上，设$Y=\{Y_z\}$是适应 1-鞅，$z<z'$，$z=(s,t)$，$z'=(s',t')$，则

$$Y(z,z']=Y_{s',t'}-Y_{s',t}-Y_{s,t'}+Y_{s,t},$$

$$\begin{aligned}E(Y(z,z']\mid\mathscr{F}_z)&=E(Y_{s',t'}-Y_{s,t'}\mid\mathscr{F}_{s,t})-E(Y_{s',t}-Y_{s,t}\mid\mathscr{F}_{s,t})\\&=E(E(Y_{s',t'}-Y_{s,t'}\mid\mathscr{F}_s^1)\mid\mathscr{F}_{s,t})-E(E(Y_{s',t}-Y_{s,t}\mid\mathscr{F}_s^1)\mid\mathscr{F}_{s,t})\\&=0,\end{aligned}$$

即Y是弱鞅，类似可证明若Y是适应 2-鞅，则Y是弱鞅，而弱鞅的和仍为弱鞅. 这就证明了充分性.

必要性. 设$X=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R_{z_0}\}$为弱鞅，令

$$M_z^1=E(X_{s_0,t}\mid\mathscr{F}_{s,t})$$

$$M_z^2=E(X_{s,t_0}\mid\mathscr{F}_{s,t})$$

$$M_z^0=E(X_{s_0,t_0}\mid\mathscr{F}_{s,t})$$

其中$z_0=(s_0,t_0)$，$z=(s,t)$，$z<z_0$，由弱鞅的定义有

$$E(X(z,z_0]\mid\mathscr{F}_z)=0,$$

即
$$E(X_{s,t}-X_{s_0,t}-X_{s,t_0}+X_{s_0,t_0}\mid\mathscr{F}_{s,t})=0,$$

从而

$$\begin{aligned}X_{s,t}&=E(X_{s_0,t}\mid\mathscr{F}_{s,t})+E(X_{s,t_0}\mid\mathscr{F}_{s,t})-E(X_{s_0,t_0}\mid\mathscr{F}_{s,t})\\&=M_z^1+M_z^2-M_z^0.\end{aligned}$$

令　$X_z^1=M_z^1, X_z^2=M_z^2-M_z^0$,

显然,$\{X_z^1,\mathscr{F}_z,z\in R_{z_0}\}$为可积适应过程. 又 $\mathscr{F}_{s,t}\subset\mathscr{F}_s^1$,故 X_z^1 是 $\mathscr{F}_s^1$ 可测的,对任意 $s'>s,(s,t),(s',t)\in R_{z_0}$,有

$$
\begin{aligned}
E(M_{s',t}^1|\mathscr{F}_s^1)&=E(E(X_{s_0,t}|\mathscr{F}_{s',t})|\mathscr{F}_s^1)\\
&=E(E(X_{s_0,t}|\mathscr{F}_{s',t})|\mathscr{F}_{s,\infty})\\
&=E(X_{s_0,t}|\mathscr{F}_{s,t})=M_{s,t}^1,
\end{aligned}
$$

这就证明了$\{X_z^1\}$是适应 1-鞅,类似地证明$\{X_z^2\}$是适应 2-鞅.

在某些文献中强鞅按下面方式定义.

定义 3.3　设 $X=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R_-^2\}$是可积适应过程,在轴上为 0,且若 $z,z'\in R_-^2,z<z'$,有

$$E(X(z,z']|\mathscr{F}_z^*)=0,$$

则称 X 为强鞅,此处强鞅定义与前面强鞅定义的区别在于此处强鞅定义中并不要求$\{X_z\}$是鞅,但要求$\{X_z\}$在轴上为 0.

定理 3.5　设 $X=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R_+^2\}$是定义 3.1 意义下的强鞅,则存在定义 3.3 意义下的强鞅 $\hat{X}=\{\hat{X}_z,\hat{\mathscr{F}}_z,z\in R_-^2\}$使得

$$X_z=\hat{X}_{z-1}+EX_0,\mathscr{F}_z=\hat{\mathscr{F}}_{z-1}$$

其中记(1,1)为 1,(0,0)为 0.

证　不妨设 $EX_0=0$,否则考虑 $X'_z=X_z-EX_z,z\in R_-^2$. 则$\{X'_z\}$是定义 3.1 意义下的强鞅且 $EX'_0=0$. 如果 $s\geqslant1,t\geqslant1$,令

$$\hat{X}_{s,t}=X_{s-1,t-1},\hat{\mathscr{F}}_{s,t}=\mathscr{F}_{s-1,t-1},$$

如果 s 与 t 中有一小于 1 时,则令

$$\hat{X}_{s,t}=0,\hat{\mathscr{F}}_{s,t}=\{\varnothing,\Omega\}.$$

显然$\{\hat{X}_{s,t}\}$是$\{\hat{\mathscr{F}}_{s,t}\}$适应的,且在坐标轴上为 0. 设 $z=(s,t)<z'=(s',t')$,若 $s\geqslant1,t\geqslant1$,记 $z^-=(s-1,t-1),z'^-=(s'-1,t'-1)$,则有

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mathscr{F}}_z^*=\mathscr{F}_{z^-}^*,\\
&\hat{X}(z,z']=\hat{X}_{s',t'}-\hat{X}_{s',t}-\hat{X}_{s,t'}+\hat{X}_{s,t}\\
&\qquad=X_{s'-1,t'-1}-X_{s'-1,t-1}-X_{s-1,t'-1}+X_{s-1,t-1}
\end{aligned}
$$

$$=X(z\quad,z'\quad],$$

于是 $E(\hat{X}(z,z']|\hat{\mathscr{F}}_z^*)=E(X(z\quad,z'\quad]|\mathscr{F}_{z\cdots}^*)=0$，若 $s\geqslant 1,0\leqslant t<1,t'\geqslant 1$，则

$$\hat{\mathscr{F}}_z^*=\mathscr{F}_{s\ \ 1}^1,$$

由于 $\hat{X}_{s,t}=\hat{X}_{s',t}=0$，故

$$\hat{X}(z,z']=\hat{X}_{s',t'}-\hat{X}_{s',t}-\hat{X}_{s,t'}-\hat{X}_{s,t}$$

$$=X_{s'\ \ 1,t'\ \ 1}-X_{s\ \ 1,t'\ \ 1},$$

于是 $E(\hat{X}(z,z']|\hat{\mathscr{F}}_z^*)=E(X_{s'\ \ 1,t'\ \ 1}-X_{s\ \ 1,t'\ \ 1}|\mathscr{F}_{s\ \ 1}^1)$

$$=0.$$

若 $s\geqslant 1,0\leqslant t<1,t'<1$，则

$$\hat{X}(z,z']=0$$

从而 $E(\hat{X}(z,z']|\hat{\mathscr{F}}_z^*)=0$. 对称地，若 $0\leqslant s<1,t\geqslant 1$，则有 $E(\hat{X}(z,z']|\hat{\mathscr{F}}_z^*)=0$. 若 $0\leqslant s<1,0\leqslant t<1$，这时 $\hat{\mathscr{F}}_z^*=\{\varnothing,\Omega\}$，故

$$E(\hat{X}(z,z']|\hat{\mathscr{F}}_z^*)=EX_{s'\ \ 1,t'\ \ 1}$$

$$=EX_0$$

$$=0.$$

定理得证.

由上面讨论，我们可将定义 3.1 及定义 3.2 中所述几种类型的两指标鞅之间的关系图示如下：

强鞅⇒鞅⇒适应 i-鞅⇒i-鞅($i=1,2$)，

鞅⟺1-鞅∧2-鞅，

弱鞅⟺适应 1-鞅＋适应 2-鞅.

定理 3.6 下述命题等价：

(1) 对任意 $z\in R_+^2$，$\mathscr{F}_z^1$ 与 $\mathscr{F}_z^2$ 关于 $\mathscr{F}_z$ 条件独立，即条件 (F_4) 成立.

(2) 对任意 $z,z'\in R_+^2$，$\forall f\in L^1(\Omega,\mathscr{F}_z,P;R)$，有 $E(f|\mathscr{F}_{z'})\in L^1(\Omega,\mathscr{F}_{z\wedge z'},P;R)$.

(3) 若 $\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R_+^2\}$ 是两指标鞅，则对任意 $z,z'\in R_+^2$，有

$$E(X_z|\mathscr{F}_{z'})=X_{z\wedge z'}.$$

(4) 对任意可积随机变量 X，令 $X_z=E(X|\mathscr{F}_z),z\in R^2_+$，则 $\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R^2_+\}$是 i-鞅，$i=1,2$.

(5) 每个两指标鞅$\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R^2_+\}$都是 i-鞅，$i=1,2$.

证 (1)⇒(2). 由定理 2.2 及定理 2.6 知：若(1)成立，则对任意可积随机变量 X 及任意 $z,z'\in R^2_+$有

$$E(E(X|\mathscr{F}_z)|\mathscr{F}_{z'})=E(X|\mathscr{F}_{z\wedge z'}).$$

于是，对任意 $f\in L^1(\Omega,\mathscr{F}_z,P;R)$，有

$$\begin{aligned}E(f|\mathscr{F}_{z'})&=E(E(f|\mathscr{F}_z)|\mathscr{F}_{z'})\\&=E(f|\mathscr{F}_{z\wedge z'}),\end{aligned}$$

即 $E(f|\mathscr{F}_{z'})\in L^1(\Omega,\mathscr{F}_{z\wedge z'},P;R)$.

(2)⇒(3). 设$\{X_z\}$是两指标鞅，$\forall\ z,z'\in R^2_+$，由(2)有

$$\begin{aligned}E(X_z|\mathscr{F}_{z'})&=E(E(X_z|\mathscr{F}_{z'})|\mathscr{F}_{z\wedge z'})\\&=E(E(X_z|\mathscr{F}_{z\wedge z'})|\mathscr{F}_{z'})\\&=E(X_z|\mathscr{F}_{z\wedge z'})\\&=X_{z\wedge z'}.\end{aligned}$$

(3)⇒(4). 设 X 是任一可积随机变量，令 $X_z=E(X|\mathscr{F}_z)$，$\forall\ z\in R^2_+$，显然$\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in R^2_+\}$是可积适应过程且为两指标鞅. 下面证明它为 i-鞅，$i=1,2$. 若 $s<s'$，t 固定，由(3)，对任意 $u\in R_+$，$u\geqslant t$，有

$$E(X_{s',t}|\mathscr{F}_{s,u})=X_{s,t}.$$

从而有

$$\int_A X_{s',t}dP=\int_A X_{s,t}dP,\forall\ A\in\bigcup_{u\geqslant t}\mathscr{F}_{s,u}.$$

而$\bigcup_{u\geqslant t}\mathscr{F}_{s,u}$为代数，故

$$\int_A X_{s',t}dP=\int_A X_{s,t}dP,\forall\ A\in\sigma(\bigcup_{u\geqslant t}\mathscr{F}_{s,u})=\mathscr{F}^1_s.$$

又 $X_{s,t}$是 $\mathscr{F}^1_s$ 可测的，从而

$$E(X_{s',t}|\mathscr{F}^1_s)=X_{s,t}.$$

这就证明了$\{X_z\}$为 1-鞅，同理可证$\{X_z\}$为 2-鞅.

下面证明由(4)可推定理 2.6 的(3)成立，从而(4)⇒(1)得证. 对任意 $z\in R_+^2$，任意有界随机变量 X，令 $X_z=E(X|\mathscr{F}_z)$，则$\{X_z\}$是两指标鞅，由(4)知$\{X_z\}$是 1-鞅又是 2-鞅. 又对任意固定的 t，$\{E(X|\mathscr{F}_{s,t}),\mathscr{F}_{s,t},s\in R_+\}$是单指标鞅，且一致可积，几乎所有的轨道右连续，从而 $E(X|\mathscr{F}_{s,t})\longrightarrow E(X|\mathscr{F}_{\infty,t})$, $a.e.$ (L^1). 由 1-鞅性，对 $s'\geqslant s$，有

$$\begin{aligned}E(E(X|\mathscr{F}_{s',t})|\mathscr{F}_{s,\infty})&=E(X_{s',t}|\mathscr{F}_z^1)\\&=X_{s,t}\\&=E(X|\mathscr{F}_{s,t}),\end{aligned}$$

由条件期望的控制收敛定理，在上式中令 $s'\to\infty$得

$$E(E(X|\mathscr{F}_{\infty,t})|\mathscr{F}_{s,\infty})=E(X|\mathscr{F}_{s,t}),$$

即 $E(E(X|\mathscr{F}_z^1)|\mathscr{F}_z^2)=E(X|\mathscr{F}_z)$，同理可证 $E(E(X|\mathscr{F}_z^2)|\mathscr{F}_z^1)=E(X|\mathscr{F}_z)$. 对可积随机变量 X，存在简单随机变量序列$\{X_n\}$，$|X_n|\leqslant|X|$，$X_n\to X$，$a.e.$. 对每一 $n\geqslant1$，有

$$E(E(X_n|\mathscr{F}_z^1)|\mathscr{F}_z^2)=E(E(X_n|\mathscr{F}_z^2)|\mathscr{F}_z^1)=E(X_n|\mathscr{F}_z),$$

再用条件期望的控制收敛定理，在上式中令 $n\to\infty$得

$$E(E(X|\mathscr{F}_z^1)|\mathscr{F}_z^2)=E(E(X|\mathscr{F}_z^2)|\mathscr{F}_z^1)=E(X|\mathscr{F}_z).$$

这就证明了(4)⇒(1).

(5)⇒(4)为显然. (1)⇒(5). 由定理 3.1 得出. 定理得证.

§4 两指标鞅的收敛性

本节中$\{\mathscr{F}_z,z\in N^2\}$或$\{\mathscr{F}_z,z\in R_+^2\}$总假定是 $\mathscr{F}$ 的单增子 σ 代数族，对任意 $z=(m,n)\in N^2$，令 $\mathscr{F}_m^1=\bigvee_{n\in N}\mathscr{F}_{m,n}$，$\mathscr{F}_n^2=\bigvee_{m\in N}\mathscr{F}_{m,n}$. Δ 表示 N^2 或 R_+^2.

定义 4.1 设 $X=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\Delta\}$是实值可积适应族，称 X 为鞅(或上(下)鞅)，如果

$$E(X_{z'}\mid\mathscr{F}_z)\xrightarrow{(\text{或}\leqslant(\geqslant))}X_z,\ \forall\ z',z\in\Delta,z'\geqslant z.$$

下面定理 4.1 与定理 4.2 是关于两指标鞅(或下鞅)的 L^p 收敛性与依概率收敛性的基本结果，其证明在这里省略. 我们将在第八章第一节中对以一般的向右定向集为指标集的鞅或下鞅证明相应的结论成立.

定理 4.1 (1) 设 $1\leqslant p<\infty$, $X\in L^p(\Omega,\mathscr{F},P;R)$，令 $X_z=E(X\mid\mathscr{F}_z)$, $\forall\ z\in\Delta$，则鞅 $\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\Delta\}$ L^p 收敛于 $E(X\mid\mathscr{F}_\infty)$. 其中 $\mathscr{F}_\infty=\bigvee\limits_{z\in\Delta}\mathscr{F}_z=\sigma(\bigcup\limits_{z\in\Delta}\mathscr{F}_z)$.

(2) 鞅 $\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\Delta\}$ 具有形式 $X_z=E(X\mid\mathscr{F}_z)$, $\forall\ z\in\Delta$, $X\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P;R)$ 的充要条件是 $\{X_z,z\in\Delta\}$ 一致可积.

(3) L^p 可积鞅 $\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\Delta\}$ $(1<p<\infty)$ 具有形式 $X_z=E(X\mid\mathscr{F}_z)$, $\forall\ z\in\Delta$, $X\in L^p(\Omega,\mathscr{F},P;R)$ 的充要条件是 $\{X_z,z\in\Delta\}$ 为 L^p 有界.

(4) 若下鞅 $X=\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\Delta\}$ 满足条件 $\sup\limits_{z\in\Delta}EX_z^+<\infty$，则 $\{X_z,z\in\Delta\}$ 依概率收敛于一可积随机变量.

定理 4.2 设 $\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in\Delta\}$ 是非负下鞅，φ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的凸增函数，$\varphi(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x}=\infty$，若 $\sup\limits_{z\in\Delta}E\varphi(X_z)<\infty$，则存在可积随机变量 X_∞，使得

$$L^1.\lim_{z\in\Delta}X_z=X_\infty,$$

$$\lim_{z\in\Delta}E\varphi(|X_z-X_\infty|)=0.$$

我们知道离散单指标鞅(或下鞅)满足 (D) 条件时，则它必 $a.e.$ 收敛于一可积随机变量，特别若 X 为可积随机变量，$\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为 $\mathscr{F}$ 的单调上升子 σ 代数序列，则鞅 $X_n=E(X\mid\mathscr{F}_n)$ 必 $a.e.$ 收敛. 可是这个结论在两指标鞅情形下已不再成立. Cairoli(1970[46])举出一个反例：当 X 是可积随机变量时，上升子 σ 代数族 $\{\mathscr{F}_{m,n}\}$ 是由乘积 σ 代数 $\mathscr{F}_m^{(1)}\times\mathscr{F}_n^{(2)}$ 构成的，因而必满足 (F_4) 条件，但两指标鞅 $X_{m,n}=E(X\mid\mathscr{F}_{m,n})$ 并不 $a.e.$ 收敛. 1980 年 Dubins

与 Pitman 举反例指出(见[4]),若上升子 σ 代数族不附加(F_4)条件,存在有几乎处处发散的有界鞅. 1982 年陈宗洵(见[50])用另一较简方法构造了一个几乎处处发散的两指标有界鞅. 但关于两指标鞅在(F_4)条件下,若附加比(D)条件更强一点的 $L\log^+ L$ 有界条件,则有下面的 $a.e.$ 收敛结果. 为此,我们先证明两指标鞅的极大值不等式.

定理 4.3 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间,$\{\mathscr{F}_z,z\in N^2\}$是 $\mathscr{F}$ 的单增子 σ 代数族,满足(F_4)条件,$\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in N^2\}$是两指标鞅,则对任意 $\lambda>0,p>1$,有

(1) $\lambda P(\sup\limits_{m,n\in N}|X_{m,n}|\geqslant\lambda)\leqslant\frac{e}{e-1}(\sup\limits_{m,n\in N}E|X_{m,n}|\log^+|X_{m,n}|+1)$,

(2) $E\sup\limits_{m,n\in N}|X_{m,n}|^p\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^{2p}\sup\limits_{m,n\in N}E|X_{m,n}|^p$.

证 (1) 由于$\{X_{m,n},\mathscr{F}_{m,n},(m,n)\in N^2\}$是两指标鞅,故$\{|X_{m,n}|,\mathscr{F}_{m,n},(m,n)\in N^2\}$是两指标非负下鞅. 令 $Y_m=\sup\limits_{n\in N}|X_{m,n}|$,则 $\sup\limits_{m,n\in N}|X_{m,n}|=\sup\limits_{m\in N}Y_m$. 显然$\{Y_m,\mathscr{F}^1_m,m\in N\}$是单指标非负下鞅,由极大值不等式,对任意 $\lambda\geqslant0$,有

$$\lambda P(\sup_{n\in N}Y_m\geqslant\lambda)\leqslant\sup_{m\in N}EY_m. \tag{4.1}$$

又对每一固定的 $m\in N$,$\{|X_{m,n}|,\mathscr{F}^2_n,n\in N\}$是单指标非负下鞅. 由 Doob 不等式有

$$\begin{aligned}EY_m&=E\sup_{n\in N}|X_{m,n}|\\&\leqslant\frac{e}{e-1}(\sup_{n\in N}E|X_{m,n}|\log^+|X_{m,n}|+1).\end{aligned}\tag{4.2}$$

由(4.1)与(4.2)两式立即知(1)成立.

(2) 由于$\{Y_m,\mathscr{F}^1_m,m\in N\}$是单指标非负下鞅,对 $p>1$,由 Doob 不等式有

$$\begin{aligned}E\sup_{m,n\in N}|X_{m,n}|^p&=E\sup_{m\in N}|Y_m|^p\\&\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sup_{m\in N}EY_m^p.\end{aligned}$$

又由于对每一固定的 m，$\{|X_{m,n}|,\mathscr{F}_n^2,n\in N\}$是单指标非负下鞅，于是由 Doob 不等式，对上述 $p>1$，有

$$EY_m^p=E\sup_{n\in N}|X_{m,n}|^p$$

$$\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sup_{n\in N}E|X_{m,n}|^p,$$

于是，$E\sup_{m,n\in N}|X_{m,n}|^p\leqslant\left(\frac{p}{p-1}\right)^{2p}\sup_{m,n\in N}E|X_{m,n}|^p.$

定理 4.4[51] 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间，$\{\mathscr{F}_{m,n},(m,n)\in N^2\}$是 $\mathscr{F}$ 的单增子 σ 代数族且满足(F_4)条件，$X=\{X_{m,n},\mathscr{F}_{m,n},(m,n)\in N^2\}$是两指标鞅，若满足 $\sup_{m,n\in N}E|X_{m,n}|\log^-|X_{m,n}|<\infty$（此条件称为 $L\log^-L$ 有界，若 X 满足 $L\log^-L$ 有界，则简记为 $X\in L\log^-L$）．特别地，如果 $\sup_{m,n\in N}E|X_{m,n}|^p<\infty\ (p>1)$，则 $\lim_{m,n\to\infty}X_{m,n}=X_\infty$，$a.e.$ 且 X_∞可积．

证 首先假定 $\sup_{m,n\in N}E|X_{m,n}|^p<\infty\ (p>1)$，往证$\{X_{m,n}\}\ a.e.$ 收敛．由定理 4.1 知：存在可积随机变量 X_∞，使得

$$X_{m,n}\xrightarrow{L^p}X_\infty.$$

于是可选择一列子指标(m_k,n_k)使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^pE|X_{m_k,n_k}-X_\infty|^p<\infty.$$

对固定的 k，我们考虑两指标鞅

$$\{X_{m,n}-X_{m_k,n_k},\mathscr{F}_{m,n},m\geqslant m_k,n\geqslant n_k\},$$

由定理 4.3 有

$$E\sup_{\substack{m\geqslant m_k\\ n\geqslant n_k}}|X_{m,n}-X_{m_k,n_k}|^p$$

$$\leqslant A_p\sup_{\substack{m\geqslant m_k\\ n\geqslant n_k}}E|X_{m,n}-X_{m_k,n_k}|^p$$

$$\leqslant A_pE|X_\infty-X_{m_k,n_k}|^p,$$

其中 A_p 是仅与 p 有关的常数，而最后不等式我们利用了$\{|X_{m,n}-X_{m_k,n_k}|^p,\mathscr{F}_{m,n},m\geqslant m_k,n\geqslant n_k\}$是下鞅及定理 4.1．因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\sup_{\substack{m \geq m_k \\ n \geq n_k}} |X_{m,n} - X_{m_k,n_k}| > \frac{1}{k})$$

$$\leqslant A_p \sum_{k=1}^{\infty} k^p E|X_\infty - X_{m_k,n_k}|^p < \infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理知

$$P(\overline{\lim_{k\to\infty}}\{\sup_{\substack{m \geq m_k \\ n \geq n_k}} |X_{m,n} - X_{m_k,n_k}| > \frac{1}{k}\}) = 0,$$

即 $P(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}\{\sup_{\substack{m \geq m_k \\ n \geq n_k}} |X_{m,n} - X_{m_k,n_k}| \leqslant \frac{1}{k}\}) = 1.$

这表明$\{X_{m,n}\}$是 $a.e.$ 基本列，因此必 $a.e.$ 收敛. 但$\{X_{m,n}\}L^1$ 收敛于 X_∞，故 $X_{m,n} \to X_\infty, a.e.$ 且 X_∞可积.

现设 $\sup_{m,n \in N} E|X_{m,n}|\log^-|X_{m,n}| < \infty$. 由定理 4.1 知存在可积随机变量 X_∞ 使得 $X_{m,n} \to X_\infty (L^1)$，且 $X_{m,n} = E(X_\infty | \mathscr{F}_{m,n})$. 不妨设$\{X_{m,n}\}$是非负的，(否则我们分别考虑$\{X_{m,n}^-\}$与$\{X_{m,n}\}$). 令 $X_\infty^{(a)} = X_\infty \wedge a$，$a$ 为正实数，$X_{(m,n)}^{(a)} = E(X_\infty^{(a)} | \mathscr{F}_{m,n})$. 则$\{X_{m,n} - X_{m,n}^{(a)}\}$是非负鞅且

$$\{(X_{m,n} - X_{m,n}^{(a)})\log^-(X_{m,n} - X_{m,n}^{(a)}), (m,n) \in N^2\}$$

为非负下鞅，由定理 4.3 及定理 4.2 有

$$P(\sup_{m,n}(X_{m,n} - X_{m,n}^{(a)}) > \lambda)$$

$$\leqslant \frac{e}{\lambda(e-1)}(\sup_{m,n} E(X_{m,n} - X_{m,n}^{(a)})\log^+(X_{m,n} - X_{m,n}^{(a)}) + 1)$$

$$\leqslant \frac{e}{\lambda(e-1)}(E(X_\infty - X_\infty^{(a)})\log^+(X_\infty - X_\infty^{(a)}) + 1).$$

这样，利用上式，对任意给定 $\varepsilon > 0$，取 $\varepsilon_k \downarrow 0$，并定义一列 $a_k \uparrow \infty$，使得

$$P(\sup_{m,n}(X_{m,n} - X_{m,n}^{(a_k)}) > \varepsilon_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

这是可以做到的，因为

$$P(\sup_{m,n}(X_{m,n} - X_{m,n}^{(a)}) > \varepsilon_k)$$

$$=P(\sup_{m,n} c(X_{m,n}-X_{m,n}^{(a)})>c\varepsilon_k)$$

$$\leqslant\frac{e}{c\varepsilon_k(e-1)}E(X_\infty-X_\infty^{(a)})\log^-(X_\infty-X_\infty^{(a)})+\frac{e}{c\varepsilon_k(e-1)},$$

先取 c 充分大，再取 α 充分大，即可得上面结果. 令

$$E_k=\{\sup_{m,n}(X_{m,n}-X_{m,n}^{(a_k)})>\varepsilon_k\},$$

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k.$$

在 E 的余集上对所有 k，有

$$\sup_{m,n}(X_{m,n}-X_{m,n}^{(a)})<\varepsilon_k,$$

因而 $\lim\limits_{a\to\infty}X_{m,n}^{(a)}=X_{m,n}$ 关于 m,n 一致成立. 但由第一部分的证明知

$$X_{m,n}^{(a)}\to X_\infty,a.e.\ (m,n\to\infty).$$

因此在 E 的余集上有 $X_{m,n}\to X_\infty,a.e.\ (m,n\to\infty)$. 另一方面

$$P(E)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}P(E_k)\leqslant\varepsilon.$$

即 $P(E)=0$. 因此 $X_{m,n}\to X_\infty,a.e.\ (m,n\to\infty)$.

推论 4.5 设 $\{X_{s,t},\mathscr{F}_{s,t},(s,t)\in R_+^2\}$ 是可分的两指标鞅，$\{\mathscr{F}_{s,t},(s,t)\in R_+^2\}$ 满足 (F_4) 条件，且 $\sup\limits_{(s,t)\in R_+^2}E|X_{s,t}|\log^-|X_{s,t}|<\infty$，则存在可积随机变量 X_∞，使得 $X_{s,t}\to X_\infty\ a.e.\ (s,t\to\infty)$.

下面的概念与结果可参见文献[51].

定义 4.2 设 $\mathscr{G},\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数，$G\in\mathscr{G}$. 若对任意 $A_i\in\mathscr{G}_i(i=1,2)$，有

$$P(A_1A_2|\mathscr{G})I_G=P(A_1|\mathscr{G})P(A_2|\mathscr{G})I_G,$$

则称 $\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 在 G 上关于 $\mathscr{G}$ 条件独立. 若 $\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 在 G 上关于 $\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2$ 条件独立，则称 $\mathscr{G}_2,\mathscr{G}_2$ 在 G 上条件独立.

显然，$\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 在 $\varnothing$ 上关于任何 $\mathscr{G}$ 都是条件独立的. $\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 在 Ω 上关于 $\mathscr{G}$ 条件独立，即是 § 2 中所定义的 $\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 关于 $\mathscr{G}$ 的条件独立性.

定理 4.6 设 $\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 为 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数，$G\in\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2$，则下面

命题等价：

(1) $\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 在 G 上条件独立，

(2) $\mathscr{G}_1|_G$ 与 $\mathscr{G}_2|_G$ 关于 $\mathscr{G}_1|_G\cap\mathscr{G}_2|_G$ 条件独立，(其中 $\mathscr{G}_i|_G=\sigma\{A\cap G: A\in\mathscr{G}_i\}, i=1,2$)，

(3) 对任意有界随机变量 X，有

$$E(E(X|\mathscr{G}_1)|\mathscr{G}_2)I_G=E(E(X|\mathscr{G}_2)|\mathscr{G}_1)I_G$$
$$=E(X|\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2)I_G,$$

(4) 对任一 $X\in L^1(\Omega,\mathscr{G}_1,P;R)$，有

$$E(X|\mathscr{G}_2)I_G\in L^1(\Omega,\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2,P;R).$$

对称地，对任一 $X\in L^1(\Omega,\mathscr{G}_2,P;R)$，有

$$E(X|\mathscr{G}_1)I_G\in L^1(\Omega,\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2,P;R).$$

证 (1)$\Longleftrightarrow$(2). 设(1)成立，对任意的 $A_i\in\mathscr{G}_i|_G$，则有 $A_i\in\mathscr{G}_i$ 且 $A_i\in G$ 或 $A_i\supset G$ $(i=1,2)$. 易见 $\mathscr{G}_1|_G\cap\mathscr{G}_2|_G=(\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2)|_G$，由(1)及[52]中定理 1.21 有

$$\begin{aligned}&P(A_1A_2|\mathscr{G}_1|_G\cap\mathscr{G}_2|_G)\\&=E(I_{A_1A_2}|(\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2)I_G)\\&=E(I_{A_1A_2}|\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2)I_G\\&=P(A_1|\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2)P(A_2|\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2)I_G\\&=P(A_1|\mathscr{G}_1|_G\cap\mathscr{G}_2|_G)P(A_2|\mathscr{G}_1|_G\cap\mathscr{G}_2|_G),\end{aligned}$$

即(2)成立，由以上证明过程易得到(2)$\Rightarrow$(1).

(1)$\Rightarrow$(4). 先证对任一 $A_1\in\mathscr{G}_1$，都有 $E(I_{A_1}|\mathscr{G}_2)I_G\in L^1(\Omega,\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2,P;R)$，为此只须证明：

$$E(I_{A_1}|\mathscr{G}_2)I_G=E(I_{A_1}|\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2)I_G.$$

事实上，此式两边均为 $\mathscr{G}_2$ 可测，又对任意 $A_2\in\mathscr{G}_2$，由(1)有

$$\int_{A_2}E(I_{A_1}|\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2)I_G dP$$

$$=\int_{\Omega}E(I_{A_2}E(I_{A_1}|\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2)|\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2)I_G dP$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} E(I_{A_2} | \mathscr{G}_1 \cap \mathscr{G}_2) E(I_{A_1} | \mathscr{G}_1 \cap \mathscr{G}_2) I_G dP \\
&= \int_{\Omega} E(I_{A_1} I_{A_2} | \mathscr{G}_1 \cap \mathscr{G}_2) I_G dP \\
&= \int_{G} E(I_{A_1} I_{A_2} | \mathscr{G}_1 \cap \mathscr{G}_2) dP \\
&= \int_{G} I_{A_1} I_{A_2} dP \\
&= \int_{A_2} I_{A_1} I_G dP \\
&= \int_{A_2} E(I_{A_1} | \mathscr{G}_2) I_G dP.
\end{aligned}
$$

我们可用 π-系和 λ-系方法易证对任意 $X \in L^1(\Omega, \mathscr{G}_2, P; R)$，都有 $E(X | \mathscr{G}_2) I_G \in L^1(\Omega, \mathscr{G}_1 \cap \mathscr{G}_2, P; R)$. 类似地可得到对称的结果，从而(4)得证.

(4)$\Rightarrow$(3). 设(4)成立，X 为有界随机变量，，则 $E(X | \mathscr{G}_1) \in L^1(\Omega, \mathscr{G}_1, P; R)$，故

$$
E(E(X | \mathscr{G}_1) | \mathscr{G}_2) I_G \in L^1(\Omega, \mathscr{G}_1 \cap \mathscr{G}_2, P; R),
$$

所以

$$
E(E(X | \mathscr{G}_1) | \mathscr{G}_2) I_G = E(X | \mathscr{G}_1 \cap \mathscr{G}_2) I_G.
$$

类似地可得

$$
E(E(X | \mathscr{G}_2) | \mathscr{G}_1) I_G = E(X | \mathscr{G}_1 \cap \mathscr{G}_2) I_G,
$$

从而(3)成立.

(3)$\Rightarrow$(1). 设(3)成立，则对任意 $A_1 \in \mathscr{G}_1, A_2 \in \mathscr{G}_2$，有

$$
\begin{aligned}
E(I_{A_1} I_{A_2} | \mathscr{G}_1 \cap \mathscr{G}_2) I_G &= E(E(I_{A_1} I_{A_2} | \mathscr{G}_1) | \mathscr{G}_2) I_G \\
&= E(I_{A_1} E(I_{A_2} | \mathscr{G}_1) | \mathscr{G}_2) I_G \\
&= E(I_{A_1} E(I_{A_2} | \mathscr{G}_1 \cap \mathscr{G}_2) | \mathscr{G}_2) I_G \\
&= E(I_{A_1} | \mathscr{G}_1 \cap \mathscr{G}_2) E(I_{A_2} | \mathscr{G}_1 \cap \mathscr{G}_2) I_G
\end{aligned}
$$

即(1)成立. 定理证毕.

在上述定理中，令 $G=\Omega$，立刻得到通常条件独立性的等价命题.

推论 4.7 (1) 设 $G\in\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2$，$\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 在 G 上条件独立，则对任一 $G'\subset G$，$G'\in\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2$，均有 $\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 在 G' 上条件独立.

(2) 设 $\{G_n\}\subset\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2$，对每一 n，$\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 在 G_n 上条件独立，则 $\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 在 $\bigcup_n G_n$ 上条件独立. 特别地，若 $\bigcup_n G_n=\Omega$，则 $\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 条件独立.

推论 4.8 设 $G\in\mathscr{G}$，$\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 在 G 上关于 $\mathscr{G}$ 条件独立，则有 $(\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2)|_G\subset\mathscr{G}|_G$.

定理 4.9 设 $\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 为 $\mathscr{F}$ 的两个子 σ 代数，则存在唯一的 $G\in\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2$（$a.e.$ 意义下），使 $\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 在 G 上条件独立，且对任意 $G'\in\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2$，若 $\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 在 G' 上条件独立，则 $G'\subset G$.

证 令 $M=\{G':G'\in\mathscr{G}_1\cap\mathscr{G}_2,\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 在 G' 上条件独立$\}$，再令 $G=\operatorname*{esup}_{G'\in M}G'$，则 G 即为所求. 事实上，取一列 $\{G'_n\}\subset M$，使得 $G=\bigcup_n G'_n$，则由推论 4.7 得 $G\in M$，因此 $\mathscr{G}_1,\mathscr{G}_2$ 在 G 上条件独立. 由 M 及 G 的取法易见 G 具有所述的最大性和唯一性，定理证毕.

定义 4.4[51] 设 M 为 N^2 的子方向，$G\in\bigcap_{z\in M}\mathscr{F}_z$，称 $\{\mathscr{F}_z,z\in M\}$ 在 G 上满足 (F_4) 条件，若对任意的 $z,z'\in M$，$\mathscr{F}_z,\mathscr{F}_{z'}$ 在 G 上关于 $\mathscr{F}_{z\wedge z'}$ 条件独立，称 $\{\mathscr{F}_z,z\in N^2\}$ 满足局部 (F_4) 条件，若存在一列 $\{G_n\}$ 两两不交，$\bigcup_n G_n=\Omega$，对每一 $n\in N$，存在 $z_n\in N^2$，使得 $G_n\in\mathscr{F}_{z_n}$，且 $\{\mathscr{F}_z,z\geqslant z_n\}$ 在 G_n 上满足 (F_4) 条件.

显然，$\{\mathscr{F}_z,z\in N^2\}$ 满足 (F_4) 条件即是指它在 Ω 上满足 (F_4) 条件，因此必满足局部 (F_4) 条件. 但反过来并不一定成立（见[51]）.

定理 4.10 设 $z_0\in N^2$，$G\in\mathscr{F}_{z_0}$，则下述命题等价：

(1) $\{\mathscr{F}_z,z\geqslant z_0\}$ 在 G 上满足 (F_4) 条件；

(2) $\{\mathscr{F}_z|_G,z\geqslant z_0\}$ 满足 (F_4) 条件；

(3) 对任意 $z,z'\geqslant z_0$ 以及任意有界随机变量 X，有

$$E(E(X|\mathscr{F}_z)|\mathscr{F}_{z'})I_G$$
$$=E(E(X|\mathscr{F}_{z'})|\mathscr{F}_z)I_G$$
$$=E(X|\mathscr{F}_{z\wedge z'})I_G;$$

(4) 对任意 $z=(m,n)\geqslant z_0$，$\mathscr{F}_m^1$、$\mathscr{F}_n^2$ 在 G 上关于 $\mathscr{F}_z$ 条件独立；

(5) 对任意 $z\geqslant z_0$ 以及任意有界随机变量 X，有

$$E(E(X|\mathscr{F}_m^1)|\mathscr{F}_n^2)I_G=E(E(X|\mathscr{F}_n^2)|\mathscr{F}_m^1)I_G$$
$$=E(X|\mathscr{F}_z)I_G$$

(6) 对任意 $z,z'\geqslant z_0$ 以及任意 $X\in L^1(\Omega,\mathscr{F}_z,P;R)$，有

$$E(X|\mathscr{F}_{z'})I_G\in L^1(\Omega,\mathscr{F}_{z\wedge z'},P;R);$$

(7) 对任意两指标鞅 $\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in N^2\}$，当 $z,z'\geqslant z_0$ 时，

$$E(X_z|\mathscr{F}_{z'})I_G=X_{z\wedge z'}I_G;$$

(8) 对任意有界随机变量 X，令 $X_z=E(X|\mathscr{F}_z)I_G$，则 $\{X_z,\mathscr{F}_z,z\geqslant z_0\}$ 为 i-鞅 $(i=1,2)$；

(9) 对任意两指标鞅 $\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in N^2\}$，$\{X_zI_G,\mathscr{F}_z,z\geqslant z_0\}$ 为 i-鞅 $(i=1,2)$.

证 由局部 (F_4) 条件的定义，利用定理 4.6 并应用本章的定理 2.6 及定理 3.6 的证法易证本定理成立.

推论 4.11 (1) 设 $G'\subset G$，$G',G\in\mathscr{F}_{z_0}$，若 $\{\mathscr{F}_z,z\geqslant z_0\}$ 在 G 上满足 (F_4) 条件，则 $\{\mathscr{F}_z,z\geqslant z_0\}$ 在 G' 上也满足 (F_4) 条件.

(2) 设 $\{G_n\}\subset\mathscr{F}_{z_0}$，$\{\mathscr{F}_z,z\geqslant z_0\}$ 在每一 G_n 上满足 (F_4) 条件，则 $\{\mathscr{F}_z,z\geqslant z_0\}$ 在 $\bigcup\limits_n G_n$ 上满足 (F_4) 条件，特别地，若 $\bigcup\limits_n G_n=\Omega$，则 $\{\mathscr{F}_z,z\geqslant z_0\}$ 满足 (F_4) 条件.

证 由条件 4.10 及推论 4.7 立即知本推论成立.

定理 4.12 $\{\mathscr{F}_z,z\in N^2\}$ 满足局部 (F_4) 条件的充要条件是存在一列 $G_n\uparrow\Omega$ 和 $z_n\uparrow$，使对每一 n，$G_n\in\mathscr{F}_{z_n}$，$\{\mathscr{F}_z,z\geqslant z_n\}$ 在 G_n 上满足 (F_4) 条件.

证 必要性：设 $\{\mathscr{F}_z,z\in N^2\}$ 满足局部 (F_4) 条件，则存在一列

$\{G'_n\}$两两不变，$\bigcup_n G'_n=\Omega$，使对每一 n，存在 $z'_n\in N^2$，满足 $G'_n\in\mathscr{F}_{z'_n}$，且 $\{\mathscr{F}_z,z\geqslant z_n\}$ 在 G'_n 上满足 (F_4) 条件. 令 $G_0=G'_0$，$G_n=\bigcup_{i=1}^{n}G'_i(n\geqslant 1)$，再令 $z_0=z'_0$，取 $z_1\geqslant z_0,z'_1$，若 z_n 已取定，再取 $z_{n+1}\geqslant z_n,z'_{n+1}$. 这样，我们得到一列 $G_n\uparrow$ 和 $Z_n\uparrow$ 且 $G_n\in\mathscr{F}_{z_n}$. 对任意 $i\leqslant n$，由上面取法有 $z'_i\leqslant z_n$，故 $\{\mathscr{F}_z,z\geqslant z_n\}$ 在 G'_i 上满足 (F_4) 条件，由推论 4.11 知 $\{\mathscr{F}_z,z\geqslant z_n\}$ 在 G_n 上满足 (F_4) 条件. 上面 z_n 还可取为 $z_n\uparrow(\infty,\infty)$.

充分性. 若设存在一列 $G_n\uparrow\Omega$ 和 $z_n\uparrow$，使对每一 n，$G_n\in\mathscr{F}_{z_n}$，$\{\mathscr{F}_z,z\geqslant z_n\}$ 在 G_n 上满足 (F_4) 条件，只要令 $G'_0=G_0$，$G'_n=G_n-\bigcup_{i=0}^{n-1}G_i(n\geqslant 1)$，就有 $\{G'_n\}$ 两两不交，$\bigcup_{n=0}^{\infty}G'_n=\Omega$，且由推论 4.11 得，对任一 n，$\{\mathscr{F}_z,z\geqslant z_n\}$ 在 G'_n 上满足 (F_4) 条件. 因此，$\{\mathscr{F}_z,z\in N^2\}$ 满足局部 (F_4) 条件.

定理 4.13 设 $\{\mathscr{F}_z,z\in N^2\}$ 满足局部 (F_4) 条件，$\{X_z,z\in N^2\}$ 为非负下鞅，则对任意 $\lambda>0$，$p>1$，有

(1) $\lambda P(X^*\geqslant\lambda)\leqslant\dfrac{e}{e-1}\left(\sup\limits_{z\in N^2}EX_z\log^+X_z+1\right)$，

(2) $EX^{*p}\leqslant\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^{2p}\sup\limits_{z\in N^2}EX_z^p$，

其中 $X^*=\varlimsup\limits_{z\in N^2}X_z$.

证 由定理 4.12 可取一列 $G_n\uparrow\Omega$，以及 $z_n\uparrow(\infty,\infty)$，使得对任意的 $G_n\in\mathscr{F}_{z_n}$，$\{\mathscr{F}_z,z\geqslant z_n\}$ 在 G_n 上满足 (F_4) 条件. 由定理 4.10 得 $\{\mathscr{F}_z|_{G_n},z\geqslant z_n\}$ 满足 (F_4) 条件，又 $\{X_z,\mathscr{F}_z,z\in N^2\}$ 为非负下鞅. 由[52]的定理 1.21，对任意 $z'\geqslant z\geqslant z_n$ 有

$$E(X_{z'}I_{G_n}|\mathscr{F}_z|_{G_n})=E(X_{z'}|\mathscr{F}_z)I_{G_n}\geqslant X_zI_{G_n}.$$

此外，$X_zI_{G_n}$ 是 $\mathscr{F}_z|_{G_n}$ 可测的. 因此 $\{X_zI_{G_n},\mathscr{F}_z|_{G_n},z\geqslant z_n\}$ 为非负下鞅，由定理 4.3 有

$$\lambda P(\sup_{z\geqslant z_n}X_zI_{G_n}\geqslant\lambda)$$

$$\leqslant \frac{e}{e-1}(\sup_{z\geqslant z_n} E(X_z I_{G_n} \log^+ X_z I_{G_n})+1),$$

因此，

$$\lambda P(\{X^* \geqslant \lambda\} \cap G_n) \leqslant \frac{e}{e-1}(\sup_{z\geqslant z_n} E(X_z \log^+ X_z)+1),$$

令 $n\to\infty$，即得到第一个不等式，类似可得到第二个不等式.

定理 4.14 设 $\{\mathscr{F}_z, z\in N^2\}$ 满足局部 (F_4) 条件，$\{X_z, \mathscr{F}_z, z\in N^2\}$ 为 $L\log^+ L$ 有界鞅，则存在一可积随机变量 X_∞，使得 $\lim\limits_{z\in N^2} X_z = X_\infty$，$a.e.$.

证 由于 $\{\mathscr{F}_z, z\in N^2\}$ 满足局部 (F_4) 条件，故存在一列 $\{G_n\}$ 两两不交，$\bigcup\limits_n G_n=\Omega$，对任意 n，存在 $z_n\in N^2$，使得 $G_n\in\mathscr{F}_{z_n}$，且 $\{\mathscr{F}_z, z\geqslant z_n\}$ 在 G_n 上满足 (F_4) 条件. 从而由定理 4.10，$\{\mathscr{F}_z|_{G_n}, z\geqslant z_n\}$ 满足 (F_4) 条件. 又 $\{X_z I_{G_n}, \mathscr{F}_z|_{G_n}, z\geqslant z_n\}$ 为 $L\log^+ L$ 有界的两指标鞅. 由定理 4.4 得知 $\{X_z I_{G_n}, z\geqslant z_n\}$ $a.e.$ 收敛于一可积随机变量 $X^{(G_n)} I_{G_n}$，从而 $\{X_z, z\in N^2\}$ $a.e.$ 收敛于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} X^{(G_n)} I_{G_n} \triangleq X_\infty$，$X_\infty$ 的可积性易由法都引理得到.

上面结果可以很容易地推广到以 R_+^2 为指标的情形.

定理 4.15 设 $\{\mathscr{F}_z, z\in R_+^2\}$ 满足局部 (F_4) 条件，则可分的 $L\log^+ L$ 有界两指标鞅 $\{X_z, \mathscr{F}_z, z\in R_+^2\}$ $a.e.$ 收敛于一可积随机变量.

第五章　B 值 鞅

在前面三章中，我们研究的是实值鞅、实值鞅型序列及实值多指标鞅. 从本章开始，我们将要研究 B 值鞅、B 值鞅型序列及定向集上的 B 值鞅型过程. B 值鞅的研究虽始于本世纪六十年代初（见[53]、[54]），但其发展非常迅速. 特别，它与其它数学分支，如泛函分析、调和分析等的相互渗透，有机结合，彼此促进，使 B 值鞅这一理论的研究，无论是其理论本身，还是在其应用方面都已有了丰富的成果. 这里我们将介绍这方面的一些基本结果和重要技巧，包括我们在这方面作的一些工作. 从本章开始，如无特别声明，我们讨论的随机变量均指 B 值随机变量，所论及的收敛，可测，积分与条件期望均指强收敛，强可测，Bochner 积分与强条件期望，仍如前一样，几乎处处成立的等式或不等式常省去几乎处处符号 $a.e.$.

§1　定义及基本性质

定义 1.1　设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是 B 值可积适应序列，称 X 为 B 值鞅，如果

$$E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)=X_n,\forall\ n\in N.$$

关于鞅的定义可推广到定向集的情形.

定义 1.2　设 $(\Delta,\leqslant)$ 是一向右定向集，$\{\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的上升子 σ 代数族，$\{X_t,t\in\Delta\}$ 是可积随机变量族，若满足：

(1) 对每一 $t\in\Delta$，X_t 是 $\mathscr{F}_t$ 可测的，

(2) 对任意 $s,t\in\Delta, s\leqslant t$，有 $E(X_t|\mathscr{F}_s)=X_s$. 这时，我们称 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 为 **B** 值鞅. 显然，当 $\Delta=N$ 时，上述定义即为定义 1.1.

例 1.1 (1) 设 $X\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$，$\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的单调上升的子 σ 代数序列，令 $X_n=E(X|\mathscr{F}_n)$，$n\in N$，则 $\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是 **B** 值鞅.

(2) 给定概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 如下：

$\Omega=[0,1)$，$\mathscr{F}=[0,1)$ 中一切 Borel 子集，P 为 $\mathscr{F}$ 上的 Lebesgue 测度.

设 $\{x_n,n\in N\}$ 是 **B** 中的任一序列，令

$X_0=x_0I_{[0,1)}$,

$X_1=(x_0-x_1)I_{[0,\frac{1}{2})}+(x_0+x_1)I_{[\frac{1}{2},1)}$,

$X_2=(x_0-x_1-x_2)I_{[0,\frac{1}{4})}+(x_0-x_1+x_2)I_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2})}$
$\quad+(x_0+x_1-x_2)I_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4})}+(x_0+x_1+x_2)I_{[\frac{3}{4},1)}$,

……………………………………………………

再令 $\mathscr{F}_n=\sigma\{X_0,X_1,\cdots,X_n\}$，$n\in N$，则 $\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是 **B** 值鞅.

定理 1.2 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为 **B** 值鞅，$\forall\ \sigma\in T$，$\forall\ \tau\in T(\sigma)$，则

(1) $\{\|X_n\|,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为非负实值下鞅，

(2) $E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)=X_\sigma$，

(3) $\forall\ A\in\mathscr{F}_\sigma$，有 $\int_A\|X_\sigma\|dP\leqslant\int_A\|X_\tau\|dP$.

证 (1) 对任意 $m,n\in N$，$m\geqslant n$，有

$$E(X_m|\mathscr{F}_n)=X_n,$$

故 $E(\|X_m\||\mathscr{F}_n)\geqslant\|E(X_m|\mathscr{F}_n)\|=\|X_n\|$，$\forall\ m\geqslant n$. 即

$$\{\|X_n\|,\mathscr{F}_n,n\in N\}$$

为非负实值下鞅.

(2) 首先，X_σ 是 $\mathscr{F}_\sigma$ 可测的，其次，若 $A\in\mathscr{F}_\sigma$，定义

$$\tau' = \begin{cases} \tau, & \text{在 } A \text{ 上}, \\ \max \tau, & \text{在 } \Omega - A \text{ 上}, \end{cases}$$

$$\sigma' = \begin{cases} \sigma, & \text{在 } A \text{ 上}, \\ \max \tau, & \text{在 } \Omega - A \text{ 上}. \end{cases}$$

则 $\sigma' \in T$，$\tau' \in T(\sigma')$，且

$$\int_A X_\tau dP = \int_A X_{\tau'} dP = \int_\Omega X_{\tau'} dP - \int_{\Omega - A} X_{\tau'} dP$$

$$= \int_\Omega X_{\tau'} dP - \int_{\Omega - A} X_{\max \tau} dP, \tag{1.1}$$

$$\int_A X_\sigma dP = \int_A X_{\sigma'} dP = \int_\Omega X_{\sigma'} dP - \int_{\Omega - A} X_{\sigma'} dP$$

$$= \int_\Omega X_{\sigma'} dP - \int_{\Omega - A} X_{\max \tau} dP, \tag{1.2}$$

而

$$\int_\Omega X_{\tau'} dP = \sum_{i=\min \tau'}^{\max \tau'} \int_{(\tau'=i)} X_i dP$$

$$= \sum_{i=\min \tau'}^{\max \tau'} \int_{(\tau'=i)} X_{\max \tau} dP$$

$$= \int_\Omega X_{\max \tau} dP = \int_\Omega X_0 dP,$$

类似可证明

$$\int_\Omega X_{\sigma'} dP = \int_\Omega X_0 dP,$$

于是
$$\int_\Omega X_{\tau'} dP = \int_\Omega X_{\sigma'} dP.$$

由(1.1)、(1.2)两式得

$$\int_A X_\tau dP = \int_A X_\sigma dP,$$

即 $E(X_\tau | \mathscr{F}_\sigma) = X_\sigma$.

(3) $\forall A \in \mathscr{F}_\sigma$，由(2)及条件期望的性质得

$$\int_A \| X_\sigma \| dP = \int_A \| E(X_\tau | \mathscr{F}_\sigma) \| dP$$

$$\leqslant \int_A E(\| X_\tau \| | \mathscr{F}_\sigma) dP = \int_A \| X_\tau \| dP.$$

定义 1.3 设$\{X_n, n\in N\}$为 **B** 值随机变量序列,若

$$\sup_{\tau\in T} E \| X_\tau \| < \infty,$$

则称$\{X_n, n\in N\}$为(B)有界的(或属于(B)类).

定理 1.3 设 $X=\{X_n, \mathscr{F}_n, n\in N\}$是 **B** 值可积适应序列,则

(1) 若$\{X_n, n\in N\}$属于(B)类,则$\forall\ \lambda>0$,有

$$P\{\sup_{n\in N} \| X_n \| > \lambda\} \leqslant \frac{1}{\lambda} \sup_{\tau\in T} E \| X_\tau \| < \infty, \tag{1.3}$$

(2) 若 X 为 **B** 值鞅,则$\forall\ \lambda>0$,有

$$P\{\sup_{n\in N} \| X_n \| > \lambda\} \leqslant \frac{1}{\lambda} \sup_{n\in N} E \| X_n \|, \tag{1.4}$$

(3) 若 $X_n=E(X | \mathscr{F}_n)$, $n\in N$,其中 $X\in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B})$,则$\forall\ \lambda>0$,有

$$P\{\sup_{n\in N} \| X_n \| > \lambda\} \leqslant \frac{1}{\lambda} E \| X \|. \tag{1.5}$$

证 (1) 对每一固定的 $m\in N$,令

$$A_m = \{\sup_{n\leqslant m} \| X_n \| > \lambda\}$$

定义 σ 如下:

$$\sigma(\omega) = \begin{cases} \min\{n\in N: n\leqslant m, \| X_n(\omega) \| > \lambda\}, & \text{若 } \omega\in A_m, \\ m, & \text{否则}. \end{cases}$$

则 $\sigma\in T$,且

$$\lambda P(A_m) \leqslant \int_{A_m} \| X_\sigma \| dP \leqslant E \| X_\sigma \| \leqslant \sup_{\tau\in T} E \| X_\tau \| < \infty,$$

在上式中,令 $m\to\infty$立即知(1)成立.

(2) 由定理 1.2(3)知:对任一 $\tau\in T$,有

$$E \| X_\tau \| = \int_\Omega \| X_\tau \| dP \leqslant \int_\Omega \| X_{\max \tau} \| dP \leqslant \sup_{n\in N} E \| X_n \|,$$

再用(1)便得

$$P\{\sup_{n\in N}\|X_n\|>\lambda\}\leqslant\frac{1}{\lambda}\sup_{t\in T}E\|X_t\|=\frac{1}{\lambda}\sup_{n\in N}E\|X_n\|.$$

(3) 由于$\forall n\in N$,有

$$E\|X_n\|=\int_\Omega\|E(X|\mathscr{F}_n)\|dP\leqslant\int_\Omega\|X\|dP=E\|X\|.$$

故(3)成立.

定理 1.4 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是 B 值鞅.若 $X_n\xrightarrow{L^1}X_\infty$,则 $X_n\to X_\infty,a.e.$.

证 由于 $X_n\xrightarrow{L^1}X_\infty$,则对任意 $\varepsilon>0$、任意 $\delta>0$,$\exists n_0\in N$,使得当 $m,n\geqslant n_0$ 时,$\|X_n-X_m\|_1<\varepsilon\delta$. 固定 $m\geqslant n_0$,则$\{X_n-X_m,\mathscr{F}_n,n\geqslant m\}$为 B 值鞅,由定理 1.3(2)知

$$P\{\sup_{n\geqslant m}\|X_n-X_m\|>\varepsilon\}\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\sup_{n\geqslant m}\|X_n-X_m\|_1<\delta,$$

这说明$\{X_n\}$是几乎一致收敛的 Cauchy 序列,从而$\{X_n\}a.e.$收敛.又序列 $a.e.$收敛的极限与 L^1 收敛的极限是一致的,故 $X_n\to X_\infty$,$a.e.$.

定理 1.5 设 $X\in L^p(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})(1\leqslant p<\infty)$,$\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$是 $\mathscr{F}$ 的上升子 σ 代数序列,则鞅$\{X_n=E(X|\mathscr{F}_n),\mathscr{F}_n,n\in N\}L^p$ 收敛于 $E(X|\mathscr{F}_\infty)$,且 $a.e.$ 收敛于 $E(X|\mathscr{F}_\infty)$,其中 $\mathscr{F}_\infty=\sigma(\bigcup_{n=0}^\infty\mathscr{F}_n)$.

证 因为 $X_n=E(X|\mathscr{F}_n)=E(E(X|\mathscr{F}_\infty)|\mathscr{F}_n)$,$\forall n\in N$,并且$E(X|\mathscr{F}_\infty)\in L^p(\Omega,\mathscr{F}_\infty,P;\mathbf{B})$,所以,要证 $X_n L^p$ 收敛且 $a.e.$ 收敛于 $E(X|\mathscr{F}_\infty)$,只须证明:对任意 $X\in L^p(\Omega,\mathscr{F}_\infty,P;\mathbf{B})$,有

$$E(X|\mathscr{F}_n)\to X.\ (L^p,a.e.)$$

现设 $X\in L^p(\Omega,\mathscr{F}_\infty,P;\mathbf{B})$. 由于 $\bigcup_{n=0}^\infty\mathscr{F}_n$ 简单函数在 $L^p(\Omega,\mathscr{F}_\infty,P;\mathbf{B})$中稠密,故对任意 $\varepsilon>0$,可选取 $\bigcup_{n=0}^\infty\mathscr{F}_n$ 简单函数 X'使得 $\|X$

$-X'\|_p<\frac{\varepsilon}{2}$，由于 X' 为简单函数，故存在 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，X' 是 $\mathscr{F}_n$ 可测的，这样，对一切 $n\geqslant n_0$，利用条件期望的 Jensen 不等式有

$$\begin{aligned}\|X_n-X\|_p&\leqslant\|X_n-X'\|_p+\|X-X'\|_p\\&=\|E(X|\mathscr{F}_n)-E(X'|\mathscr{F}_n)\|_p+\|X-X'\|_p\\&\leqslant 2\|X-X'\|_p<\varepsilon.\end{aligned}$$

即 $X_n=E(X|\mathscr{F}_n)\xrightarrow{L^p}X$. 再由定理 1.4 立即知 $X_n=E(X|\mathscr{F}_n)\to X$，$a.e.$. 定理证毕.

上述定理是第二章定理 1.12(1)的推广.

§2 鞅收敛性与 B 空间的 Radon-Nikodym 性质

对于实值鞅，我们已经知道只要它 L^1 有界，则必 $a.e.$ 收敛. 下面的例子说明对于 **B** 值鞅，一般说来，这个结论未必成立.

例 2.1 令 $\mathbf{B}=C_0=\{\{a_n\}\subset R;a_n\to 0(n\to\infty)\}$，$C_0$ 赋于上确界范数拓扑，则 C_0 是 Banach 空间(见[55]第四章例 2). 设 $\{\varepsilon_i\}$ 为 Bernoulli 序列，$\{e_n\}$ 为 C_0 中通常使用的基底，令 $X_n=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(\omega)e_i$，$\mathscr{F}_n=\sigma\{X_1,\cdots,X_n\}$，$n\geqslant 1$，显然 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为一 C_0 值鞅. 对每一 $n\geqslant 1$，$\|X_n\|\equiv 1$，从而，$\sup_{n\geqslant 1}E\|X_n\|=1$，即 X 是 L^1 有界的，但 $\{X_n\}$ 绝不能 $a.e.$ 收敛，因为

$$X_{n+1}-X_n=\varepsilon_{n+1}(\omega)e_{n+1},a.e.,$$

所以

$$\|X_{n+1}-X_n\|=\|\varepsilon_{n+1}(\omega)e_{n+1}\|=1,a.e..$$

故 $\{X_n\}$ 不可能 $a.e.$ 收敛，又因 $E\|X_{n+1}-X_n\|=1$，$\forall\ n\geqslant 1$，所以 $\{X_n\}$ 也不 L^1 收敛.

保证 L^1 有界的 **B** 值鞅 $a.e.$ 收敛，**B** 应满足的充要条件是 **B**

具有所谓的 Radon-Nikodym 性质(RNP). 为此,我们先介绍一点所需要的有关概念与事实.

定义 2.1 称 Banach 空间 **B** 关于概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$具有 Radon-Nikodym 性质,如果对定义在 $\mathscr{F}$ 上的具有有界变差的完全可加的 **B** 值测度 μ,只要 $\mu\ll P$,就存在 $X\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$,使得

$$\mu(A)=\int_A XdP,\forall\ A\in\mathscr{F}.$$

若 **B** 对每个概率空间皆有 Radon-Nikodym 性质,则称 **B** 具有 Radon-Nikodym 性质,简称 **B** 具有 RNP. 此时称 X 为 μ 的 R-N 导数. 记为 $\mu=X\cdot P$ 或$\frac{d\mu}{dP}=X$.

由[1](P. 138 系 8)或[56](定理 2)知:**B** 具有 RNP$\Longleftrightarrow$**B** 关于概率空间$([0,1),\mathscr{L}[0,1),P)$具有 RNP,其中 $\mathscr{L}[0,1)$是$[0,1)$中一切 Lebesque 可测集组成的 σ 代数,P 是 Lebesque 测度.

我们知道实数空间 R 具有 RNP,常用的具有 RNP 的空间有自反空间(特别是 Hilbert 空间),可分共轭空间等等. 不具有 RNP 的空间有 C_0,L_1 等等. 这方面的结果可参阅[57].

定理 2.2 设 **B** 是 Banach 空间,则下列陈述等价:

(1) **B** 具有 RNP.

(2) 对任意概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一致可积的 **B** 值鞅 L^1 收敛.

(3) 对任意概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的一致有界的 **B** 值鞅 L^1 收敛.

证 (1)$\Rightarrow$(2). 设$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是一致可积的 **B** 值鞅. 对每一 $n\in N$,令

$$\mu_n(A)=\int_A X_n dP,\forall\ A\in\mathscr{F}_n.$$

由鞅性及一致可积性,对任意 $A\in\mathscr{F}_\infty$,$\lim\limits_{n}\mu_n(A)$存在,故令

$$\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu_n(A),\forall\ A\in\mathscr{F}_\infty.$$

由一致可积性知，μ 是完全可加的，有界变差的. 显然 $\mu\ll P$，由(1)知：$\exists\ X_\infty\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$，使得

$$\mu(A)=\int_A X_\infty dP,\forall\ A\in\mathscr{F}_\infty.$$

由鞅性，对每一 $n\in N$，任意 $A\in\mathscr{F}_n$，有

$$\int_A X_n dP=\mu_n(A)=\mu(A)=\int_A X_\infty dP.$$

故 $X_n=E(X_\infty|\mathscr{F}_n)$，$\forall\ n\in N$，用定理 1.5 立即得知 $X_n\xrightarrow{L^1}X_\infty$.

(2)⇒(3)为显然.

(3)⇒(1). 首先我们证明：若(3)成立. 则以向右定向集为指标的任一一致有界鞅亦 L^1 收敛. 事实上，设$\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$为任一一致有界的鞅，其中 Δ 为向右定向集. 反设$\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$不 L^1 收敛，则$\{X_t,t\in\Delta\}$不是 L^1 收敛的 Cauchy 族. 于是，$\exists\ \varepsilon>0$，使得对 $t\in\Delta$，存在 $u,v\in\Delta,u\geqslant t,v\geqslant t$，有 $\|X_u-X_v\|_1\geqslant 2\varepsilon$，从而必有 $\|X_u-X_t\|_1\geqslant\varepsilon$ 或 $\|X_v-X_t\|_1\geqslant\varepsilon$，反复用此结论可选取$\{t_n,n\geqslant 1\}\subset\Delta$，使得

$$\|X_{t_{n-1}}-X_{t_n}\|_1\geqslant\varepsilon.$$

而$\{X_{t_n},\mathscr{F}_{t_n},n\geqslant 1\}$为一致有界的 $\mathbf{B}$ 值鞅，但不 L^1 收敛，这与(3)矛盾.

下面证(1)成立. 设 $\mu:\mathscr{F}\to\mathbf{B}$ 是完全可加的，有界变差的，关于 P 绝对连续的 $\mathbf{B}$ 值测度，由第一章的定理 3.1 及定理 3.2 知 μ 的变差 V_μ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上完全可加的关于 P 绝对连续的非负有限实值测度，由经典的 Radon-Nikodym 定理知存在 $\varphi\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P;R)$，使得

$$V_\mu(A)=\int_A\varphi dP,\forall\ A\in\mathscr{F}.\tag{2.1}$$

令 $\Pi=\{\pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\},A_1,\cdots,A_n$ 互不相交，$\bigcup_{i=1}^n A_i=\Omega,A_i\in$

$\mathscr{F}, V_\mu(A_i)>0, 1\leqslant i\leqslant n, n\geqslant 1\}$，$\Pi$ 中定义半序"$\leqslant$"如下：$\pi_1\in\Pi$，$\pi_2\in\Pi$，$\pi_1\leqslant\pi_2$ 的充要条件是"$A\in\pi_2\Rightarrow$存在 $B\in\pi_1$，使得 $A\subset B$，a.e.". 则 $\{\Pi,\leqslant\}$ 是向右定向集. 令 $P'(A)=\dfrac{V_\mu(A)}{V_\mu(\Omega)}$，$\forall A\in\mathscr{F}$，则 $(\Omega,\mathscr{F},P')$ 为概率空间. 对任意 $\pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\in\Pi$，定义

$$X_\pi=\sum_{A\in\pi}\frac{\mu(A)}{P'(A)}I_A=V_\mu(\Omega)\sum_{A\in\pi}\frac{\mu(A)}{V_\mu(A)}I_A,$$

$$\mathscr{F}_\pi\triangleq\sigma(\pi)=\sigma\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}.$$

由[58]的例 16.2 知 $X=\{X_\pi,\mathscr{F}_\pi,\pi\in\Pi\}$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P')$ 上的 $\mathbf{B}$ 值鞅. 由于 $\|\mu(A)\|\leqslant V_\mu(A)$，$\forall A\in\mathscr{F}$. 故 X 还是一致有界鞅. 于是，存在 $X_\infty\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P';\mathbf{B})$，使得

$$\lim_{\pi\in\Pi}\int_\Omega\|X_\pi-X_\infty\|dP'=0,$$

从而，对任意 $A\in\mathscr{F}$，有

$$\lim_{\pi\in\Pi}\int_A X_\pi dP'=\int_A X_\infty dP'.$$

令 $\pi_0=\{A,\Omega-A\}\in\Pi$，注意 $\Pi(\pi_0)=\{\pi\in\Pi,\pi_0\leqslant\pi\}$ 是 Π 的子向右定向集，因此

$$\lim_{\pi\in\Pi(\pi_0)}\int_A X_\pi dP'=\int_A X_\infty dP'.$$

由鞅性、X_{π_0} 的定义及(2.1)式得

$$\mu(A)=\int_A X_\infty dP'=\int_A X_\infty\frac{dV_\mu}{V_\mu(\Omega)}$$

$$=\int_A\frac{\varphi}{V_\mu(\Omega)}X_\infty dP.$$

由于 $\{X_\pi,\pi\in\Pi\}$ 是一致有界的，故 X_∞ 是 a.e. 有界的. 从而，$\dfrac{\varphi}{V_\mu(\Omega)}X_\infty$ 是可积的 $\mathbf{B}$ 值随机变量. 这说明 $\mathbf{B}$ 具有 RNP，即(1)成立.

由上述定理及例 2.1 立即得下面推论.

推论 2.3 C_0 空间不具有 RNP.

定理 2.4 设 $1<p<\infty$，$\mathbf{B}$ 为 Banach 空间，则下面两陈述等价：

(1) $\mathbf{B}$ 具有 RNP.

(2) 对任意概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的每一 L^p 有界鞅是 L^p 收敛的.

证 (2)⇒(1). 若(2)成立，则定理 2.2 的(3)显然成立. 由定理 2.2 知 $\mathbf{B}$ 具有 RNP.

(1)⇒(2). 设 $\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为任意概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 L^p 有界的 $\mathbf{B}$ 值鞅. 由于 $p>1$，L^p 有界性蕴含一致可积性，即 $\{X_n,n\in N\}$ 是一致可积的. 由定理 2.2 知存在 $X_\infty\in L^1(\Omega,\mathscr{F}_\infty,P;\mathbf{B})$ 使得 $X_n\xrightarrow{L^1}X_\infty$，且 $X_n=E(X_\infty|\mathscr{F}_n)$. 由定理 1.5，欲证 $\{X_n,n\in N\}L^p$ 收敛，只须证 X_∞ 是 L^p 可积的. 由于 $X_n\xrightarrow{L^1}X_\infty$，则存在子列 $\{n_k,k\in N\}\subset N$ 使得

$$X_{n_k}\to X_\infty,a.e.$$

由 Fatou 引理得

$$E\|X_\infty\|^p\leqslant\varliminf_{k\to\infty}E\|X_{n_k}\|^p\leqslant\sup_{n\in N}E\|X_n\|^p<\infty.$$

这就证明了 X_∞ 是 L^p 可积的，定理证毕.

下面我们来证明本节开始提到的命题：L^1 有界 $\mathbf{B}$ 值鞅 $a.e.$ 收敛的充要条件是 $\mathbf{B}$ 具有 RNP.

定理 2.5 设 $\mathbf{B}$ 是 Banach 空间，则下面两陈述等价：

(1) $\mathbf{B}$ 具有 RNP.

(2) 对任意概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的 L^1 有界的 $\mathbf{B}$ 值鞅 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$，存在一可积 $\mathbf{B}$ 值随机变量 X_∞，使得 $X_n\to X_\infty,a.e.$.

证 (2)⇒(1). 对任意概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的一致可积的 $\mathbf{B}$ 值鞅 $\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$，由于 $\{X_n,n\in N\}$ 是 L^1 有界的，故由(2)知 $\{X_n\}a.e.$ 收敛. 从而 $\{X_n\}L^1$ 收敛，再用定理 2.2 知 $\mathbf{B}$ 具有 RNP.

(1)⇒(2). 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为任一概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},$

$P)$上的 L^1 有界 $\mathbf{B}$ 值鞅，对于 $\lambda>0$，令

$$\sigma_\lambda=\begin{cases}\min\{n\in N:\|X_n(\omega)\|>\lambda\},\\ \infty,\sup\limits_{n\in N}\|X_n(\omega)\|\leqslant\lambda.\end{cases}$$

则 $\sigma_\lambda\in T$．当 $\omega\in\{\sigma_\lambda=\infty\}$时，则

$$\sup_{n\in N}\|X_{\sigma_\lambda\wedge n}(\omega)\|\leqslant\lambda.$$

而在$\{\sigma_\lambda<\infty\}$上，有

$$\lim_{n\to\infty}\|X_{\sigma_\lambda\wedge n}\|=\|X_{\sigma_\lambda}\|,$$

由 Fatou 引理及定理 1.2(3)有

$$\begin{aligned}\int_{\{\sigma_\lambda<\infty\}}\|X_{\sigma_\lambda}\|dP&\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_{\{\sigma_\lambda<\infty\}}\|X_{\sigma_\lambda\wedge n}\|dP\\&\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_\Omega\|X_{\sigma_\lambda\wedge n}\|dP\\&\leqslant\sup_{n\in N}\int_\Omega\|X_n\|dP.\end{aligned}$$

由于在$\{\sigma_\lambda<\infty\}$上，$\|X_{\sigma_\lambda\wedge n}\|\leqslant\|X_{\sigma_\lambda}\|$，故

$$\begin{aligned}\int_\Omega\sup_{n\in N}\|X_{\sigma_\lambda\wedge n}\|dP&=\int_{\{\sigma_\lambda=\infty\}}\sup_{n\in N}\|X_{\sigma_\lambda\wedge n}\|dP\\&\quad+\int_{\{\sigma_\lambda<\infty\}}\sup_{n\in N}\|X_{\sigma_\lambda\wedge n}\|dP\\&\leqslant\lambda+\int_{\{\sigma_\lambda<\infty\}}\|X_{\sigma_\lambda}\|dP\\&\leqslant\lambda+\sup_{n\in N}\int_\Omega\|X_n\|dP<\infty.\end{aligned}$$

由定理 1.2(2)知$\{X_{\sigma_\lambda\wedge n},\mathscr{F}_{\sigma_\lambda\wedge n},n\in N\}$是 $\mathbf{B}$ 值鞅.

令 $A_\lambda\triangleq\bigcup\limits_{n\in N}\{X_n\neq X_{\sigma_\lambda\wedge n}\}$，用定理 1.3 得

$$\begin{aligned}P(A_\lambda)&=P(\bigcup_{n\in N}\{X_n\neq X_{\sigma_\lambda\wedge n}\})\leqslant P(\sup_{n\in N}\|X_n\|>\lambda)\\&\leqslant\frac{1}{\lambda}\sup_{n\in N}E\|X_n\|\to0(\lambda\to\infty).\end{aligned}$$

而$\{X_{\sigma_\lambda\wedge n}\}$与$\{X_n\}$这两个鞅在集合 A_λ^c 上是完全相同的. 但鞅

$\{X_{\sigma_\lambda \wedge n}, n\in N\}$一致可积，由定理 2.2 知$\{X_{\sigma_\lambda \wedge n}, n\in N\}L^1$ 收敛. 再由定理 1.4 知$\{X_{\sigma_\lambda \wedge n}\}a.e.$收敛于其 L^1 极限. 这就是说，在集合 A_λ^c 上 $\{X_n, n\in N\}a.e.$ 收敛. 由于 $P(A_\lambda)\to 0(\lambda\to\infty)$，故$\{X_n\}a.e.$收敛. 设其 $a.e.$ 收敛的极限为 X_∞，由 Fatou 引理知 X_∞是可积的，定理证毕.

上述定理的证明采用了停时技巧. 它是近代鞅论研究中的一个非常重要而且行之有效的方法. 这个定理还有其它若干种不同的证明，读者可参看[56]、[59].

§3 鞅不等式与 Banach 空间的凸性及光滑性

本节中 c 总表示常数，即使在同一个式子的不同地方，它可以表示不同的值.

定义 3.1 设 $\mathbf{B}$ 是 Banach 空间，其维数不小于 2. $\mathbf{B}$ 的凸性模与光滑模分别定义为

$$\delta_{\mathbf{B}}(\varepsilon)=\inf\{1-\frac{1}{2}\|x+y\|: x,y\in\mathbf{B},\ \|x\|=\|y\|=1,\ \|x-y\|=\varepsilon\} \qquad (0\leqslant\varepsilon\leqslant 2),$$

$$\rho_{\mathbf{B}}(\tau)=\sup\{\frac{1}{2}(\|x+y\|+\|x-y\|)-1: x,y\in\mathbf{B},\ \|x\|=1,\ \|y\|=\tau\} \qquad (\tau\geqslant 0).$$

称 $\mathbf{B}$ 是一致凸的，如果$\forall\ \varepsilon>0$，有 $\delta_{\mathbf{B}}(\varepsilon)>0$，称 $\mathbf{B}$ 是 q(一致)凸的$(2\leqslant q<\infty)$，如果存在常数 $c>0$，使得 $\delta_{\mathbf{B}}(\varepsilon)\geqslant c\varepsilon^q$，称 $\mathbf{B}$ 是一致光滑的，如果 $\rho_{\mathbf{B}}(\tau)=o(\tau)$，$\tau\to 0$，称 $\mathbf{B}$ 是 p(一致)光滑的$(1<p\leqslant 2)$，如果存在常数 $c>0$，使得 $\rho_{\mathbf{B}}(\tau)\leqslant c\tau^p$，称 $\mathbf{B}$ 是 q 可凸(或 p 可光滑)的，若它具有等价范数使之成为 q 凸(或 p 光滑)的.

定理 3.1 设 $\mathbf{B}$ 是任一 Banach 空间，其共轭空间为 $\mathbf{B}^*$，则有

$$\rho_{\mathbf{B}^*}(\tau)=\sup\left\{\frac{\tau\varepsilon}{2}-\delta_{\mathbf{B}}(\varepsilon): 0<\varepsilon\leqslant 2\right\},(\tau>0).$$

证 首先我们注意到对任意 $\varepsilon,\tau>0$，有

$$\delta_B(\varepsilon)+\rho_{B^*}(\tau)\geqslant\frac{\tau\varepsilon}{2}. \tag{3.1}$$

事实上,若 $x,y\in\mathbf{B}$, $\|x\|=\|y\|=1$, $\|x-y\|=\varepsilon$,及 $x^*,y^*\in\mathbf{B}^*$ 使得

$$\|x^*\|=\|y^*\|=1,$$
$$x^*(x+y)=\|x+y\|,$$
$$y^*(x-y)=\|x-y\|,$$

则

$$\begin{aligned}2\rho_{B^*}(\tau)&\geqslant\|x^*+\tau y^*\|+\|x^*-\tau y^*\|-2\\&\geqslant x^*x+\tau y^*x+x^*y-\tau y^*y-2\\&=x^*(x+y)+\tau y^*(x-y)-2\\&=\|x+y\|+\tau\varepsilon-2,\end{aligned}$$

于是
$$2-\|x+y\|\geqslant\tau\varepsilon-2\rho_{B^*}(\tau),$$

由此知(3.1)式成立.

另一方面,令 $x^*,y^*\in\mathbf{B}^*$,且 $\|x^*\|=1$, $\|y^*\|=\tau$,对 $\alpha>0$,存在 $x,y\in\mathbf{B}$,使得

$$\|x\|=\|y\|=1,x^*x+y^*x\geqslant\|x^*+y^*\|-\alpha,$$
$$x^*y-y^*y\geqslant\|x^*-y^*\|-\alpha.$$

于是

$$\begin{aligned}\|x^*+y^*\|+\|x^*-y^*\|&\leqslant x^*x+y^*x+x^*y-y^*y+2\alpha\\&=x^*(x+y)+y^*(x-y)+2\alpha\\&\leqslant\|x+y\|+\tau\|x-y\|+2\alpha\\&\leqslant2+2\sup\left\{\frac{\varepsilon\tau}{2}-\delta_B(\varepsilon):0\leqslant\varepsilon\leqslant2\right\}+2\alpha.\end{aligned}$$

从而由 α 的任意性得

$$\rho_{B^*}(\tau)\leqslant\sup\left\{\frac{\varepsilon\tau}{2}-\delta_B(\varepsilon):0\leqslant\varepsilon\leqslant2\right\}. \tag{3.2}$$

由(3.1)与(3.2)即知定理成立.

推论 3.2 Banach 空间 $\mathbf{B}$ 是 q 凸的充要条件是其共轭空间

$\mathbf{B}^*$ 是 p 光滑的(其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$).

定理 3.3 设 $\mathbf{B}$ 是 Banach 空间,$1<p\leqslant 2$,则下列陈述是等价的:

(1) $\mathbf{B}$ 是 p 光滑的.

(2) 存在常数 $c>0$,使得

$\|x+y\|^p+\|x-y\|^p\leqslant 2\|x\|^p+c\|y\|^p, \forall\ x,y\in\mathbf{B}$,

(3) 存在常数 k,若子 σ 代数 $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2\subset\mathscr{F}$,对任意两个 L^p 可积的 $\mathbf{B}$ 值随机变量 X_i,X_i 是 $\mathscr{F}_i$ 可测的,$i=1,2$,并且满足

$$\|2X_1-E(X_2|\mathscr{F}_1)\|\geqslant\|X_1\|,\ a.e.,\tag{3.3}$$

则

$E((\|X_2\|^p-\|X_1\|^p)|\mathscr{F}_1)\leqslant kE(\|X_2-X_1\|^p|\mathscr{F}_1)$,

(4) 存在常数 k,对任意 L^p 可积的 $\mathbf{B}$ 值鞅 $\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 有

$$\sup_n E\|X_n\|^p\leqslant E\|X_0\|^p+k\sum_{n=0}^{\infty}E\|X_{n+1}-X_n\|^p.$$

证 首先我们证明下面的事实:$\mathbf{B}$ 是 p 光滑的充要条件是存在常数 $k>0$,使得对一切 $x,y\in\mathbf{B}$,有

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|+\|x-y\|)\leqslant\|x\|\left(1+k\frac{\|y\|^p}{\|x\|^p}\right).$$

事实上,对任意 $x,y\in\mathbf{B}$(不妨设 $x,y\neq 0$),由 p 光滑的定义,存在常数 k,使得

$$\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x}{\|x\|}+\tau\frac{y}{\|y\|}\right\|+\left\|\frac{x}{\|x\|}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\tau\frac{y}{\|y\|}\right\|\right)-1\leqslant\rho_{\mathbf{B}}(\tau)\leqslant k\tau^p.$$

令 $\tau=\frac{\|y\|}{\|x\|}$ 得

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|+\|x-y\|)\leqslant\|x\|\left(1+k\frac{\|y\|^p}{\|x\|^p}\right).$$

反之,若存在常数 k,使得对一切 $x,y\in\mathbf{B}$ 有

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|+\|x-y\|)\leqslant\|x\|\left(1+k\frac{\|y\|^p}{\|x\|^p}\right),$$

则对任意 $x,y\in\mathbf{B}$, $\|x\|=1$, $\|y\|=\tau$,总有

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|+\|x-y\|)-1\leqslant k\tau^p(\tau\geqslant 0),$$

从而

$$\rho_{\mathbf{B}}(\tau)\leqslant k\tau^p.$$

即 $\mathbf{B}$ 是 p 光滑的.我们的证明路线是:(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(2)⇒(1).

(1)⇒(2).设 $\mathbf{B}$ 是 p 光滑的,对任意 $x,y\in\mathbf{B}$,若 x 或 $y=0$,则(2)显然成立.故不妨设 $x,y\neq 0$,由上面证明知存在常数 $k>0$,使得

$$\frac{1}{2}[\|x+y\|-(\|x\|+\|y\|)+\|x-y\|-(\|x\|-\|y\|)]\leqslant\|x\|k\frac{\|y\|^p}{\|x\|^p}.$$

若 $\|y\|\leqslant\|x\|$,则 $\|x+y\|\vee\|x-y\|\leqslant 2\|x\|$.利用初等不等式

$$u^p-v^p\leqslant pu^{p-1}(u-v),u,v\geqslant 0,p\geqslant 1,$$

$$\frac{1}{2}(|u+v|^p+|u-v|^p)\leqslant|u|^p+|v|^p,u,v\in R,1\leqslant p\leqslant 2,$$

我们可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)\\&\leqslant\frac{1}{2}[(\|x\|+\|y\|)^p+(\|x\|-\|y\|)^p]\\&\quad+p(2\|x\|)^p\|x\|k\frac{\|y\|^p}{\|x\|^p}\\&\leqslant\|x\|^p+\|y\|^p+2^{p-1}pk\|y\|^p\\&=\|x\|^p+(1+2^{p-1}pk)\|y\|^p.\end{aligned}$$

若 $\|y\|\geqslant\|x\|$,则 $\|x+y\|\vee\|x-y\|\leqslant 2\|y\|$.于是

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)\leqslant\|x\|^p+2^p\|y\|^p.$$

令 $c=2^{p-1}\vee[2+2^ppk]$.则

$$\|x+y\|^p+\|x-y\|^p\leqslant 2\|x\|^p+c\|y\|^p,$$

即(2)成立.

(2)⇒(3). 由条件期望的 Jensen 不等式及(3.3)式得

$$E(\|2X_1-X_2\|^p|\mathscr{F}_1)\geqslant\|2X_1-E(X_2|\mathscr{F}_1)\|^p$$
$$\geqslant\|X_1\|^p.$$

上式两边加 $\|X_2\|^p$ 后,再取关于 $\mathscr{F}_1$ 的条件期望,并利用(2)便得

$$E((\|X_1\|^p+\|X_2\|^p)|\mathscr{F}_1)$$
$$\leqslant E((\|X_1\|^p+\|2X_1-X_2\|^p)|\mathscr{F}_1)$$
$$\leqslant 2E(\|X_1\|^p|\mathscr{F}_1)+cE(\|X_2-X_1)\|^p|\mathscr{F}_1).$$

取 $k=c$ 便得到了(3).

(3)⇒(4). 设$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为 L^p 可积的 **B** 值鞅,则

$$\|2X_n-E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)\|=\|X_n\|,a.e.,n\geqslant 0.$$

这说明(3.3)式成立,于是由(3)得

$$E((\|X_{n+1}\|^p-\|X_n\|^p)|\mathscr{F}_n)\leqslant kE(\|X_{n+1}-X_n\|^p|\mathscr{F}_n),n\geqslant 0.$$

因此

$$E\|X_n\|^p\leqslant E\|X_0\|^p+k\sum_{i=0}^{n}E\|X_{i+1}-X_i\|^p,n\geqslant 0,$$

所以

$$\sup_{n\in N}E\|X_n\|^p\leqslant E\|X_0\|^p+k\sum_{i=0}^{\infty}E\|X_{i+1}-X_i\|^p,$$

即(4)成立.

(4)⇒(2). 对任意 $x,y\in\mathbf{B}$,Bernoulli 变量 ε,令 $X_0=x,X_1=x+\varepsilon y,X_n=X_1,n\geqslant 1,\mathscr{F}_n=\sigma(X_0,X_1,\cdots,X_n),n\geqslant 0$. 则$\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为 L^p 可积的 **B** 值鞅,由(4)得

$$\frac{1}{2}(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p)-\|x\|^p$$
$$=E(\|x+\varepsilon y\|^p-\|x\|^p)$$
$$=E\|X_1\|^p-E\|X_0\|^p$$
$$\leqslant kE\|X_1-X_0\|^p=kE\|\varepsilon y\|^p=k\|y\|^p,$$

即(2)成立.

(2)⇒(1). $\rho_{\mathbf{B}}(\tau)=\sup\{\frac{1}{2}(\|x+y\|+\|x-y\|)-1:$

$x,y\in\mathbf{B},\|x\|=1,\|y\|=\tau\}$

$\leqslant\sup\left\{\left[\frac{1}{2}(\|x+y\|+\|x-y\|)\right]^{p}-1:\right.$

$x,y\in\mathbf{B},\|x\|=1,\|y\|=\tau\}$

$\leqslant\sup\left\{\frac{1}{2}(\|x+y\|^{p}+\|x-y\|^{p})-1:\right.$

$x,y\in\mathbf{B},\|x\|=1,\|y\|=\tau\}$

$\leqslant c\tau^{p}.$

这就证明了 $\mathbf{B}$ 是 p 光滑的,即(1)成立.

注意到 p 光滑空间是自反空间(见[60]),从而具有 RNP. 这样讨论在 p 光滑空间取值的鞅的收敛性要方便得多.

定理 3.4 若 $\mathbf{B}$ 是 p 光滑空间,$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是 L^p 可积的 $\mathbf{B}$ 值鞅,满足 $\sum_{n=0}^{\infty}E\|X_{n-1}-X_n\|^p<\infty$,则存在 L^p 可积的 $\mathbf{B}$ 值随机变量 X_∞,使得

$$X_n\to X_\infty,a.e.(L^p).$$

证 由定理 3.3 得知$\sup_{n\in N}E\|X_n\|^p<\infty$,因 p 光滑空间具有 RNP. 由定理 2.4 和定理 2.5 知存在 $\mathbf{B}$ 值随机变量 X_∞,使得

$$E\|X_\infty\|^p<\infty,$$

且
$$X_n\to X_\infty,a.e.(L^p).$$

定理 3.5 设 $\mathbf{B}$ 是 Banach 空间,$1\leqslant p\leqslant 2$,则下列陈述等价:

(1) $\mathbf{B}$ 同构于一致 p 光滑空间;

(2) 存在常数 $c>0$,使得对任意具有 p 阶矩的鞅 $\{X_n=\sum_{i=1}^{n}D_i,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$,有 $E\|X_n\|^p\leqslant c\sum_{i=1}^{n}E\|D_i\|^p,\forall n\geqslant 1$;

(3) 对任意 L^p 可积的 $\mathbf{B}$ 值鞅 $\{X_n=\sum_{i=1}^{n}D_i,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$,

若$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{E\|X_i - X_{i-1}\|^p}{i^p} < \infty$，则$\frac{X_n}{n} \to 0, a.e.$.

证明参见[61].

下面的定理刻划了$q(2\leqslant q<\infty)$凸空间，证明可参看[62].

定理 3.6 设 **B** 是 Banach 空间，$2\leqslant q<\infty$，则下面各陈述是等价的：

(1) **B** 是 q 凸的，

(2) 存在常数 $c>0$，使得对任意 $x, y \in \mathbf{B}$，有

$$\|x+y\|^q + \|x-y\|^q \geqslant 2\|x\|^q + c\|y\|^q,$$

(3) 存在常数 $k>0$，使得对任意 L^q 可积的 **B** 值鞅 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 有

$$\sup_{n\in N} E\|X_n\|^q \geqslant E\|X_0\|^q + k\sum_{n=0}^{\infty} E\|X_{n+1} - X_n\|^q,$$

(4) 存在常数 $k>0$，若子 σ 代数 $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}$，对任意两个 L^q 可积的 **B** 值随机变量 X_i，X_i 是 $\mathscr{F}_i$ 可测的，$i=1,2$，并且满足

$$\|2X_1 - E(X_2|\mathscr{F}_1)\| \geqslant \|X_1\|, a.e.$$

则

$$E((\|X_2\|^q - \|X_1\|^q)|\mathscr{F}_1) \geqslant kE(\|X_2 - X_2\|^q|\mathscr{F}_1).$$

定理 3.7 设 **B** 是 Banach 空间，则

(1) **B** 是 q 可凸的$(2\leqslant q<\infty)$充要条件是存在常数 $c>0$，使得对任意 L^q 可积的 **B** 值鞅 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n\in N\}$ 有

$$c\sup_{n\in N} E\|X_n\|^q \geqslant E\|X_0\|^q + \sum_{n=0}^{\infty} E\|X_{n+1} - X_n\|^q,$$

(2) **B** 是 p 可光滑的$(1\leqslant p\leqslant 2)$充要条件是存在常数 $c>0$，使得对任意 L^p 可积的 **B** 值鞅 $\{X_n, \mathscr{F}_n, n\in N\}$ 有

$$\sup_{n\in N} E\|X_n\|^p \leqslant c\left[E\|X_0\|^p + \sum_{n=0}^{\infty} E\|X_{n+1} - X_n\|^p\right].$$

这个定理的证明可参见[62].

下面的不等式见[63].

定理 3.8(极大值型不等式)　设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是非负实值下鞅，τ 是任一 $\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 有限停时，若 $\liminf\limits_{n\to\infty}\int_{(\tau>n)}X_n dP=0$，则对任意 $\lambda>0$，有

$$P(\max_{0\leqslant i\leqslant\tau}X_i\geqslant\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda}\int_{\{\max\limits_{0\leqslant i\leqslant\tau}X_i\geqslant\lambda\}}X_\tau dP. \tag{3.4}$$

证　首先 $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant\tau}X_i$ 是实值随机变量，从而 $\{\max\limits_{0\leqslant i\leqslant\tau}X_i\geqslant\lambda\}$ 为可测集. 令

$$A_0=\{X_0\geqslant\lambda\},A_k=\{X_k\geqslant\lambda,X_i<\lambda,0\leqslant i<k\},k\geqslant 1.$$

显然，$A_k\in\mathscr{F}_k,k\geqslant 0$. 由计算易得：

$$\begin{aligned}\int_{\{\max\limits_{0\leqslant i\leqslant\tau}X_i\geqslant\lambda\}}X_\tau dP&=\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\{\max\limits_{0\leqslant i\leqslant m}X_i\geqslant\lambda,\tau=m\}}X_m dP\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\int_{A_k\cap\{\tau=m\}}X_m dP\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty}\int_{A_k\cap\{\tau=m\}}X_m dP,\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}P(\max_{0\leqslant i\leqslant\tau}X_i\geqslant\lambda)&=\sum_{m=0}^{\infty}P(\max_{0\leqslant i\leqslant m}X_i\geqslant\lambda,\tau=m)\\&\leqslant\frac{1}{\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\int_{A_k\cap\{\tau=m\}}X_k dP\\&=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=k}^{\infty}\int_{A_k\cap\{\tau=m\}}X_k dP\\&=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_k\cap\{\tau\geqslant k\}}X_k dP.\end{aligned} \tag{3.6}$$

由于 $A_k\cap\{\tau>m\}\in\mathscr{F}_m,\forall\, m\geqslant k$，由下鞅性有

$$\int_{A_k\cap\{\tau\geqslant k\}}X_k dP=\int_{A_k\cap\{\tau=k\}}X_k dP+\int_{A_k\cap\{\tau>k\}}X_k dP$$

$$\leqslant \int_{A_k \cap \{\tau = k\}} X_k dP + \int_{A_k \cap \{\tau > k\}} X_{k+1} dP$$

$$\leqslant \int_{A_k \cap \{\tau = k\}} X_k dP + \int_{A_k \cap \{\tau = k+1\}} X_{k+1} dP + \int_{A_k \cap \{\tau \geqslant k+2\}} X_{k+2} dP$$

$$\vdots$$

$$\leqslant \sum_{m=k}^{n} \int_{A_k \cap \{\tau = m\}} X_m dP + \int_{A_k \cap \{\tau > n\}} X_n dP, \forall\, n \geqslant k.$$

由定理假设有

$$\liminf_{n \to \infty} \int_{A_k \cap \{\tau > n\}} X_n dP \leqslant \liminf_{n \to \infty} \int_{\{\tau > n\}} X_n dP = 0.$$

故

$$\int_{A_k \cap \{\tau \geqslant k\}} X_k dP \leqslant \sum_{m=k}^{\infty} \int_{A_k \cap \{\tau = m\}} X_m dP. \qquad (3.7)$$

由(3.5),(3.6)及(3.7)式立即知(3.4)式成立.

推论 3.9 设 $\mathbf{B}$ 是 Banach 空间,$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是 $\mathbf{B}$ 值鞅,τ 是任一$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$有限停时,若$\liminf\limits_{n \to \infty} \int_{\{\tau > n\}} \|X_n\| dP = 0$,则对任意 $\lambda > 0$,有

$$P(\max_{0 \leqslant i \leqslant \tau} \|X_i\| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{\{\max\limits_{0 \leqslant i \leqslant \tau} \|X_i\| \geqslant \lambda\}} \|X_\tau\| dP. \qquad (3.8)$$

证 注意到 $\|X\| = \{\|X_n\|, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是非负实值下鞅,再用定理 3.8 立即知推论 3.9 成立.

注 3.10 (1) 对任意$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$有界停时 τ,条件 $\liminf\limits_{n \to \infty} \int_{\{\tau > n\}} \|X_n\| dP = 0$ 自然成立.故对 $\mathbf{B}$ 值鞅 X 及任一$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$有界停时 τ,(3.8)式成立.

(2) 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是一致可积的 $\mathbf{B}$ 值鞅,对任意$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$有限停时 τ,条件$\liminf\limits_{n \to \infty} \int_{\{\tau > n\}} \|X_n\| dP = 0$ 亦成立,故此

时(3.8)式亦成立.

(3) 设 B 值鞅 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 及任一$\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 有限停时 τ 满足条件:存在常数 $c>0$,使得对一切 $n\in N$,有 $E\|X_n\|^2\leqslant cn$,且 $E\tau<\infty$,则(3.8)式成立.这是因为由 Cauchy-Schwartz 不等式有

$$\int_{\{\tau>n\}}\|X_n\|dP\leqslant[E\|X_n\|^2P(\tau>n)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant[cnP(\tau>n)]^{\frac{1}{2}}\to 0\ (n\to\infty).$$

(4) 设 B 值鞅 $X=\{X_n=\sum_{i=0}^{n}D_i,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 及任意$\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 有限停时 τ 满足条件:$E\left(\sum_{i=0}^{\tau}\|D_i\|\right)<\infty$,则(3.8)式成立.这是因为

$$\int_{\{\tau>n\}}\|X_n\|dP\leqslant E\left(\sum_{i=0}^{n}\|D_i\|\right)I_{\{\tau>n\}}$$

$$\leqslant E\left(\sum_{i=0}^{\tau}\|D_i\|\right)I_{\{\tau>n\}}\to 0\ (n\to\infty).$$

由(4)知[64]的引理 2.1 是上述推论 3.9 的特殊情形.

推论 3.11(Kolmogorov 型不等式) 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是平方可积的 B 值鞅,τ 是任一$\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 有限停时,若 $\liminf_{n\to\infty}\int_{\{\tau>n\}}\|X_n\|^2dP=0$,则

$$\lambda^2P(\max_{0\leqslant i\leqslant\tau}\|X_i\|\geqslant\lambda)\leqslant E\|X_\tau\|^2(\lambda>0).\tag{3.9}$$

定理 3.12(Doob 型不等式) 设 B 是 Banach 空间,$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为 B 值鞅,τ 是任一$\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 有限停时,

(1) 若 $\liminf_{n\to\infty}\int_{\{\tau>n\}}\|X_n\|\log^+\|X_n\|dP=0$,则

$$E(\max_{0\leqslant i\leqslant\tau}\|X_i\|)\leqslant\frac{e}{e-1}(1+E\|X_\tau\|\log^+\|X_\tau\|);\tag{3.10}$$

(2) 若$\liminf\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\{\tau>n\}}\|X_n\|^p dP=0(p>1)$，则

$$E(\max_{0\leqslant i\leqslant\tau}\|X_i\|)^p\leqslant c_p E\|X_\tau\|^p(p>1), \tag{3.11}$$

其中常数 c_p 仅与 p 有关.

证　令 $\tau_n=\tau\wedge n,(n\geqslant 0)$，则 $\{\tau_n,n\geqslant 0\}$ 为 $\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 有界停时列，且 $\tau_n\uparrow\tau$. 再令 $Y_n=X_{\tau_n},\mathscr{F}'_n=\mathscr{F}_{\tau_n},n\in N$，由定理 1.2 知 $\{Y_n,\mathscr{F}'_n,n\in N\}$ 为 B 值鞅. $\{\|Y_n\|,\mathscr{F}'_n,n\in N\}$ 为非负实值下鞅. 仿第二章的定理 1.5 的证明可得

$$E(\max_{0\leqslant i\leqslant n}\|Y_i\|)\leqslant\frac{e}{e-1}(1+E\|Y_n\|\log^+\|Y_n\|),n\geqslant 0, \tag{3.12}$$

及

$$E(\max_{0\leqslant i\leqslant n}\|Y_i\|)^p\leqslant q^p E\|Y_n\|^p,n\geqslant 0 \tag{3.13}$$

其中 $p>1,q>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 不妨设 $E\|X_\tau\|\log^+\|X_\tau\|<\infty$ 及 $E\|X_\tau\|^p<\infty$ 分别成立. 否则(3.10)与(3.11)自然成立. 由于 $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\|Y_i\|\uparrow$，$\max\limits_{0\leqslant i\leqslant\infty}\|X_{\tau\wedge i}\|=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant\tau}\|X_i\|$，在(3.12)式中令 $n\to\infty$ 两边取极限，由单调收敛定理及题设条件有

$$\begin{aligned}
E(\max_{0\leqslant i\leqslant\tau}\|X_i\|)&=E(\max_{0\leqslant i<\infty}\|X_{\tau\wedge i}\|)\\
&=\lim_{n\to\infty}E(\max_{0\leqslant i\leqslant n}\|Y_i\|)\\
&=\frac{e}{e-1}\lim_{n\to\infty}(1+E\|X_{\tau\wedge n}\|\log^-\|X_{\tau\wedge n}\|)\\
&=\frac{e}{e-1}\lim_{n\to\infty}\Big(1+\int\limits_{\{\tau\leqslant n\}}\|X_\tau\|\log^-\|X_\tau\|dP\\
&\qquad+\int\limits_{\{\tau>n\}}\|X_n\|\log^+\|X_n\|dP\Big)\\
&=\frac{e}{e-1}(1+E\|X_\tau\|\log^-\|X_\tau\|),
\end{aligned}$$

即(3.10)式成立.

在(3.13)式中令 $n\to\infty$ 两边取极限，由单调收敛定理及题设

条件得

$$\begin{aligned}
E(\max_{0\leqslant i\leqslant \tau}\|X_i\|)^p &= E(\max_{0\leqslant i<\infty}\|X_{\tau\wedge i}\|)^p \\
&= \lim_{n\to\infty}E(\max_{0\leqslant i\leqslant n}\|Y_i\|)^p \\
&\leqslant q^p \lim_{n\to\infty}E\|Y_n\|^p \\
&\leqslant q^p \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\{\tau\leqslant n\}}\|X_\tau\|^p dP + \int_{\{\tau> n\}}\|X_n\|^p dP\right) \\
&= q^p E\|X_\tau\|^p, (\text{其中 } p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)
\end{aligned}$$

令 $c_p = q^p$，即(3.11)式成立. 这就证明了定理.

定理 3.13 设 $\mathbf{B}$ 为 Banach 空间，$1\leqslant p\leqslant 2$，则下面两陈述等价：

(1) $\mathbf{B}$ 同构于一致 p 光滑空间；

(2) 存在常数 $c>0$，使得对任意具有有限 p 阶矩的鞅 $X=\{X_n=\sum_{i=1}^{n}D_i, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$ 及任意 $\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$ 有限停时 τ，有

$$E\|X_\tau\|^p \leqslant cE(\sum_{i=1}^{\tau}\|D_i\|^p). \tag{3.14}$$

证 (2)⇒(1). 由(2)知：存在常数 $c>0$，对任意具有有限 p 阶矩的 $X=\{X_n=\sum_{i=1}^{n}D_i, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$ 及任意自然数 $n\geqslant 1$，由于 n 是 $\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$ 有限停时，故有

$$E\|X_n\|^p \leqslant cE\left(\sum_{i=1}^{n}\|D_i\|^p\right) = c\sum_{i=1}^{n}E\|D_i\|^p, n\geqslant 1.$$

由定理 3.5 知 $\mathbf{B}$ 同构于一致 p 光滑空间.

(1)⇒(2). 不妨设 $E\left(\sum_{i=1}^{\tau}\|D_i\|^p\right)<\infty$. 令 $\tau_n=\tau\wedge n, n\geqslant 1$，则 $\{\tau_n, n\geqslant 1\}$ 为 $\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$ 有界停时列. 再令 $Y_n = X_{\tau_n}, \mathscr{F}'_n = \mathscr{F}_{\tau_n}$，$n\geqslant 1$，于是 $\{Y_n, \mathscr{F}'_n, n\geqslant 1\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值鞅，由定理 3.5 知：存在常数 $c>0$（仅与 p 有关的常数）使得对任意 $n\geqslant 1$，有

$$E\|X_{\tau_n}\|^p = E\|Y_n\|^p$$

$$\leqslant c\sum_{j=1}^{n}E\|Y_j - Y_{j-1}\|^p \quad (Y_0 = 0)$$

$$= cE\Big(\sum_{j=1}^{\tau\wedge n}\|D_j\|^p\Big).$$

在上式中令 $n\to\infty$，由 Fatou 引理及控制收敛定理得

$$E\|X_\tau\|^p \leqslant cE\Big(\sum_{j=1}^{\tau}\|D_i\|^p\Big).$$

这就证明了定理.

定理 3.14 设 $\mathbf{B}$ 为 Banach 空间，$2\leqslant q<\infty$，则下面两陈述等价：

(1) $\mathbf{B}$ 同构于一致 q 凸空间；

(2) 存在常数 $c>0$，使对任意具有 q 阶矩的 $\mathbf{B}$ 值鞅 $X=\{X_n=\sum_{i=1}^{n}D_i,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 及任意 $\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 有限停时 τ，若

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\{\tau>n\}}\|X_n\|^q dP = 0, \tag{3.15}$$

则有

$$cE\Big(\sum_{i=1}^{\tau}\|D_i\|^q\Big)\leqslant E\|X_\tau\|^q. \tag{3.16}$$

证(2)⇒(1). 对任意具有 q 阶矩的 $\mathbf{B}$ 值鞅 $X=\{X_n=\sum_{i=1}^{n}D_i,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$，由于任意自然数 m 是 $\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 有限停时，且条件 (3.15) 显然满足. 因此有

$$cE\Big(\sum_{i=1}^{m}\|D_i\|^q\Big)\leqslant E\|X_m\|^q,\forall\, m\geqslant 1.$$

从而对任意具有 q 阶矩的 $\mathbf{B}$ 值鞅 $X=\{X_n=\sum_{i=1}^{n}D_i,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 有

$$c\sum_{n=1}^{\infty}E\|D_i\|^q\leqslant \sup_n E\|X_n\|^q.$$

再由 Pisier 的定理(见[65]的定理 3.1) 知：$\mathbf{B}$ 必同构于一致 q 凸空间.

(1)⇒(2). 先设 $\mathbf{B}$ 为一致 q 凸空间. 令 $\tau_n = \tau \wedge n, n \geqslant 1$, 我们证明存在常数 $c > 0$, 使对任意 $n \geqslant 1$, 有

$$cE\Big(\sum_{i=1}^{\tau_n} \|D_i\|^q\Big) \leqslant E\|X_{\tau_n}\|^q. \tag{3.17}$$

事实上, 令 $Y_n = X_{\tau_n}, \mathscr{F}'_n = \mathscr{F}_{\tau_n}, n \geqslant 1$, 则 $\{Y_n, \mathscr{F}'_n, n \geqslant 1\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值鞅, 对任意 $n \geqslant 1$, Y_n 是 $\mathscr{F}'_n$ 可测的, $\mathscr{F}'_n \subset \mathscr{F}'_{n+1}$ 且

$$\|2Y_n - E(Y_{n-1} | \mathscr{F}'_n)\| = \|Y_n\|.$$

由定理 3.6 知: 存在常数 $c > 0$, 使得

$$E((\|Y_{n-1}\|^q - \|Y_n\|^q) | \mathscr{F}'_n) \geqslant cE(\|Y_{n-1} - Y_n\|^q | \mathscr{F}'_n), n \geqslant 1.$$

对上式两边取期望得

$$E\|Y_{n-1}\|^q - E\|Y_n\|^q \geqslant cE\|Y_{n-1} - Y_n\|^q, n \geqslant 1.$$

不妨设 $0 < c \leqslant 1$, 否则取小于等于 1 的正常数 c' 代替 c 即可. 由上式得

$$\begin{aligned}
E\|X_{\tau\wedge n}\|^q &= E\|Y_n\|^q \\
&\geqslant c\sum_{i=1}^{n-1} E\|Y_{i-1} - Y_i\|^q + E\|Y_1\|^q \\
&\geqslant c\sum_{i=1}^{n} E\|Y_i - Y_{i-1}\|^q \quad (Y_0 = 0) \\
&= cE\sum_{i=1}^{n} \|Y_i - Y_{i-1}\|^q \\
&= cE\sum_{i=1}^{\tau\wedge n} \|D_i\|^q.
\end{aligned}$$

不妨设 $E\|X_\tau\|^q < \infty$. 利用单调收敛定理及题设条件, 在上式中令 $n \to \infty$, 有

$$E\|X_\tau\|^q \geqslant cE\sum_{i=1}^{\tau} \|D_i\|^q.$$

若 $\mathbf{B}$ 同构于一致 q 凸空间, 则 $\mathbf{B}$ 有等价范数使上式成立, 必要时改变 c 的值, 上式对原范 数仍成立, 这就证明了定理.

定理 3.15 设 $\mathbf{B}$ 是 Banach 空间, 则下面两陈述等价:

(1) $\mathbf{B}$ 同构于 Hilbert 空间;

(2) 存在常数$c_1>0, c_2>0$,对任意具有2阶矩的B值鞅$X=\{X_n=\sum_{i=1}^{n}D_i, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$及任意$\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$有限停时$\tau$,满足条件

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{\{\tau>n\}}\|X_n\|^2 dP=0, \tag{3.18}$$

则有

$$c_1 E\left(\sum_{i=1}^{\tau}\|D_i\|^2\right)\leqslant E\|X_\tau\|^2\leqslant c_2 E\left(\sum_{i=1}^{\tau}\|D_i\|^2\right). \tag{3.19}$$

证　由Kwapien的定理(见[66])知:B同构于Hilbert空间当且仅当B同时同构于一致2光滑空间和一致2凸空间. 于是(1)⇒(2)由定理3.13与定理3.14立即得出. (2)⇒(1). 由定理3.14立即知B同构于一致2凸空间. 下面证B同时同构于一致2光滑空间. 事实上,因任意自然数m是$\{\mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$有界停时,显然满足条件(3.18)式,故由(2)知:存在常数$c_2>0$,使对任意具有2阶矩的B值鞅$X=\{X_n=\sum_{i=1}^{n}D_i, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$,有

$$E\|X_m\|^2\leqslant c_2\sum_{i=1}^{m}\|D_i\|^2, \ \forall\, m\geqslant 1.$$

由定理3.5知:B同构于一致2光滑空间. 这样,B同构于Hilbert空间. 定理得证.

有关凸Φ函数不等式与B空间的q凸性及p光滑性的关系,Hilbert空间的刻划可参见[67]等文献.

§4　有界平均振动鞅

F. John和L. Nirenberg[68]于1961年从函数论的角度提出了有界平均振动函数的概念(functions of bounded mean oscillation,简记为BMO),1974年C. Herz[69]将这一概念移植到B值鞅中,从而把经典分析与鞅论有机联系起来,形成了一个新的

研究方向——BMO 鞅. 至今这一方向的研究仍极为活跃, 如[70],[71],[72] 等. 国内龙瑞麟教授的专著[73] 以相当的篇幅论述了实值 BMO 鞅. 本节我们介绍 **B** 值 BMO 鞅.

令 $\exp L = \{X; X \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P; R)$ 且存在 $\alpha > 0$, 使 $\int_\Omega e^{\alpha|X|} dP < \infty\}$.

定义 4.1 设 **B** 是任一 Banach 空间, $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geq 1\}$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的 **B** 值鞅, 称 X 是 BMO_α 鞅(或 BMO_α^- 鞅)($\alpha \geq 1$), 如果

$$\sup_{1 \leq n \leq m < \infty} \|E(\|X_m - X_{n-1}\|^\alpha | \mathscr{F}_n)\|_\infty < \infty (X_0 = 0) \tag{4.1}$$

或

$$\sup_{1 \leq n \leq m < \infty} \|E(\|X_m - X_n\|^\alpha | \mathscr{F}_n)\|_\infty < \infty. \tag{4.2}$$

BMO_α 鞅全体记为 $\mathrm{BMO}_\alpha\mathrm{M}$, BMO_α^- 鞅全体记为 $\mathrm{BMO}_\alpha^-\mathrm{M}$. 若 X 是 BMO_α 鞅, 则记为 $X \in \mathrm{BMO}_\alpha\mathrm{M}$. 若 X 是 BMO_α^- 鞅, 则记为 $X \in \mathrm{BMO}_\alpha^-\mathrm{M}$. 当 $\alpha = 1$ 时, 简记为 $X \in \mathrm{BMOM}$(或 $X \in \mathrm{BMO}^-\mathrm{M}$), 并简称相应的 **B** 值鞅为 BMO 鞅(或 BMO^- 鞅).

令 $\|X\|_{\mathrm{BMO}_\alpha M} = \sup\limits_{1 \leq n \leq m < \infty} \|E(\|X_m - X_{n-1}\|^\alpha | \mathscr{F}_n)\|_\infty^{1/\alpha}$,

$\|X\|_{\mathrm{BMO}_\alpha^- M} = \sup\limits_{1 \leq n \leq m < \infty} \|E(\|X_m - X_n\|^\alpha | \mathscr{F}_n)\|_\infty^{1/\alpha}$.

例 4.1 设 $\{r_1, r_2, \cdots\}$ 是概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上一列相互独立的随机变量且 $P(r_k = \pm 1) = \dfrac{1}{2}$, $(k \geq 1)$. 令 $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{r_k}{k}$, $\mathscr{F}_n = \sigma(r_1, r_2, \cdots, r_n)$, $n \geq 1$, 则 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geq 1\}$ 为鞅. 又因为

$$\begin{aligned} E(|X_m - X_{n-1}| | \mathscr{F}_n) &\leq E\left(\left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{r_k}{k}\right| \Big| \mathscr{F}_n\right) \\ &\quad + E\left(\left|\frac{r_n}{n}\right| \Big| \mathscr{F}_n\right) \\ &\leq \left(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

所以 $X \in \mathrm{BMOM}$.

例 4.2 设 $\{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上一个相互独立服从标

准正态分布的随机变量序列，令 $\mathscr{F}_n = \sigma(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{k}$，$n = 1, 2, \cdots$，因为

$$E(|X_m - X_n| | \mathscr{F}_n) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

所以 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\} \in \mathrm{BMO}^- \mathrm{M}$. 但是，我们由下面的定理 4.4 可看出 $X \overline{\in} \mathrm{BMOM}$.

定理 4.3 设 **B** 是 Banach 空间，$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 **B** 值鞅，满足：$X_n \to X_\infty$，$a.e.$，且对每一 $n \geqslant 1$，$\{X_m, m \geqslant 1\}$ 关于 $\mathscr{F}_n$ 条件一致可积，则 $X \in \mathrm{BMOM}$ 的充要条件是存在正数 β，使得

$$\sup_{1 \leqslant n < \infty} E(\|X_\infty - X_{n-1}\| | \mathscr{F}_n) \leqslant \beta, a.e. \tag{4.3}$$

证 必要性、若 $X \in \mathrm{BMOM}$，则由 (4.1) 式存在正数 β，使对任意固定的 $n \geqslant 1$，任意 $m \geqslant n$，有

$$E(\|X_m - X_{n-1}\| | \mathscr{F}_n) \leqslant \beta, a.e.,$$

且 $\{\|X_m - X_{n-1}\|\}$ 关于 $\mathscr{F}_n$ 条件一致可积，这样，在上式中令 $m \to \infty$ 得

$$E(\|X_\infty - X_{n-1}\| | \mathscr{F}_n) \leqslant \beta, a.e., \forall n \geqslant 1.$$

从而 $\sup_{1 \leqslant n < \infty} E(\|X_\infty - X_{n-1}\| | \mathscr{F}_n) \leqslant \beta, a.e.$，

即 (4.3) 式成立.

充分性. 设 (4.3) 式成立. 则对任意 $n \geqslant 1$，任意 $m \geqslant n$，有

$$\begin{aligned} E(\|X_m - X_{n-1}\| | \mathscr{F}_n) &\leqslant E(\|X_\infty - X_m\| | \mathscr{F}_n) + E(\|X_\infty \\ &\quad - X_{n-1}\| | \mathscr{F}_n) \\ &\leqslant E(E(\|X_\infty - X_m\| | \mathscr{F}_{m-1}) | \mathscr{F}_n) \\ &\quad + \beta \\ &\leqslant 2\beta, a.e., \end{aligned}$$

从而 $\sup_{1 \leqslant n \leqslant m < \infty} \|E(\|X_m - X_{n-1}\| | \mathscr{F}_n)\|_\infty \leqslant 2\beta < \infty$，即 $X \in \mathrm{BMOM}$.

定理 4.4 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的 **B** 值

鞅，令$\{D_1, D_2, \cdots\}$是X的鞅差序列，$D^* = \sup_{n\geq 1}\|D_n\|$，则

$$X \in \text{BMO}^- \text{M 且 } D^* \text{ 有界} \Longleftrightarrow X \in \text{BMOM}.$$

证 设$X \in \text{BMO}^-\text{M}$，且$D^*$界于$C$，则

$$E(\|X_m - X_{n-1}\| \mid \mathscr{F}_n) \leqslant E(\|X_m - X_n\| \mid \mathscr{F}_n) + E(\|D_n\| \mid \mathscr{F}_n)$$

$$\leqslant \|X\|_{\text{BMO}^-\text{M}} + C, \forall\ 1 \leqslant n \leqslant m < \infty.$$

从而$\sup_{1\leqslant n\leqslant m<\infty}\|E(\|X_m - X_n\| \mid \mathscr{F}_n)\|_\infty < \infty$，所以$X \in \text{BMOM}$. 若$X \in \text{BMOM}$，显然有$X \in \text{BMO}^-\text{M}$，而且

$$\|D_n\| = \|X_n - X_{n-1}\| = E(\|X_n - X_{n-1}\| \mid \mathscr{F}_n) \leqslant \|X\|_{\text{BMOM}},$$

此即$D^* = \sup_{n\geq 1}\|D_n\| \leqslant \|X\|_{\text{BMOM}} < \infty$.

定理 4.5 设$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$是$\mathbf{B}$值鞅，则$X \in \text{BMOM} \Rightarrow X^* = \sup_{n\geq 1}\|X_n\| \in \exp L \Rightarrow \|X\|_p = \sup_{n\geq 1}\|X_n\|_p < \infty\ (0 < p < \infty)$.

推论 4.6 $1 \leqslant a < \infty$，恒有$\text{BMO}_a\text{M} = \text{BMOM}$.

我们将在第六章第5节证明比定理4.5、推论4.6更广泛的结果，故这里略去证明.

§5 鞅变换与UMD空间

本节我们采用下面一些记号. 令$M(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B})$为概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的取值于Banach空间$\mathbf{B}$的全体鞅序列$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$.

定义 5.1 设$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\} \in M(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B})$，$V = \{V_n, n \geqslant 1\}$为$\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$实值可予报序列（$\mathscr{F}_0$是含于$\mathscr{F}_1$的一个$\sigma$代数，通常取$\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$），令$D_1 = X_1, D_n = X_n - X_{n-1}$，$(n \geqslant 2)$，即$\{D_n, n \geqslant 1\}$是$X$的鞅差序列，再令$Y_n = \sum_{i=1}^{n} V_i D_i\ (n \geqslant 1)$，则称$Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$为$X$关于$V$的鞅变换，记作$Y = X * V$. 记

$$D_n^* = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \|D_i\|, \qquad D^* = \sup_{n \geqslant 1} \|D_n\|,$$

$$V_n^* = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |V_i|, \qquad V^* = \sup_{n \geqslant 1} |V_n|,$$

$$X_n^* = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \|X_i\|, \qquad X^* = \sup_{n \geqslant 1} \|X_n\|,$$

$$Y_n^* = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \|Y_i\|, \qquad Y^* = \sup_{n \geqslant 1} \|Y_n\|,$$

$$\|X\|_p^p = \sup_{n \geqslant 1} \|X_n\|_p^p = \sup_{n \geqslant 1} E\|X_n\|^p,$$

$$\|Y\|_p^p = \sup_{n \geqslant 1} \|Y_n\|_p^p = \sup_{n \geqslant 1} E\|Y_n\|^p,$$

$$V(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B}) = \{(X, V, Y): X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$$
$$\in M(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B}), V \text{ 是}\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}\text{可预报序列},$$
$$V^* \leqslant 1, Y = X * V\},$$

$$V(\mathbf{B}) = \bigcup_{\text{一切}(\Omega, \mathscr{F}, P)} V(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B}),$$

$U(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B}) = \{(X, V, Y): (X, V, Y) \in V(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B}), V_i = -1\text{或}1, i \geqslant 1\}$,

$$U(\mathbf{B}) = \bigcup_{\text{一切}(\Omega, \mathscr{F}, P)} U(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B}).$$

定理 5.1 对任何$(X, V, Y) \in V(\Omega, \mathscr{F}, P; R)$，任何$1 < p < \infty$，有

(1) $\|X\|_1 = \sup_{n \geqslant 1} E\|X_n\| < \infty \Rightarrow \lim_{n \to \infty} Y_n = Y_\infty, a.e.$,

(2) $\lambda P(Y^* > \lambda) \leqslant c\|X\|_1$, $(\lambda > 0)$，其中 c 为常数，

(3) $\|Y\|_p \leqslant c_p \|X\|_p$，其中 c_p 是仅与 p 有关的常数.

由第二章的定理5.8(2)立即知(1)成立. (2)与(3)的证明见[75]. 也可由(1)及下面的定理5.2知(2)与(3)成立.

现在问：对一般的 Banach 空间 $\mathbf{B}$，上述定理5.1中的三结论是否一定成立呢？回答是未必. 因为若取 $V_n \equiv 1, n \geqslant 1$，此时 $Y_n = X_n$, $n \geqslant 1$, $Y^* = X^*$. 我们知道此时定理5.1中的第一个结论成立的充要条件是 $\mathbf{B}$ 具有 RNP. 而第二个结论对任意 Banach 空间 $\mathbf{B}$ 皆成立.

定理 5.2 设$1 < p < \infty$，对任何给定的 Banach 空间 $\mathbf{B}$，下列命题等价：

(1) $(X,V,Y)\in V(\mathbf{B}),\|X\|_1<\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}Y_n=Y_\infty, a.e.$；

(2) 存在正实数 $c=c(\mathbf{B})$，使

$$(X,V,Y)\in V(\mathbf{B})\Rightarrow\lambda P(Y^*>\lambda)\leqslant c\|X\|_1,(\lambda>0);$$

(3) 存在正实数 $c_p=c_p(\mathbf{B})$，使

$$(X,V,Y)\in V(\mathbf{B})\Rightarrow\|Y\|_p\leqslant c_p\|X\|_p;$$

(4) 存在正实数 $c=c(\mathbf{B})$，使

$$(X,V,Y)\in V(\mathbf{B}),Y^*>1\ a.e.\Rightarrow\|X\|_1\geqslant c.$$

证　首先注意在证明过程中所涉及到的鞅，不失普遍性，我们总可假定它是从原点出发的，即 $X_1=D_1=0$. 我们的证明路线是：(1)⇒(4)⇒(2)⇒(3)⇒(1).

(1)⇒(4). 反设(4)不成立，则对每一正整数 j，存在从 O 点出发的鞅 $X_j=\{X_{j1},X_{j2},\cdots\}$ 及相应的可预报序列 V_j，鞅变换序列 Y_j 及上升的子 σ 代数序列 $\mathscr{F}_{j0}\subset\mathscr{F}_{j1}\subset\mathscr{F}_{j2}\subset\cdots$ 使得

$$Y_j^*>1\ a.e.,\text{但}\|X_j\|\leqslant 2^{-j}.$$

不妨假定对一切 $j\geqslant 1$，相应的概率空间均相同且 σ 代数序列 $\mathscr{F}_{1\infty},\mathscr{F}_{2\infty},\cdots$ 是独立的，其中 $\mathscr{F}_{j\infty}=\sigma(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_{jn})$. 于是存在正整数 n_j 使得

$$A_j=\bigcup_{n=1}^{n_j}\{\|Y_{jn}\|>1\}$$

的概率大于$\frac{1}{2}$，即 $P(A_j)>\frac{1}{2}$

令 $\mathscr{F}_0=\mathscr{F}_{10},\cdots,\mathscr{F}_{n_1-1}=\mathscr{F}_{1,n_1-1}$，

$\mathscr{F}_{n_1}=\mathscr{F}_{1n_1}\vee\mathscr{F}_{20},\mathscr{F}_{n_1+1}=\mathscr{F}_{1n_1}\vee\mathscr{F}_{21},\cdots,$

$\mathscr{F}_{n_1+n_2-1}=\mathscr{F}_{1n_1}\vee\mathscr{F}_{2,n_2-1}$，

$\mathscr{F}_{n_1+n_2}=\mathscr{F}_{1n_1}\vee\mathscr{F}_{2n_2}\vee\mathscr{F}_{30},\cdots$

则关于这个上升的子 σ 代数序列

$$D=\{D_{11},\cdots,D_{1n_1},D_{21},\cdots,D_{2n_2},\cdots\}$$

是鞅差序列，而

$$V=\{V_{11},\cdots,V_{1n_1},V_{21},\cdots,V_{2n_2},\cdots\}$$

是可预报序列，设以 D 为差序列的鞅记为 F，F 关于 V 的变换记为 G，则有

$$F_{n_1,\cdots,n_k}=\sum_{j=1}^{k}X_{jn_j},$$

于是

$$\|F\|_1\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\|X_{jn_j}\|_1\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}2^{-j}=1.$$

由 Borel-Cantelli 引理及 $\{A_n\}$ 的独立性得

$$\begin{aligned}P(G\text{ 发散})&\geqslant P(\limsup_{m,n\to\infty}\|G_n-G_m\|>1)\\&\geqslant P(\limsup_{j\to\infty}A_j)\\&=1.\end{aligned}$$

这与(1)相矛盾．故(4)成立．

(4)⇒(2)．若 $(X,V,Y)\in V(\mathbf{B})$，不妨设 X 从0点出发，即 $X_1=0$，我们证明总成立

$$cP(Y_n^*>2)\leqslant\|X\|_1,\quad n\geqslant1,\tag{5.1}$$

其中 c 是使(4)成立的最优常数，记为 $c=c(4)$，则由(5.1)式取极限及变换尺度立即推知(2)成立．

事实上，对任意 $\lambda>0$，若 $X=\{X_n\}$ 为鞅，则 $\frac{2}{\lambda}X=\{\frac{2}{\lambda}X_n\}$ 仍为鞅，$\frac{2}{\lambda}X$ 关于 V 的变换为 $\frac{2}{\lambda}Y=\{\frac{2}{\lambda}Y_n=\sum_{i=1}^{n}V_i\times\frac{2}{\lambda}D_i\}$，则由(5.1)式有

$$c(4)P\left(\left(\frac{2}{\lambda}Y_n\right)^*>2\right)\leqslant\|\frac{2}{\lambda}X\|_1,n\geqslant1$$

令 $n\to\infty$ 得

$$P(Y^*>\lambda)\leqslant\frac{2}{c(4)\lambda}\|X\|_1$$

取 $c(2)\geqslant\frac{2}{c(4)}$ 即知(2)成立．下面证(5.1)式成立，不妨设(5.1)式左边的概率为正．对每一正整数 j，设 $Y_j=\{Y_{j1},Y_{j2},\cdots\}$ 是鞅 $X_j=\{X_{j1},X_{j2},\cdots\}$ 关于可预报序列 $V_j=\{V_{j1},V_{j2},\cdots\}$ 的变换，且 $(X_j,$

V_j, Y_j)与(X, V, Y)有相同的分布，类似于前面可假定对一切 $j\geqslant 1$，相应的概率空间均相同及 σ 代数序列$\{\mathscr{F}_{jn}, j\geqslant 1\}$是独立的，令

$$D=\{D_{11},\cdots,D_{1n},u_1D_{21},\cdots,u_1D_{2n},u_1u_2D_{31},\cdots\}$$

$$V=\{V_{11},\cdots,V_{1n},V_{21},\cdots V_{2n},V_{31},\cdots\}$$

其中 u_j 是集合$\{Y_{jn}^*\leqslant 2\}$的示性函数，相应的上升子 σ 代数序列同上，只是取 $n_j=n$，即

$$\mathscr{F}_0=\mathscr{F}_{10},\cdots,\mathscr{F}_{n-1}=\mathscr{F}_{1,n-1},$$

$$\mathscr{F}_n=\mathscr{F}_{1n}\vee\mathscr{F}_{20},\mathscr{F}_{n+1}=\mathscr{F}_{1n}\vee\mathscr{F}_{21},\cdots,$$

$$\mathscr{F}_{2n-1}=\mathscr{F}_{1n}\vee\mathscr{F}_{2,n-1},\mathscr{F}_{2n}=\mathscr{F}_{1n}\vee\mathscr{F}_{2n}\vee\mathscr{F}_{30},\cdots.$$

以 D 为差序列的鞅记为 F，F 关于 V 的变换记为 G，则有

$$F_{kn}=X_{1n}+u_1X_{2n}+\cdots+u_1u_2\cdots u_{k-1}X_{kn}.$$

于是

$$\begin{aligned}\|F\|_1&\leqslant\|X\|_1E(1+u_1+u_1u_2\cdots)\\&=\|X\|_1/P(Y_n^*>2)\end{aligned}$$

及 $G^*>1$，$a.e.$ 由(4)得 $c\leqslant\|F\|_1$，因此(5.1)式成立，从而(2)成立.

(2)⇒(3). 首先我们证明：若 $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$是单调不减的连续凸函数，$\Phi(0)=0$，满足增长条件

$$\Phi(2\lambda)\leqslant c\Phi(\lambda),\ \lambda>0,\tag{5.2}$$

令 $\Phi(\infty)=\infty$，则对任意$(X,V,Y)\in V(\mathbf{B})$，有

$$E\Phi(Y^*)\leqslant cE\Phi(X^*),\tag{5.3}$$

其中 c 仅依赖于 $c(2)$与(5.2)式中的常数 $c(5.2)$. 特别取 $\Phi(\lambda)=\lambda^p$ 时，由(5.3)立即知(3)成立. 下面证(5.3)式成立.

不妨设 X 从0点出发，其差序列$\{D_k\}$被非负实值可预报序列$\{W_k\}$控制，即$\|D_k\|\leqslant W_k$ 且 W_k 是 $\mathscr{F}_{k-1}$可测的($k\geqslant 1$). 令 $\delta>0$，$\beta>\delta+1$，$\forall\ \lambda>0$，令

$$\mu=\inf\{n:\|Y_n\|>\lambda\},$$

$$\nu=\inf\{n:\|Y_n\|>\beta\lambda\},$$

$$\sigma=\inf\{n:\|X_n\|>\delta\lambda\text{ 或 }W_{n+1}>\delta\lambda\},$$

$$u_k=I_{\{\mu<k\leqslant\nu\wedge\sigma\}},\ k\geqslant 1.$$

约定 $\inf\varnothing=\infty$，则 μ,ν,δ 均为停时，且 $u=\{u_k,\mathscr{F}_k,k\geqslant1\}$ 为实值可预报序列，X 关于 u 的变换记为 F，则 F 为鞅，在集合 $\{\mu<\infty\}=\{Y^*>\lambda\}$ 上，$F^*\leqslant3\delta\lambda$，而在集合 $\{\mu=\infty\}=\{Y^*\leqslant\lambda\}$ 上，$F^*=0$。于是 $\|F\|_1\leqslant3\delta\lambda P(Y^*>\lambda)$。若 G 是 F 关于 V 的变换，它亦是 Y 关于 u 的变换，则由(2)得

$$\begin{aligned}&P(Y^*>\beta\lambda,X^*\vee W^*\leqslant\delta\lambda)\\&\leqslant P(G^*>(\beta-\delta-1)\lambda)\\&\leqslant c(2)\|F\|_1/(\beta-\delta-1)\lambda.\end{aligned}$$

因此由(2)可推知

$$P(Y^*>\beta\lambda,X^*\vee W^*\leqslant\delta\lambda)\leqslant\varepsilon P(Y^*>\lambda),\tag{5.4}$$

其中 $\varepsilon=3c(2)\delta/(\beta-\delta-1)$。由[76]的引理7.1立即得

$$E\Phi(Y^*)\leqslant cE\Phi(X^*\vee W^*).\tag{5.5}$$

应用(5.5)及鞅的 Davis 分解可推知(5.3)成立，这就证明了(3)。

注　注意到 $\{\|G_n\|,n\geqslant1\}$ 是非负下鞅，可得

$$P(G^*>(\beta-\delta-1)\lambda)\leqslant\|G\|_p^p/(\beta-\delta-1)^p\lambda^p,$$

取 $\varepsilon=[3c(3)\delta/(\beta-\delta-1)]^p$，(5.4)式必成立，类似于前面推导，可证明(3)⇒(5.3)式.

(3)⇒(1). 设 $(X,V,Y)\in V(\mathbf{B})$，$\|X\|_1<\infty$，令 $h_n=\|X_n\|$，$n\geqslant1$，则 $h=\{h_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant1\}$ 为非负下鞅，对 $\lambda>0$，令

$$\mu=\inf\{n:h_n>\lambda\},\ u_k=I_{\{\mu\geqslant k\}},k\geqslant1,$$

记 F 是 X 关于 $u=\{u_k\}$ 的变换，则

$$F_n^*\leqslant\lambda+h_{\mu\wedge n}.$$

其中 $Eh_{\mu\wedge n}\leqslant Eh_n\leqslant\|h\|_1=\|X\|_1$，于是

$$EF^*\leqslant\lambda+\|X\|_1<\infty,$$

又 Y 关于 u 的变换亦是 F 关于 V 的变换，记为 G，由上面的注知(5.3)式成立，在(5.3)式中取 $\Phi(\lambda)=\lambda$，则有

$$\|G\|_1\leqslant EG^*\leqslant CEF^*<\infty,$$

又由(3)成立知 $\mathbf{B}$ 是 UMD 空间(下面将给出 UMD 空间的定义)，而 UMD 空间是超自反空间[77]，更是自反空间，从而 $\mathbf{B}$ 具有

RNP. 再由定理2.5知：G a.e. 收敛. 由于在集合$\{\mu=\infty\}=\{X^*\leqslant\lambda\}$上$Y=G$. 从而在集合$\{X^*\leqslant\lambda\}$上$Y$ a.e. 收敛. 又由$\lambda P(X^*>\lambda)\leqslant\|X\|_1<\infty$知$Y$ a.e. 收敛，即(1)成立.

定义 5.2 凡满足定理5.2中的(1)(或者(2)、(3)、(4))的Banach空间**B**，皆称为MT空间，并记为$\mathbf{B}\in MT$.

定理 5.3 设$1<p<\infty$. 对任何给定的Banach空间**B**，下列命题等价：

(1) $(X,V,Y)\in U(\mathbf{B}),\|X\|_1<\infty$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}Y_n=Y_\infty, \text{a.e.};$$

(2) 存在正实数$c=c(\mathbf{B})$，使$(X,V,Y)\in U(\mathbf{B})$，

$$\Rightarrow\lambda P(Y^*>\lambda)\leqslant c\|X\|_1,(\lambda>0);$$

(3) 存在正实数$c_p=c_p(\mathbf{B})$，使

$$(X,V,Y)\in U(\mathbf{B})\Rightarrow\|Y\|_p\leqslant c_p\|X\|_p;$$

(4) 存在正实数$c=c(\mathbf{B})$，使$(X,V,Y)\in U(\mathbf{B})$，

$$Y^*>1, \text{a.e.}\Rightarrow\|X\|_1\geqslant c.$$

证 类似于定理5.2证明.

定义 5.3 令$1<p<\infty$，称Banach空间**B**是UMD空间(**B** has the Unconditionality property for martingale differences)，如果存在正数c_p，使得

$$\|\varepsilon_1D_1+\varepsilon_2D_2+\cdots+\varepsilon_nD_n\|_p\leqslant c_p\|D_1+\cdots+D_n\|_p,n\geqslant1 \quad (5.6)$$

对一切**B**值鞅差序列$D=\{D_1,D_2,\cdots\}$及一切数$\varepsilon_i\in\{-1,1\}$成立$(i=1,2,\cdots)$，并记为$\mathbf{B}\in UMD$.

显然，若$\mathbf{B}\in UMD$，则定理5.3中的(3)成立.

定义 5.4 称Banach空间**B**是ξ凸的，如果存在实函数$\xi:\mathbf{B}\times\mathbf{B}\to R$，满足：

(1) 对称性：$\xi(x,y)=\xi(y,x)$，$(\forall\ x,y\in\mathbf{B})$，

(2) 双凸性：$\forall\ x,y\in\mathbf{B}$，$\xi(x,\cdot)$和$\xi(\cdot,y)$都为**B**上的凸函数，

(3) $\xi(0,0)>0$，

(4) $\xi(x,y)\leqslant\|x+y\|$,(当$\|x\|\leqslant 1\leqslant\|y\|$).

若 B 是实数域上的 Hilbert 空间,(x,y)表示 x 与 y 之内积,令$\xi(x,y)=1+(x,y)$,则由内积的对称性及双线性性可知 ξ 是对称的,双凸的,$\xi(0,0)=1$,又因为

$$[1+(x,y)]^2\leqslant 1+2(x,y)+\|x\|^2\|y\|^2$$
$$=\|x-y\|^2+(1-\|x\|^2)(1-\|y\|^2),$$

所以当$\|x\|\leqslant 1\leqslant\|y\|$时,有 $\xi(x,y)\leqslant\|x+y\|$,即 B 是 ξ 凸的.

定理 5.4 设 B 是 Banach 空间,则下列陈述等价:

(1) B 是 ξ 凸的.

(2) $B\in MT$.

(3) $B\in UMD$.

证明见[78]的定理2.2与定理3.1.

第六章　B 值鞅型序列

本章讨论 B 值鞅型序列，主要研究各种 B 值鞅型序列及其关系，B 值鞅型序列的收敛性及收敛条件，B 值鞅型序列的局部收敛性，B 值 BMO 序列，B 值鞅型序列的变换及其收敛性，B 值鞅型序列在条件期望下的收敛性，等等. 设 $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的任一子 σ 代数，为方便起见，本章及以后的章节有时将条件期望 $E(\cdot|\mathscr{G})$ 记为 $E^{\mathscr{G}}$，我们知道 $E^{\mathscr{G}}$ 是 $L^p(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$ 到 $L^p(\Omega,\mathscr{G},P|_{\mathscr{G}};\mathbf{B})$ 的连续线性算子（$1\leqslant p<\infty$），且 $\|E^{\mathscr{G}}\|_p\leqslant 1$，其中 $P|_{\mathscr{G}}$ 表示 P 在 $\mathscr{G}$ 上的限制.

§1　各种 B 值鞅型序列及其关系

定义 1.1　设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是 B 值可积适应序列，$1\leqslant p<\infty$，

（1）称 X 为 B 值 p 拟鞅，若每一 X_n 是 L^p 可积的，且

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|E^{\mathscr{F}_n}X_{n+1}-X_n\|_p<\infty,$$

简称 B 值 1 拟鞅为 B 值拟鞅，显然 B 值 p 拟鞅（$1<p<\infty$）是 B 值拟鞅；

（2）称 X 为 B 值循序鞅，如果存在 $C_n\subset C_{n+1}$，$C_n\in\mathscr{F}_n$，$\forall\ n\geqslant 0$，$P(\bigcup_{n=0}^{\infty}C_n)=1$，且

$$E^{\mathscr{F}_n}X_{n+1}=X_n,\forall\ \omega\in C_n,n\geqslant 0;$$

(3) 称 X 为 **B** 值终鞅，如果

$$P(E^{\mathscr{F}_n}X_{n+1}\neq X_n, i.o.)=0;$$

(4) 称 X 为 **B** 值渐近鞅，如果网 $\{EX_\tau\}_{\tau\in T}$ 在 **B** 中收敛；

(5) 称 X 为 **B** 值 p 一致渐近鞅，如果

$$\lim_{\sigma\in T}\sup_{\tau\in T(\sigma)}\|E^{\mathscr{F}_\sigma}X_\tau-X_\sigma\|_p=0;$$

简称 **B** 值 1 一致渐近鞅为 **B** 值一致渐近鞅.

(6) 称 X 为 **B** 值 p 概率渐近鞅，如果每一 X_n 是 L^p 可积的，且对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{\sigma\in T}\sup_{\tau\in T(\sigma)}P(\|E^{\mathscr{F}_\sigma}X_\tau-X_\sigma\|_p>\varepsilon)=0,$$

简称 **B** 值 1 概率渐近鞅为 **B** 值概率渐近鞅；

(7) 称 X 为 **B** 值极限鞅，如

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{m\geq n}\|E^{\mathscr{F}_n}X_m-X_n\|=0, a.e.;$$

(8) 称 X 为 **B** 值 Mil，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 p，使对每一 $n\geq p$，有

$$P(\sup_{p\leq q\leq n}\|E^{\mathscr{F}_q}X_n-X_q\|>\varepsilon)\leq\varepsilon.$$

(9) 称 X 为 **B** 值概率极限鞅，如果对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{m\geq n}(P\|E^{\mathscr{F}_n}X_m-X_n\|>\varepsilon)=0;$$

(10) 称 X 是 **B** 值 L^p 极限鞅，如果每一 X_n 是 L^p 可积的，且

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{m\geq n}\|E^{\mathscr{F}_n}X_m-X_n\|_p=0;$$

(11) 称 X 是 **B** 值拟终鞅，如果

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|E^{\mathscr{F}_n}X_{n+1}-X_n\|<\infty, a.e.;$$

(12) 称 X 是 **B** 值相邻极限鞅，如果

$$\lim_{n\to\infty}\|E^{\mathscr{F}_n}X_{n+1}-X_n\|=0, a.e..$$

显然当 $\mathbf{B}=R, p=1$ 时，上述定义即为第三章 §1 中相应的实值鞅型序列的定义. 由上述定义还可立即看出：**B** 值鞅⇒**B** 值拟鞅⇒**B** 值拟终鞅；**B** 值鞅⇒**B** 值循序鞅⇒**B** 值终鞅⇒**B** 值拟终鞅⇒**B** 值相邻极限鞅；**B** 值一致渐近鞅⇒**B** 值概率渐近鞅；**B** 值一致渐近

鞅⇒B 值 L^1 极限鞅⇒B 值概率极限鞅.

定义 1.2 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是 B 值 L^p 可积适应序列，$1\leqslant p<\infty$.

(1) 称 X 为 B 值 p 位势，如果$\lim\limits_{n\to\infty}\|X_n\|_p=0$，

(2) 称 X 为 B 值 p 一致位势，如果$\lim\limits_{\tau\in T}\|X_\tau\|_p=0$. 简称 B 值 1 位势为 B 值位势、简称 B 值 1 一致位势为 B 值一致位势. 显然，B 值 p 一致位势为 B 值 p 位势，但反过来并不一定成立.

在说明 B 值鞅型序列之间的关系之前，我们先证明下面 B 值 p 一致渐近鞅 Riesz 分解定理.

定理 1.1 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为 B 值 p 一致渐近鞅($1\leqslant p<\infty$)的充要条件是 X 有如下唯一分解：

$$X_n=Y_n+Z_n,n\in N,$$

其中 $Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为 B 值 L^p 可积鞅，$Z=\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为 B 值 p 一致位势.

证 由第五章的定理 1.2(2)及 p 一致位势的定义知充分性为显然，下面证必要性. 对任意固定的 $\sigma\in T$，任意 $\tau_1,\tau_2\in T(\sigma)$，$\tau_1\leqslant\tau_2$，则

$$\begin{aligned}\|E^{\mathscr{F}_\sigma}X_{\tau_1}-E^{\mathscr{F}_\sigma}X_{\tau_2}\|_p&=\|E^{\mathscr{F}_\sigma}(X_{\tau_1}-X_{\tau_2})\|_p\\&=\|E^{\mathscr{F}_\sigma}(X_{\tau_1}-E^{\mathscr{F}_{\tau_1}}X_{\tau_2})\|_p\\&\leqslant\|E^{\mathscr{F}_{\tau_1}}X_{\tau_2}-X_{\tau_1}\|_p.\end{aligned}$$

由于 X 为 p 一致渐近鞅，故$\{E^{\mathscr{F}_\sigma}X_\tau\}_{\tau\in T(\sigma)}$为 $L^p(\Omega,\mathscr{F}_\sigma,P;\mathbf{B})$中的 Cauchy 族，而 $L^p(\Omega,\mathscr{F}_\sigma,P;\mathbf{B})$为完备的 Banach 空间，故存在 $Y_\sigma\in L^p(\Omega,\mathscr{F}_\sigma,P;\mathbf{B})$，使得

$$Y_\sigma=L^p\text{-}\lim_{\tau\in T(\sigma)}E^{\mathscr{F}_\sigma}X_\tau$$

其中 L^p-lim 表示 L^p 收敛极限. 特别

$$Y_n=L^p\text{-}\lim_{\tau\in T(n)}E^{\mathscr{F}_n}X_\tau,\forall\ n\in N,$$

因为

$$E^{\mathscr{F}_n}Y_{n-1}=E^{\mathscr{F}_n}L^p\text{-}\lim_{\tau\in T(n-1)}E^{\mathscr{F}_{n-1}}X_\tau$$

$$=L^p\text{-}\lim_{\tau\in T(n-1)} E^{\mathscr{F}_n}E^{\mathscr{F}_{n-1}}X_\tau$$
$$=L^p\text{-}\lim_{\tau\in T(n)} E^{\mathscr{F}_n}X_\tau$$
$$=Y_n, a.e., n\in N,$$

所以，$Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为 **B** 值 L^p 可积鞅. 令

$$Z_n=X_n-Y_n, \forall\ n\in N.$$

则 $X_n=Y_n+Z_n$, $\forall\ n\in N$. $\forall\ \varepsilon>0$, 由于 X 为 p 一致渐近鞅，可取 $\tau'\in T$，使得一切 $\sigma\in T(\tau')$，有

$$\sup_{\tau\in T(\sigma)}\| E^{\mathscr{F}_\sigma}X_\tau-X_\sigma\|_p<\frac{\varepsilon}{2},$$

$\forall\ \sigma\in T(\tau')$，由 Y_σ 的定义可取 $\tau''\in T(\sigma)$，使得

$$\| E^{\mathscr{F}_\sigma}X_{\tau''}-Y_\sigma\|_p<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是，对任意 $\sigma\in T(\tau')$，有

$$\| Z_\sigma\|_p=\| X_\sigma-Y_\sigma\|_p$$
$$\leqslant \| E^{\mathscr{F}_\sigma}X_{\tau''}-Y_\sigma\|_p+\| E^{\mathscr{F}_\sigma}X_{\tau''}-X_\sigma\|_p$$
$$<\varepsilon$$

即 $Z=\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant N\}$为 **B** 值 p 一致位势.

最后，证明分解是唯一的. 设

$$X_n=Y_n+Z_n=Y'_n+Z'_n, \forall\ n\in N,$$

则$\{Y_n-Y'_n=Z'_n-Z_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为 **B** 值鞅，从而$\{\| Y_n-Y'_n\|^p,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为非负实值下鞅. 于是，对任意固定的 $n\in N$,

$$\| Y_n-Y'_n\|_p=\lim_{m\to\infty}\| Y_m-Y'_m\|_p$$
$$=\lim_{m\to\infty}\| Z'_m-Z_m\|_p$$
$$\leqslant\lim_{m\to\infty}\| Z'_m\|_p+\lim_{m\to\infty}\| Z_m\|_p=0.$$

故 $Y_n=Y'_n$, $a.e.$, $Z_n=Z'_n$, $a.e.$, $\forall\ n\in N$. 我们简称上述分解为 **B** 值 p 一致渐近鞅 X 的 Riesz 分解.

定理 1.2 (1) **B** 值拟鞅是 **B** 值一致渐近鞅；

(2) **B** 值概率渐近鞅是 **B** 值极限鞅；

(3) **B** 值极限鞅是 **B** 值 Mil;

(4) **B** 值 Mil 是 **B** 值概率极限鞅;

(5) **B** 值一致渐近鞅是 **B** 值渐近鞅;

(6) **B** 值循序鞅是 **B** 值概率渐近鞅.

证 (1) 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是 **B** 值拟鞅,则$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ n_0\in N$,使得

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\int_{\Omega}\|E^{\mathscr{F}_n}X_{n+1}-X_n\|\,dP\leqslant\varepsilon,$$

现设 $\sigma,\tau\in T(n_0)$, $\tau\in T(\sigma)$,则

$$\int_{\Omega}\|E^{\mathscr{F}_\sigma}X_\tau-X_\sigma\|\,dP$$

$$=\sum_{k=\min\sigma}^{\max\sigma}\sum_{j=\min\tau}^{\max\tau}\int_{\{\tau=j\}\cap\{\sigma=k\}}\|E^{\mathscr{F}_k}X_j-X_k\|\,dP, \qquad (1.1)$$

因为,当 $k>j$ 时,$\{\tau=j\}\cap\{\sigma=k\}=\varnothing$,当 $k=j$ 时,$\|E^{\mathscr{F}_k}X_j-X_k\|=0$,所以

$$(1.1)\text{式右边}=\sum_{\substack{k\in\{\min\sigma,\cdots,\max\sigma\}\\ j\in\{\min\tau,\cdots,\max\tau\}\\ k<j}}\int_{\{\tau=j\}\cap\{\sigma=k\}}\|E^{\mathscr{F}_k}X_j-X_k\|\,dP$$

由于 $k<j$,故

$$\begin{aligned}E^{\mathscr{F}_k}X_j-X_k&=E^{\mathscr{F}_k}(X_j-X_k)\\&=E^{\mathscr{F}_k}(X_j-X_{j-1}+X_{j-1}-X_{j-2}+\cdots+X_{k+1}\\&\quad-X_k)\\&=E^{\mathscr{F}_k}(E^{\mathscr{F}_{j-1}}X_j-X_{j-1}+E^{\mathscr{F}_{j-2}}X_{j-1}-X_{j-2}+\\&\quad\cdots+E^{\mathscr{F}_k}X_{k+1}-X_k)\end{aligned}$$

又由于 $\|E^{\mathscr{F}_k}\|\leqslant 1$,故有

(1.1)式右边

$$\leqslant\sum_{\substack{k\in\{\min\sigma,\cdots,\max\sigma\}\\ j\in\{\min\tau,\cdots,\max\tau\}\\ k<j}}\int_{\{\tau=j\}\cap\{\sigma=k\}}\Big(\sum_{i=k+1}^{j}\|E^{\mathscr{F}_{i-1}}X_i-X_{i-1}\|\Big)dP$$

$$\leqslant \sum_{i=\min\sigma+1}^{\max\tau} \int_{\Omega} \| E^{\mathscr{F}_{i-1}} X_i - X_{i-1} \| dP \leqslant \varepsilon,$$

这就证明了 X 为 **B** 值一致渐近鞅.

(2) 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是 **B** 值概率渐近鞅，由[59]的定理 $I.3.5.5$ 及推论 $I.3.5.6$，我们有

$$\operatorname*{elim}_{\sigma\in T} \operatorname*{esup}_{\tau\in T(\sigma)} \| E^{\mathscr{F}_\sigma} X_\tau - X_\sigma \| = 0, a.e.,$$

由于 N 与 T 共尾，故

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geqslant n} \| E^{\mathscr{F}_n} X_m - X_n \| = 0, a.e.,$$

即 X 为 **B** 值极限鞅.

(3) 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是 **B** 值极限鞅，注意到 **B** 值可积适应序列 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为极限鞅的充分必要条件是存在非负可测的广义实值随机变量序列$\{h_n\}$，$h_n\to 0, a.e.$，使得

$$\forall\ m\geqslant n,\ \| E^{\mathscr{F}_n} X_m - X_n \| \leqslant h_n,\ a.e.,$$

于是，$\forall\ \varepsilon>0$，存在正整数 p 及可测函数 h_p，$P(h_p>\varepsilon)<\varepsilon$，使得对每一 $n\geqslant p$，有

$$\| E^{\mathscr{F}_q} X_n - X_q \| \leqslant h_p, p\leqslant q\leqslant n$$

从而，X 是 **B** 值 Mil.

(4) 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是 **B** 值 Mil，则对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 p，使得对每一 $n\geqslant p$，有

$$P(\sup_{p\leqslant q\leqslant n} \| E^{\mathscr{F}_q} X_n - X_q \| > \varepsilon) \leqslant \varepsilon,$$

这样，对任意的 $n\geqslant q\geqslant p$，有

$$P(\| E^{\mathscr{F}_q} X_n - X_q \| > \varepsilon) \leqslant \varepsilon,$$

这就证明了 X 是 **B** 值概率极限鞅.

(5) 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是 **B** 值一致渐近鞅，则由定理 1.1 知，X 有如下 Riesz 分解：

$$X_n = Y_n + Z_n,\ n\in N,$$

其中$\{Y_n\}$为 **B** 值鞅，$\{Z_n\}$为 **B** 值一致位势. 于是，对任意 $\tau\in T$，有

$$X_\tau = Y_\tau + Z_\tau,$$

再由第五章的定理 1.2(2)及 **B** 值一致位势的定义得

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\in T} EX_\tau &= \lim_{\tau\in T}(EY_\tau + EZ_\tau)\\ &= EY_0 + \lim_{\tau\in T} EZ_\tau\\ &= EY_0,\end{aligned}$$

即 X 是 **B** 值渐近鞅.

(6) 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为 $\{C_n\}$**B** 值循序鞅，则对任意 $\delta>0$，存在 $k\in N$，使得 $P(C_k)<\delta$. 对固定的 k，

$$X^{(k)}=\{X_n I_{C_k},\mathscr{F}_n,n\geqslant k\}$$

是 **B** 值鞅，对 $\tau,\sigma\in T$，当 $\tau\geqslant\sigma\geqslant k$ 时，由于 τ,σ 为 $\{\mathscr{F}_n,n\geqslant k\}$ 停时，据第五章的定理 1.2(2)有

$$E(X_\tau I_{C_k}|\mathscr{F}_\sigma)=X_\sigma I_{C_k}.$$

从而，

$$\|E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)-X_\sigma\| = \|E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)-X_\sigma\| I_{C_k^c},$$

于是，对任意 $\varepsilon>0$，有

$$P(\|E^{\mathscr{F}_\sigma}X_\tau - X_\sigma\|>\varepsilon)\leqslant P(C_k^c)<\delta,$$

由 ε,δ 的任意性知 X 是 **B** 值概率渐近鞅.

下面我们在 $L^1(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$ 中引进比 $\|\cdot\|_1$ 范数较弱的所谓 Pettis 范数.

定义 1.3 对任意 $X\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$，令

$$\|X\|_{Pe} = \sup_{\substack{f\in B^*\\ \|f\|\leqslant 1}}\int_\Omega |f(X)|dP,$$

易证 $\|\cdot\|_{Pe}$ 是 $L^1(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$ 上的范数，称 $\|\cdot\|_{Pe}$ 为 Pettis 范数. 显然，我们有 $\|X\|_{Pe}\leqslant\|X\|_1$，但 $\|\cdot\|_{Pe}$ 与 $\|\cdot\|_1$ 不是等价的. 然而据[59]的定理 I.1.2.8 知道下面三条是等价的：(i) **B** 是有限维的，(ii) $\|\cdot\|_{Pe}$ 与 $\|\cdot\|_1$ 是等价的，(iii) $\|\cdot\|_{Pe}$ 在 $L^1(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$ 上是完备的.

定理 1.3 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是 **B** 值可积适应序列，则下列陈述等价：

(1) X 是 $\mathbf{B}$ 值渐近鞅，

(2) 存在 $\mathbf{B}$ 值集函数 $\mu_\infty: \bigcup_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n \to \mathbf{B}$，使

$$\lim_{\sigma\in T}\sup_{A\in\mathscr{F}_\sigma}\left\|\int_A X_\sigma dP - \mu_\infty(A)\right\| = 0,$$

(3) $\lim_{\sigma\in T}\sup_{\tau\in T(\sigma)}\| E^{\mathscr{F}_\sigma}X_\tau - X_\sigma\|_{Pe} = 0.$

证 (3)⇒(2)⇒(1) 为显然. 下面证明(1)⇒(3). 由于对任意 $X\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$，有

$$\sup_{A\in\mathscr{F}}\left\|\int_A XdP\right\| \leqslant \|X\|_{Pe} \leqslant 2\sup_{\substack{f\in B'\\ \|f\|\leqslant 1}}\sup_{A\in\mathscr{F}}\left|\int_A f(X)dP\right|$$

$$\leqslant 2\sup_{A\in\mathscr{F}}\left\|\int_A XdP\right\|,$$

故 $\| E^{\mathscr{F}_\sigma}X_\tau - X_\sigma\|_{Pe} \leqslant 2\sup_{A\in\mathscr{F}_\sigma}\left\|\int_A (E^{\mathscr{F}_\sigma}X_\tau - X_\sigma)dP\right\|$

$$= 2\sup_{A\in\mathscr{F}_\sigma}\left\|\int_A (X_\tau - X_\sigma)dP\right\|.$$

令

$$\sigma' = \begin{cases}\sigma, & \text{当 } \omega\in A,\\ \max\tau, & \text{当 } \omega\in A^c.\end{cases}$$

$$\tau' = \begin{cases}\tau, & \text{当 } \omega\in A,\\ \max\tau, & \text{当 } \omega\in A^c\end{cases}$$

则

$$\int_A (X_\tau - X_\sigma)dP = \int_\Omega (X_{\tau'} - X_{\sigma'})dP,$$

且 $\sigma'\in T$，$\tau'\in T(\sigma')$，$\sigma'\geqslant\sigma$. 因此

$$\sup_{A\in\mathscr{F}_\sigma}\left\|\int_A (X_\tau - X_\sigma)dP\right\| \leqslant \sup_{\substack{\sigma'\geqslant\sigma\\ \tau',\sigma'\in T(\sigma)}}\left\|\int_\Omega (X_{\tau'} - X_{\sigma'})dP\right\|.$$

于是

$$\lim_{\sigma\in T}\sup_{\tau\in T(\sigma)}\| E^{\mathscr{F}_\sigma}X_\tau - X_\sigma\|_{Pe}$$

$$\leqslant 2\lim_{\sigma\in T}\sup_{\substack{\sigma'\geqslant\sigma\\ \tau',\sigma'\in T(\sigma)}}\left\|\int_\Omega X_{\tau'}dP - \int_\Omega X_{\sigma'}dP\right\|$$

$= 0.$

这就证明了(1)⇒(3).

定理 1.4 设 **B** 是任一 Banach 空间，则下列陈述等价：

(1) **B** 是有限维的，

(2) 每一 **B** 值渐近鞅是 **B** 值一致渐近鞅，

(3) 每一 **B** 值渐近鞅是 **B** 值概率渐近鞅.

(4) 每一 **B** 值渐近鞅是 **B** 值极限鞅.

证 由定理 1.3 与定理 1.2 知(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4) 为显然. (4)⇒(1) 的证明可参见[59] 的定理 Ⅶ.2.5.

例 1.5 拟鞅不一定是终鞅，从而拟鞅不一定是鞅，也不一定是循序鞅.

设 **B** 是任一 Banach 空间，$\{\mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的单调上升子 σ 代数序列. 令 $X_n = \dfrac{x}{n+1}, n \in N, x \in \mathbf{B}$ 且 $x \neq 0$, 则 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是 **B** 值拟鞅，但不是 **B** 值拟终鞅.

例 1.6 循序鞅不一定是渐近鞅，从而循序鞅不一定是鞅，也不一定是一致渐近鞅.

设 **B** 是任一无穷维的 Banach 空间，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是$[0,1)$ 上的勒贝格测度空间，令

$$B_n = \left[\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n+2}\right),$$

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} (i+1)(i+2) x I_{B_i}, x \in \mathbf{B} \text{ 且 } x \neq 0,$$

$$\mathscr{F}_n = \sigma(B_i, 0 \leqslant i \leqslant n), \forall\, n \in N,$$

则 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是 **B** 值可积适应序列，且

$$E(X_{n+1} | \mathscr{F}_n) = X_n, \omega \in A_n = \bigcup_{i=0}^{n} B_i, \forall\, n \in N,$$

因而 X 是 **B** 值循序鞅，但是

$$EX_n = \sum_{i=0}^{n} (i+1)(i+2) x P(B_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n}(i+1)(i+2)\left(\frac{i+1}{i+2}-\frac{i}{i+1}\right)x$$

$$= (n+1)x$$

由于 $\|(n+1)x\| = (n+1)\|x\| \to \infty$，故 X 不是 **B** 值渐近鞅.

例 1.7 令 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 如同例 1.6，则由定理 1.2 知 X 为概率渐近鞅，但

$$E\|E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) - X_n\|$$

$$= E\|(n+2)(n+3)xP(B_{n+1})\|$$

$$= \|x\| \nrightarrow 0.$$

故概率渐近鞅不一定是 L^1 极限鞅.

例 1.8 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是 $[0,1)$ 上的勒贝格测度空间，对 $k \geqslant 1$，记

$$\mathscr{G}_k = \sigma\left\{\left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right), 0 \leqslant i \leqslant 2^k\right\},$$

令 $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2 = \mathscr{G}_1, X_1 = I_{[0,\frac{1}{2})}, X_2 = I_{[\frac{1}{2},1)}$，对任意 $n \geqslant 3$，存在 $k \geqslant 1$，使有 $\sum_{i=1}^{k} 2^i < n \leqslant \sum_{i=1}^{k} 2^i$，记 $j = n - \sum_{i=1}^{k-1} 2^i$，则 $1 \leqslant j \leqslant 2^k$，令

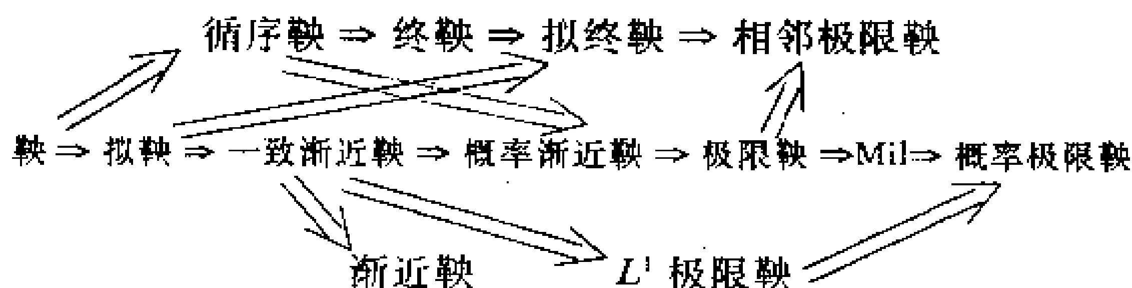
$$X_n = I_{\left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k}\right)}, \mathscr{F}_n = \mathscr{G}_k,$$

则 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是实值可积适应序列，且 $X_n \to 0(L^1)$，从而 X 为 L^1 极限鞅，更是概率极限鞅，但 $X_n \to 0(a.e.)$ 并不成立. 因此，由第三章的定理 2.4 知 X 不是 Mil，更不可能是概率渐近鞅或极限鞅. 这就说明 L^1 极限鞅不一定是 Mil，从而 L^1 极限鞅不一定是概率渐近鞅，也不一定是极限鞅. 上例还说明概率极限鞅不一定是 Mil.

Mil 不是极限鞅的例子见[19]，极限鞅不是概率渐近鞅和概率渐近鞅不是渐近鞅的例子见[17]，渐近鞅不是拟鞅的例子见[16]，相邻极限鞅不是拟终鞅和相邻极限鞅不是极限鞅的例子见[22].

由上面的讨论知，关于 **B** 值鞅型序列只可能有如下的真蕴含

关系：



下面是 Millet 与 Sucheston[17] 给出的 **B** 值概率渐近鞅的可选采样定理.

定理 1.9 设 **B** 是 Banach 空间，$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是 **B** 值概率渐近鞅，$\{\tau_k,k\in N\}$ 是 $\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 递增的有界停时列，令 $Y_k=X_{\tau_k},\mathscr{G}_k=\mathscr{F}_{\tau_k},k\in N$，则 $Y=\{Y_k,\mathscr{G}_k,k\in N\}$ 是概率渐近鞅.

证 令 $\tau_\infty=\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k$，$T$ 是 $\{\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 有界停时全体，T' 是 $\{\mathscr{G}_n,n\in N\}$ 有界停时全体，易知：若 $\sigma\in T'$，则 $\tau_\sigma\in T$ 且 $\mathscr{G}_\sigma=\mathscr{F}_{\tau_\sigma}$. 令 $\sigma,\sigma'\in T'$，则

$$E^{\mathscr{G}_\sigma}Y_{\sigma'}=E^{\mathscr{F}_{\tau_\sigma}}X_{\tau_{\sigma'}}.$$

对任意 $\varepsilon>0$，取 $n_0\in N$，使得 $\tau\in T(n_0)$ 及 $\tau'\in T(\tau)$ 有

$$P(\|E^{\mathscr{F}_\tau}X_{\tau'}-X_\tau\|>\varepsilon)\leqslant\varepsilon,$$

取 $k_0\in N$，使得

$$P(\{\tau_\infty>n_0\}\backslash\{\tau_{k_0}>n_0\})\leqslant\varepsilon.$$

若 $\sigma\in T'(k_0),\sigma'\in T'(\sigma)$，则

$$\begin{aligned}&P(\|E^{\mathscr{G}_\sigma}Y_{\sigma'}-Y_\sigma\|>\varepsilon)\\&\leqslant\varepsilon+P(\{\|E^{\mathscr{F}_{\tau_\sigma}}X_{\tau_{\sigma'}}-X_{\tau_\sigma}\|>\varepsilon\}\cap\{\tau_\sigma>n_0\})\\&\quad+P(\{\|E^{\mathscr{F}_{\tau_\sigma}}X_{\tau_{\sigma'}}-X_{\tau_\sigma}\|>\varepsilon\}\cap\{\tau_\infty\leqslant n_0\})\\&\leqslant\varepsilon+P(\|E^{\mathscr{F}_{\tau_\sigma\vee n_0}}X_{\tau_{\sigma'}\vee n_0}-X_{\tau_\sigma\vee n_0}\|>\varepsilon)\\&\quad+\sum_{i=0}^{n_0}P(\{\|E^{\mathscr{F}_{\tau_\sigma}}X_{\tau_{\sigma'}}-X_{\tau_\sigma}\|>\varepsilon\}\cap\{\tau_\infty=i\}),\end{aligned}$$

对每一 $i\leqslant n_0$，取 $k_i\in N$，使得

$$P(\{\tau_\infty = i\} \Delta \bigcap_{k \geqslant k_i} \{\tau_k = i\}) \leqslant \frac{\varepsilon}{n_0},$$

取 $\sigma \in T'(k)$，其中 $k = \max\{k_0, k_1, \cdots, k_{n_0}\}$，$\sigma' \in T'(\sigma)$. 则在集合 $\bigcap_{k \geqslant k_i} \{\tau_k = i\} \in \mathscr{F}_i$ 上，有 $\tau_\sigma = \tau_{\sigma'} = i$，由[59]的定理 Ⅶ.2.4 知在集合 $\bigcap_{k \geqslant k_i} \{\tau_k = i\}$ 上有

$$E^{\mathscr{F}_{\tau_\sigma}} X_{\tau_{\sigma'}} - X_{\tau_\sigma} = 0.$$

因此，

$$P(\| E^{\mathscr{G}_\sigma} Y_{\sigma'} - Y_\sigma \| > \varepsilon) \leqslant 3\varepsilon.$$

这就证明了定理 1.9 成立. 由此定理立即知最优停时性对概率渐近鞅是成立的.

§2 B 值鞅型序列的收敛性及收敛条件

定义 2.1 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是 B 值适应序列，$1 \leqslant p < \infty$，称 X 属于 (C_p)（或 (D_p)，(B_p)，(d_p)）类，如果

$$\int_{\{\tau < \infty\}} \| X_\tau \|^p dP < \infty, \ \forall \tau \in \overline{T},$$

（或 $\sup_{n \in N} \| X_n \|_p < \infty$，$\sup_{\tau \in T} \| X_\tau \|_p < \infty$，$\lim_{n \to \infty} \inf \| X_n \|_p < \infty$）. 简记为 $X \in (C_p)$（或 (D_p)，(B_p)，(d_p)）.

显然，$(d_p) \supset (D_p) \supset (B_p) \subset (C_p)$. 简记 $(D_1) = (D)$，$(B_1) = (B)$，$(d_1) = (d)$，及 $(C_1) = (C)$. 下面我们将证明：对 $p \geqslant 1$，条件 C_p，D_p，B_p 及 d_p 对 B 值 p 一致渐近鞅是等价的（见[79]）. 为此，我们先证明下面的引理成立.

引理 2.1 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是 L^p 可积的 B 值鞅，令 $V_j = \sup_{n \geqslant j} E(\| X_n \|^p | \mathscr{F}_j)$，$j \in N$，则 $V = \{V_j, \mathscr{F}_j, j \in N\}$ 是实值广义鞅（此处的广义鞅指每一 V_j 不一定具有可积性）.

证 显然，对每一 $j \in N$，V_j 是 $\mathscr{F}_j$ 可测的，由于 $\{\| X_j \|^p, \mathscr{F}_j, j \in N\}$ 是实值下鞅，故

$$\begin{aligned}E(V_{j-1}|\mathscr{F}_j) &= E(\lim_{n\to\infty}E(\|X_n\|^p|\mathscr{F}_{j+1})|\mathscr{F}_j)\\&= \lim_{n\to\infty}E(E(\|X_n\|^p|F_{j+1})|\mathscr{F}_j)\\&= \lim_{n\to\infty}E(\|X_n\|^p|\mathscr{F}_j)\\&= V_j.\end{aligned}$$

定理 2.2 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是 L^p 可积的 B 值鞅，若存在非负整数 n_0 及 $A_{n_0}\in\mathscr{F}_{n_0}$ 使得对一切 $j\geqslant n_0$，$A_j=A_{n_0}$，且 A_{n_0} 是 $\mathscr{F}_j$ 的原子，则

$$\sup_{n\geqslant j}E(\|X_n\|^p|\mathscr{F}_j)=\|X_j\|^p,\omega\in A_j,j\geqslant n_0.$$

证 对任意固定的 $n\geqslant j$，存在简单函数列 $\sum_{i=1}^{n_k}x_i^{(n)}I_{B_i^{(n)}},k\geqslant 1$，使得

$$\sum_{i=1}^{n_k}x_i^{(n)}I_{B_i^{(n)}}\to X_n,\ a.e.(L^p),$$

其中 $x_i^{(n)}\in\mathbf{B},B_i^{(n)}\cap B_j^{(n)}=\varnothing,(i\neq j),B_i^{(n)}\in\mathscr{F}_n,\bigcup_{i=1}^{n_k}B_i^{(n)}=\Omega$，于是

$$\|E(\sum_{i=1}^{n_k}x_i^{(n)}I_{B_i^{(n)}}|\mathscr{F}_j)\|^p\to\|E(X_n|\mathscr{F}_j)\|^p(k\to\infty).$$

另一方面，我们有

$$\sum_{i=1}^{n_k}\|x_i^{(n)}\|I_{B_i^{(n)}}\to\|X_n\|^p,\ a.e.$$

及

$$E\Big(\sum_{i=1}^{n_k}\|x_i^{(n)}\|^pI_{B_i^{(n)}}|\mathscr{F}_j\Big)\to E(\|X_n\|^p|\mathscr{F}_j),\ a.e.,$$

因为 $E(I_{B_i}|\mathscr{F}_j)$ 在 $A_j=A_{n_0}(j\geqslant n_0)$ 上是常数，记为 $c_{ij}\triangleq E(I_{B_i}|\mathscr{F}_j)$，所以

$$P(B_i\cap A_j)=\int_{A_j}E(I_{B_i}|\mathscr{F}_j)dP=c_{ij}P(A_j).$$

于是 $c_{ij}=\dfrac{P(B_i\cap A_j)}{P(A_j)}$，由于 A_j 是 $\mathscr{F}_n$ 的原子，故至多存在一个 i

$(1 \leqslant i \leqslant n_k)$ 使得在 A_j 上在 $c_{ij} \neq 0$. 因此, 在 A_j 上我们有

$$\begin{aligned} & \left\| E\left(\sum_{i=1}^{n_k} x_i^{(n)} I_{B_i^{(n)}} \middle| \mathscr{F}_j \right) \right\|^p \\ = & \left\| \sum_{i=1}^{n_k} x_i^{(n)} E(I_{B_i^{(n)}} | \mathscr{F}_j) \right\|^p \\ = & \sum_{i=1}^{n_k} \| x_i^{(n)} \|^p E(I_{B_i^{(n)}}) | \mathscr{F}_j) \\ = & E\left(\sum_{i=1}^{n_k} \| x_i^{(n)} \|^p I_{B_i^{(n)}} \middle| \mathscr{F}_j \right), \forall\, k \geqslant 1, \end{aligned}$$

这样, 在 A_j 上有

$$\| E(X_n | \mathscr{F}_j) \|^p = E(\| X_n \|^p | \mathscr{F}_j),$$

由鞅性对 $n \geqslant j$, 有 $E(X_n | \mathscr{F}_j) = X_j$, 故

$$\| E(X_n | \mathscr{F}_j) \|^p = \| X_j \|^p,$$

于是, 对 $j \geqslant n_0$, 在 A_j 上

$$E(\| X_n \|^p | \mathscr{F}_j) = \| X_j \|^p, n \geqslant j.$$

因此,

$$\sup_{n \geqslant j} E(\| X_n \|^p | \mathscr{F}_j) = \| X_j \|^p, \omega \in A_j, j \geqslant n_0.$$

定理 2.3 设 **B** 是 Banach 空间, $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 是 **B** 值 p 一致渐近鞅 $(p \geqslant 1)$, 若 $\sup_{n \in N} E \| X_n \|^p = \infty$, 则 $\exists\, \tau \in \overline{T}$, 使得 $E \| X_\tau \|^p I_{(\tau < \infty)} = \infty$.

证 首先设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \in N\}$ 为鞅, 令

$$V_j = \sup_{n \geqslant j} E(\| X_n \|^p | \mathscr{F}_j), j \geqslant 0.$$

则由引理 2.1 知 $V = \{V_j, \mathscr{F}_j, j \in N\}$ 是实值广义鞅. 由于 $\sup_{n \in N} E \| X_n \|^p = \infty$, 故 $EV_j = \infty, \forall\, j \in N$.

(1) 设

$$\int_{\{V_j < \infty\}} V_j dP = \infty, 对某个\ j,$$

令

$$\tau=\begin{cases}\inf\{n\geqslant j;E(\|X_n\|^p|\mathscr{F}_j)>V_j-1\}, & \omega\in\{V_j<\infty\},\\ \infty, & \text{其它}.\end{cases}$$

则 $\tau\in\overline{T}$ 且 $E\|X_\tau\|^pI_{\{\tau<\infty\}}=\infty$.

(2) 若(1)不成立,则

$$\int_{\{V_j<\infty\}}V_jdP<\infty,\text{对所有 } j,$$

令 $G_j=\{V_j=\infty\},j\geqslant 0;G=\bigcap\limits_{j=0}^{\infty}G_j$. 则对所有的 j 有 $G_j\in\mathscr{F}_j$, $P(G_j)>0$ 且 $G_{j-1}\subset G_j$. 这时有两种情形:$P(G)=0$ 或者 $P(G)>0$.

(2.a) 若 $P(G)=0$,则有子列 $\{n_j\}$ 使得 $P(B_j)=b_j>0,\forall\ j\geqslant 1$,其中 $B_j=G_{n_{j-1}}-G_{n_j}$,可设 $n_0=0$,由于

$$\sup_{n\in N}E\|X_n\|^pI_{G_0^c}\leqslant\int_\Omega\sup_{n\in N}E(\|X_n\|^pI_{G_0^c}|\mathscr{F}_0)dP$$

$$=\int_{G_0^c}V_0dP<\infty,$$

故

$$\infty=\sup_{n\in N}E\|X_n\|^pI_{G_0}=\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}E\|X_n\|^pI_{B_j}\Big)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}(\lim_{n\to\infty}E\|X_n\|^pI_{B_j}),$$

对每一 $j\geqslant 1$,有

$$\lim_{n\to\infty}E\|X_n\|^pI_{B_j}=\sup_{n\geqslant n_j}E\|X_n\|^pI_{B_j}\leqslant\int_{G_{n_j}^c}V_{n_j}dP$$

$$<\infty,$$

从而存在 $m_j\geqslant n_j$,使得

$$E\|X_{m_j}\|^pI_{B_j}\geqslant\lim_{n\to\infty}E\|X_n\|^pI_{B_j}-\frac{1}{2^j},\forall\ j\geqslant 1.$$

令

$$\tau(\omega) \doteq \begin{cases} m_j, & \omega \in B_j, \quad j \geq 1, \\ \infty, & \text{其它}. \end{cases}$$

则 $\tau \in \overline{T}$ 且 $E\|X_\tau\|^p I_{(\tau<\infty)} = \infty$.

(2.b) $P(G) = \delta > 0$.

(2.b.1) 若存在 $A \in \mathscr{F}_\infty = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n = \sigma(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{F}_n)$，$A \subset G$，$A$ 是 $\mathscr{F}_\infty$ 的原子，则相应地存在 $\mathscr{F}_n$ 的原子 A_n，使得

$$A_0 \supset A_1 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots \supset A,$$

且 $A_n \subset G_n$，$n \geq 0$. 这时若存在 n_0 使得 $A_j = A_{n_0}$，$\forall\ j \geq n_0$，则 $A_{n_0} \in \mathscr{F}_j$，$\forall\ j \geq n_0$，于是由引理 2.2 有

$$V_j = \sup_{n \geq j} E(\|X_n\|^p | \mathscr{F}_j) = \|X_j\|^p < \infty, \omega \in A_j, \forall\ j \geq n_0.$$

这为不可能. 故必存在子列 $\{m_j\}_{j\geq 1}$ 使有 $P(W_j) > 0$，$j \geq 1$，其中 $W_j = A_{m_{j-1}} - A_{m_j}$，如果这时存在无限多个 n 使有 $P(G_{n-1} - G_n) > 0$，则由(2.a)的证明方法同样可证结论成立，因而不妨设存在 m_0，使有 $P(G_{n-1} - G_n) = 0$，$\forall\ n \geq m_0$. 于是当 $m_{j_0} \geq m_0$ 时有 $W_j \subset G_{m_{j-1}} = G_{m_j}$，$\forall\ j-1 \geq j_0$，由此知

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} E\|X_n\|^p I_{W_j} &= \lim_{n\to\infty}(E(\|X_n\|^p | \mathscr{F}_{m_j}) I_{W_j}) \\ &= E(\lim_{n\to\infty} E(\|X_n\|^p | \mathscr{F}_{m_j}) I_{W_j}) \\ &= E(V_{m_j} I_{W_j}) = \infty, \forall\ j-1 \geq j_0, \end{aligned}$$

从而可选取 $L_j \geq m_j$，使有

$$E\|X_{L_j}\|^p I_{W_j} \geq 1, \forall\ j-1 \geq j_0.$$

令

$$\tau(\omega) = \begin{cases} L_j, & \omega \in W_j, j \geq j_0 + 1, \\ \infty, & \text{其它}, \end{cases}$$

则 $\tau \in \overline{T}$ 且 $E\|X_\tau\|^p I_{(\tau<\infty)} = \infty$.

(2.b.2) 若对任意的 $A \in \mathscr{F}_\infty$，$A \subset G$，A 不是 $\mathscr{F}_\infty$ 的原子. 令 $H_1 = G$，于是存在 $A_1 \subset H_1$，使有 $A_1 \in \mathscr{F}_\infty$，且

$$0 < P(A_1) = a_1 \leq \frac{\delta}{2}.$$

选取 m_1 和 $B_1 \in \mathscr{F}_{m_1}$ 使得 $P(A_1 \triangle B_1) \leqslant \frac{a_1}{2}$，令 $C_1 = \{V_{m_1} > \frac{4}{a_1}\}$，于是存在 $k_1 \geqslant m_1$，使有 $P(C_1 D_1^c) \leqslant \frac{a_1}{4}$，其中 $D_1 = \{Y_1 > \frac{4}{a_1}\}$，$Y_1 = \sup\limits_{k_1 \geqslant n \geqslant m_1} E(\| X_n \|^p | \mathscr{F}_{m_1})$，从而

$$\int_{A_1 B_1} Y_1 dP \geqslant \int_{A_1 B_1 D_1} Y_1 dP \geqslant \frac{4}{a_1} P(A_1 B_1 D_1) \geqslant 1.$$

若 $(H_i, A_i, B_i, C_i, D_i, m_i, k_i)_{1 \leqslant i < L}$ 已给定，其中

$$H_i = H_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j, P(H_i) \geqslant \delta - \delta \sum_{j=1}^{2(i-1)} \frac{1}{2^j},$$

$$A_i \subset H_i, A_i \in \mathscr{F}_{\infty}, 0 < P(A_i) = a_i \leqslant \frac{1}{2^{2i-1}},$$

$$k_i \geqslant m_i > k_{i-1}, B_i \in \mathscr{F}_{m_i},$$

$$P(A_i \Delta B_i) \leqslant \frac{a_i}{2}, P(c_i D_i^c) \leqslant \frac{a_i}{4},$$

$$c_i = \{V_{m_i} > \frac{4}{a_i}\}, D_i = \{Y_i > \frac{4}{a_i}\},$$

$$Y_i = \sup_{m_i \leqslant n \leqslant k_i} E(\| X_n \|^p | \mathscr{F}_{m_i}), 1 \leqslant i < L.$$

则令 $H_L = H_{L-1} - B_{L-1}$，于是有

$$P(H_L) \geqslant \delta - \delta \sum_{j=1}^{2(L-1)} \frac{1}{2^j}.$$

取 $A_L \subset H_L$，$A_L \in \mathscr{F}_{\infty}$，使得 $0 < p(A_L) = a_L < \frac{\delta}{2^{2L-1}}$，于是存在 $m_L < k_{L-1}$ 和 $B_L \in \mathscr{F}_{m_L}$ 使得 $P(A_L \Delta B_L) \leqslant \frac{a_L}{2}$，令 $C_L = \{V_{m_L} > \frac{4}{a_L}\}$，则存在 $k_L \geqslant m_L$ 使得 $P(C_L D_L^c) < \frac{a_L}{4}$，其中 $D_L = \{Y_L > \frac{4}{a_L}\}$，$Y_L = \sup\limits_{m_L \leqslant n \leqslant k_L} E(\| X_n \|^p | \mathscr{F}_{m_L})$，从而有

$$\int_{A_L B_L} Y_l dP > \frac{4}{a_L} P(A_L B_L D_L) \geqslant 1.$$

由归纳法我们可找到一列 $(H_i, A_i, B_i, C_i, D_i, m_i, k_i)_{i \geqslant 1}$，令

$$\tau(\omega)=\begin{cases}\inf\{k_1\geqslant n\geqslant m_1:E(\|X_n\|^p|\mathscr{F}_{m_1})=Y_1\},\omega\in B_1,\\ \inf\{k_L\geqslant n\geqslant m_L:E(\|X_n\|^p|\mathscr{F}_{m_L})=Y_L\},\\ \qquad\qquad \omega\in B_L-(\bigcup_{i=1}^{L-1}B_i),L\geqslant 2,\\ \infty,\quad 其它.\end{cases}$$

则 $\tau\in\overline{T}$ 且 $E\|X_\tau\|I_{(\tau<\infty)}=\infty$. 于是定理对鞅得证.

现设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是 **B** 值 p-一致渐近鞅，由定理 1.1 知：

$$X_n=Y_n+Z_n,n\in N,$$

其中 $Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为 **B** 值 L^p 可积鞅，而 $Z=\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为 **B** 值 p-一致位势，即 $\lim\limits_{\tau\in T}\|Z_\tau\|_p=0$. 由 $\sup\limits_{n\in N}E\|X_n\|^p=\infty$ 得知 $\sup\limits_{n\in N}E\|Y_n\|^p=\infty$. 由上述结论知存在 $\tau\in\overline{T}$, 使得 $E\|Y_\tau\|^pI_{(\tau<\infty)}=\infty$. 从而 $E\|X_\tau\|^pI_{(\tau<\infty)}=\infty$.

推论 2.4 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是 **B** 值 p-一致渐近鞅，则条件 (D_p), (C_p), (d_p) 和 (B_p) 等价 $(1\leqslant p<\infty)$.

证 由于 $(d_p)\Leftarrow(D_p)\Leftarrow(B_p)\Leftarrow(C_p)$ 为显然. $(C_p)\Rightarrow(D_p)$ 由定理 2.3 立即得出. 下面证明 $(d_p)\Rightarrow(C_p)$. 设 X 的 Riesz 分解为

$$X_n=Y_n+Z_n,n\in N.$$

则 $\|Y_n\|_p\leqslant\|X_n\|_p+\|Z_n\|_p,\forall n\in N$. 因此有

$$\liminf_{n\to\infty}\|Y_n\|_p\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|X_n\|_p+\limsup_{n\to\infty}\|Z_n\|_p<\infty.$$

从而

$$\liminf_{n\to\infty}E\|Y_n\|^p<\infty,$$

对任意 $\tau\in\overline{T}$,

$$E\|Y_\tau\|^pI_{(\tau<\infty)}=E\lim_{n\to\infty}\|Y_\tau\|^pI_{(\tau\leqslant n)}\leqslant\liminf_{n\to\infty}E\|Y_{\tau\wedge n}\|^pI_{(\tau\leqslant n)}.$$

由于 $\{Y_n\}$ 为 **B** 值鞅，则 $\{\|Y^n\|^p\}$ 为实值下鞅，对每一 $n\in N$, 由 Doob 停时定理有

$$E\|Y_{\tau\wedge n}\|^p I_{(\tau\leqslant n)} \leqslant E\|Y_{\tau\wedge n}\|^p \leqslant E\|Y_n\|^p,$$

故

$$\liminf_{n\to\infty} E\|Y_{\tau\wedge n}\|^p I_{(\tau\leqslant n)} \leqslant \liminf_{n\to\infty} E\|Y_n\|^p < \infty,$$

显然

$$E\|Z_\tau\|^p I_{(\tau<\infty)} < \infty,$$

从而

$$E\|X_\tau\|^p I_{(\tau<\infty)} < \infty.$$

这就证明了$(d_p)\Rightarrow(C_p)$.

最后证明$(D_p)\Rightarrow(B_p)$. 设$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$的Riesz分解为$X_n = Y_n + Z_n, n\in N$. 由$\sup\limits_{n\in N}\|X_n\|_p<\infty$得$\sup\limits_{n\in N}\|Y_n\|_p<\infty$,对任意$\tau\in T$,存在$n\in N$,使得$\tau\leqslant n$,且$X_\tau = Y_\tau + Z_\tau$,因此有

$$\|X_\tau\|_p \leqslant \|Y_\tau\|_p + \|Z_\tau\|_p$$

及

$$E\|Y_\tau\|^p \leqslant E\|Y_n\|^p \leqslant \sup_{n\in N} E\|Y_n\|^p,$$

这样

$$\|Y_\tau\|_p \leqslant \sup_{n\in N}\|Y_n\|_p,$$

从而

$$\sup_{\tau\in T}\|X_\tau\|_p \leqslant \sup_{n\in N}\|Y_n\|_p + \sup_{\tau\in T}\|Z_\tau\|_p < \infty.$$

定理证毕.

作为上述定理与推论的应用,我们给出下面的定理(见[79]).

定理 2.5 设$\mathbf{B}$是p光滑空间$(1<p\leqslant 2)$,$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是$L^p$可积的$\mathbf{B}$值鞅,令

$$S_n(p,X) = \left(\sum_{i=0}^{n}\|X_i - X_{i-1}\|^p\right)^{\frac{1}{p}},(X_{-1}=0)$$

$$S(p,X) = \lim_{n\to\infty} S_n(p,X).$$

对任意$\lambda>0$,令

$$\tau_\lambda = \inf\{n\geqslant 0: S_n(p,X)\geqslant\lambda \text{ 或 } \|X_n\|\geqslant\lambda\},$$

约定$\inf\varnothing=\infty$. 若对任意$r\geqslant 1$,$X\in(D_r)$,则

(1) 对任一子σ代数$\mathscr{B}\subset\mathscr{F}$,$\{\|X_{\tau_\lambda\wedge n}\|^r\}$关于$\mathscr{B}$是条件一

致可积的,

(2) $E(\|X_{\tau_\lambda\wedge n}\|^r|\mathscr{B})\to E(\|X_{\tau_\lambda}\|^r|\mathscr{B}),a.e.(L^1)$,

(3) $E(X_{\tau_\lambda\wedge n}|\mathscr{B})\to E(X_{\tau_\lambda}|\mathscr{B}),a.e.(L^r)$.

其中

$$X_{\tau_\lambda}=\begin{cases}X_n, & \{\tau_\lambda=n\},n=0,1,2,\cdots,\\ X_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}X_n, & \{\tau_\lambda=\infty\}.\end{cases}$$

证 显然 X 是 B 值 r 一致渐近鞅. 因为 $X\in(D_r)$,所以由推论 2.4 得 $X\in(C_r)$. 令 $dX_n=X_n-X_{n-1},n\in N$,显然 $\tau_\lambda\in\overline{T}$,在集合 $\{\tau_\lambda<\infty\}$ 上有

$$\|dX_{\tau_\lambda}\|=\|X_{\tau_\lambda}-X_{\tau_\lambda-1}\|\leqslant\|X_{\tau_\lambda-1}\|+\|X_{\tau_\lambda}\|$$
$$\leqslant\lambda+\|X_{\tau_\lambda}\|$$

因此

$$\int_{\{\tau_\lambda<\infty\}}\|dX_{\tau_\lambda}\|^r dP\leqslant 2^{r-1}\lambda^r+2^{r-1}\int_{\{\tau_\lambda<\infty\}}\|X_{\tau_\lambda}\|^r dP<\infty,$$

$\hat{X}=\{\hat{X}_n=X_{\tau_\lambda\wedge n},\mathscr{F}_{\tau_\lambda\wedge n},n\in N\}$ 是 B 值鞅,且

$$S(p,\hat{X})=\left(\|\hat{X}_0\|^p+\sum_{i=0}^{\infty}\|\hat{X}_{i-1}-\hat{X}_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\left(\|X_{\tau_\lambda\wedge 0}\|^p+\sum_{i=0}^{\infty}\|X_{\tau_\lambda\wedge(i-1)}-X_{\tau_\lambda\wedge i}\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\left(\|X_0\|^p+\sum_{i=0}^{\tau_\lambda}\|X_{i-1}-X_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\left((S_{\tau_\lambda-1}(p,X))^p+\|dX_{\tau_\lambda}\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

故

$$S(p,\hat{X})\leqslant\begin{cases}\lambda, & \omega\in\{\tau_\lambda=\infty\},\\ \lambda+\|dX_{\tau_\lambda}\|, & \omega\in\{\tau_\lambda<\infty\}.\end{cases}$$

因此,对任意 $r\geqslant 1$,有

$$E(S(p,\hat{X}))^r\leqslant\int_{\{\tau_\lambda<\infty\}}(\lambda+\|dX_{\tau_\lambda}\|)^r dP+\int_{\{\tau_\lambda=\infty\}}\lambda^r dP$$

$$\leqslant (2^{r-1}+1)\lambda^r + 2^{r-1}\int_{\{\tau_\lambda<\infty\}} \| dX_{\tau_\lambda} \|^r dP$$

$$< \infty.$$

由[80]存在常数 c 使有

$$E\sup_{n\in N} \| \hat{X}_n \|^r \leqslant cE(S(p,\hat{X}))^r < \infty.$$

由于 **B** 是 p 光滑的，故 **B** 具有 RNP. 从而 $\{\hat{X}_n = X_{\tau_\lambda \wedge n}, n \geqslant 0\}$ $a.e.$ 收敛. 令

$$X_{\tau_\lambda} = \begin{cases} X_n, \omega \in \{\tau_\lambda = n\}, n \in N, \\ X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n, \omega \in \{\tau_\lambda = \infty\}, \end{cases}$$

显然，$X_{\tau_\lambda \wedge n} \to X_{\tau_\lambda}$，$a.e.$ 及 $\| X_{\tau_\lambda \wedge n} \|^r \to \| X_{\tau_\lambda} \|^r$，$a.e.$，

由第一章的定理 7.12 知：对任意子 σ 代数 $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$，$\{ \| X_{\tau_\lambda \wedge n} \|^r, n \in N\}$ 关于 $\mathscr{B}$ 是条件一致可积的，且

$$E(\| X_{\tau_\lambda \wedge n} \|^r | \mathscr{B}) \to E(\| X_{\tau_\lambda} \|^r | \mathscr{B}), a.e.,$$

又因为 $\{ \| X_{\tau_\lambda \wedge n} \|^r, n \in N\}$ 是一致可积的，所以有

$$\| X_{\tau_\lambda \wedge n} \|^r \to \| X_{\tau_\lambda} \|^r, \ (L^1),$$

故

$$E(\| X_{\tau_\lambda \wedge n} \|^r | \mathscr{B}) \to E(\| X_{\tau_\lambda} \|^r | \mathscr{B}), (L^1).$$

这就证明了(1)与(2). 下面证(3). 由第一章的定理 7.9 知

$$E(X_{\tau_\lambda \wedge n} | \mathscr{B}) \to E(X_{\tau_\lambda} | \mathscr{B}), a.e.,$$

显然有

$$\int_\Omega \| X_{\tau_\lambda \wedge n} - X_{\tau_\lambda} \|^r dP \to 0 \ (n \to \infty)$$

由 Jensen 不等式有

$$E(X_{\tau_\lambda \wedge n} | \mathscr{B}) \to E(X_{\tau_\lambda} | \mathscr{B}), (L^r).$$

注[23]中的例 2 表明，条件(d)和(c)对极限鞅(甚至对概率渐近鞅)是不等价的. 因此，我们分别在条件(d)与条件(c)下讨论某些鞅型序列的收敛性.

下面讨论 **B** 值鞅型序列的收敛性. 首先讨论 **B** 值拟终鞅的收

敛性.

定理 2.6[25]　设 $\mathbf{B}$ 是 Banach 空间，具有 RNP，$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 是 $\mathbf{B}$ 值可积适应序列且 $X\in(C)$，则

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\|E(X_{n-1}|\mathscr{F}_n)-X_n\|<\infty\right\}\subset\{X_n\rightarrow\}.$$

类似于第二章 §4 引用的符号，$\{X_n\rightarrow\}$ 表示使 X_n 收敛的样本点构成的集合. 下面不再一一指明.

证　$Y_0=X_0, Y_n-Y_{n-1}=X_n-E(X_n|\mathscr{F}_{n-1}), n\geqslant 1,$

$Z_0=0, Z_n-Z_{n-1}=E(X_n|\mathscr{F}_{n-1})-X_{n-1}, n\geqslant 1.$

则 $X_n=Y_n+Z_n, n\in N$，其中 $Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值鞅. 对任意 $\lambda>0$，令

$$\sigma=\inf\left\{n\geqslant 0,\sum_{i=0}^{n}\|E(X_{i+1}|\mathscr{F}_i)-X_i\|>\lambda\right\},$$

$$\inf\varnothing=\infty.$$

则 $\sigma\in\overline{T}$，$Y_\sigma=\{Y_{\sigma\wedge n},\mathscr{F}_{\sigma\wedge n},n\in N\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值鞅. 对任意 $\tau\in\overline{T}$，有

$$\begin{aligned}\int_{\{\tau<\infty\}}\|Y_{\sigma\wedge\tau}\|dP&\leqslant\int_{\{\tau\wedge\sigma<\infty\}}\|Y_{\sigma\wedge\tau}\|dP\\&\leqslant\int_{\{\tau\wedge\sigma<\infty\}}\|Z_{\sigma\wedge\tau}\|dP+\int_{\{\tau\wedge\sigma<\infty\}}\|X_{\sigma\wedge\tau}\|dP\\&\leqslant\lambda+\int_{\{\tau\wedge\sigma<\infty\}}\|X_{\sigma\wedge\tau}\|dP\\&<\infty.\end{aligned}$$

即 $Y_\sigma\in(C)$，由于鞅是一致渐近鞅，故由推论 2.4 知 $Y_\sigma\in(D)$. 从而 $Y_{\sigma\wedge n}$ a.e. 收敛. 但在集合 $\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\|E(X_{i-1}|\mathscr{F}_i)-X_i\|\leqslant\lambda\right\}=\{\sigma=\infty\}$ 上，$Y_{\sigma\wedge n}=Y_n$，a.e.，$\forall\, n\in N$，于是

$$\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\|E(X_{i-1}|\mathscr{F}_i)-X_i\|\leqslant\lambda\right\}\subset\{Y_n\rightarrow\}.$$

由 λ 的任意性知

$$\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\|E(X_{i-1}|\mathscr{F}_i)-X_i\|<\infty\right\}\subset\{Y_n\rightarrow\}.$$

但在集合$\{\sum_{i=0}^{\infty}\|E(X_{i+1}|\mathscr{F}_i)-X_i\|<\infty\}$上$Y_n$收敛必有$X_n$收敛，故

$$\{\sum_{i=0}^{\infty}\|E(X_{i+1}|\mathscr{F}_i)-X_i\|<\infty\}\subset\{X_n\rightarrow\}.$$

推论 2.7 设B具有RNP，$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为(C)类B值拟终鞅，则$\{X_n,n\in N\}$ $a.e.$收敛.

下面讨论B值Mil的收敛性.

定理 2.8 设$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是B值可积适应序列，若$\{X_n,n\in N\}a.e.$收敛且$L^1$收敛，则$X$为Mil.

证 设$\{X_n,n\in N\}L^1$收敛的极限为Y，令$Y_n=(Y|\mathscr{F}_n),n\geqslant 1$. 则$\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为B值鞅. 由第五章的定理1.5知：

$$Y_n\rightarrow E(Y|\mathscr{F}_\infty)=Y\quad a.e.(L^1).$$

令$Z_n=X_n-Y_n,n\geqslant 1$，则$Z_n\rightarrow 0\ a.e.(L^1)$. 对任意$\varepsilon>0$，由$Z_n\rightarrow 0\ a.e.$知：$\exists\ p_1$使得

$$P(\sup_{q\geqslant p_1}\|Z_q\|\geqslant\varepsilon)\leqslant\varepsilon.$$

又因为$Z_n\ L^1$收敛于0，所以存在$p\geqslant p_1$，使得

$$E\|Z_n\|\leqslant\varepsilon^2,\forall\ n\geqslant p.$$

对每一固定的n，$\{E(Z_n|\mathscr{F}_q),\mathscr{F}_q,p\leqslant q\leqslant n\}$是B值鞅，由第五章的定理1.3(3)知

$$P(\sup_{p\leqslant q\leqslant n}\|E(Z_n|\mathscr{F}_q)\|\geqslant\varepsilon)\leqslant\varepsilon.$$

这样，对任意$n\geqslant p$，有

$$P(\sup_{p\leqslant q\leqslant n}\|E(Z_n|\mathscr{F}_q)-Z_q\|\geqslant 2\varepsilon)\leqslant 2\varepsilon.$$

这就证明了$\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$为Mil. 故$\{X_n=Y_n+Z_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$为Mil.

定理 2.9 设$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是B值Mil且$X\in(d)$，如果对每一$f\in\mathbf{B}^*$，有$f(X_n)\rightarrow 0\ a.e.$，则$\|X_n\|\rightarrow 0\ a.e.$，其中$B^*$为B的共轭空间.

证 设$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\in N\}$是B值Mil且$X\in(d)$. 对每

一 $f \in \mathbf{B}^*$，有 $f(X_n) \to 0\ a.e.$，但 $X_n \nrightarrow 0\ a.e.$，我们证明必有 $\lim\limits_{n\to\infty} E\|X_n\| = \infty$. 这就得到矛盾. 从而定理结论成立. 由 $X_n \nrightarrow 0\ a.e.$，则存在 $a > 0$ 及集合 $A \in \mathscr{F}$，$P(A) > 0$，使得 $\limsup \|X_n(\omega)\| > a$，$\forall\ \omega \in A$. 为证 $\lim\limits_{n\to\infty} E\|X_n\| = \infty$，先证下面事实：令 $n_1 \geqslant 1$，$\varepsilon > 0$，则存在 $n_2 \geqslant n_1$，使得对每一 $D \in \mathscr{F}_{n_1}$，$P(D) \leqslant \dfrac{P(A)}{2}$，每一 $n \geqslant n_2$，有 $E \in \mathscr{F}_{n_2}$，$P(E) < \varepsilon$，$E \cap D = \varnothing$ 且

$$\int_E \|X_n\|\, dP \geqslant \frac{aP(A)}{16}.$$

事实上，先取足够大的 $k \geqslant n_1$，使得对 $n \geqslant k$，有

$$P\left(\sup_{k\leqslant p\leqslant n} \|E(X_n|\mathscr{F}_p) - X_p\| > \frac{a}{4}\right) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1}$$

不妨设 $\varepsilon < \dfrac{P(A)}{4}$，取 $k < p_1 < p_2 < \cdots < p_l$，令

$$B_i = \{\|X_{p_i}\| > a\} - \bigcup_{j<i}\{\|X_{p_j}\| > a\}, i \leqslant l.$$

使

$$\sum_{i\leqslant l} P(B_i) > \frac{7P(A)}{8}.$$

注意 $B_i \in \mathscr{F}_{p_i}$，则存在 $\mathbf{B}^*$ 中单位球的有限子集 G. 记

$$B_i^1 = \{\exists\ f \in G, f(X_{p_i}) > a\} \cap B_i$$

使得

$$\sum_{i\leqslant l} P(B_i^1) > \frac{7P(A)}{8}.$$

注意 $B_i^1 \in \mathscr{F}_{p_i}$，由于 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是标量收敛于0的，故存在足够大的 $n_2 (\geqslant n_1^*)$，使得 $P(C) < \dfrac{\varepsilon}{2}$，其中

$$C = \left\{\exists\ f \in G, f(X_{n_2}) > \frac{a}{4}\right\}.$$

现令 $n \geqslant n_2$，$D \in \mathscr{F}_{n_1}$，$P(D) < \dfrac{P(A)}{2}$. 对 $i \leqslant l$，令

$$H_i = \left\{\|E(X_n|\mathscr{F}_{p_i}) - X_{p_i}\| > \frac{a}{4}\right\},$$

由(2.1)式有

$$P(\bigcup_{i\leqslant l} H_i) < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{P(A)}{8}.$$

对 $i \leqslant l$,令 $B_i^3 = B_i - (H_i \cup D)$,则 $B_i^3 \in \mathscr{F}_{p_i}$,且

$$\sum_{i\leqslant l} P(B_i^3) \geqslant \frac{P(A)}{4}.$$

令

$$K' = \left\{ \| E(X_n|\mathscr{F}_{n_2}) - X_{n_2} \| > \frac{a}{4} \right\}.$$

由(2.1)得 $P(K') < \frac{\varepsilon}{2}$. 令 $K = K' \cup C$,则 $K \in \mathscr{F}_{n_2}$ 且 $P(K) < \varepsilon$. 设 G 中的元素为 $f_1, f_2 \cdots, f_m$. 对 $j \leqslant m$,令

$$S_{ij} = B_i^3 \cap \{ f_j(X_{p_i}) > a, \forall\, s < j, f_s(X_{p_i}) \leqslant a \}.$$

对 $S_{ij} \in \mathscr{F}_{p_i}$,且$\{S_{ij}, j = 1, 2, \cdots, m\}$ 是 B_i^3 的一个有限分划. 因为 $S_{ij} \cap H_i = \varnothing$. 故有

$$\begin{aligned}
\int_{S_{ij}} f_j(X_n) dP &= \int_{S_{ij}} f_j\big(E(X_n|\mathscr{F}_{p_i})\big) dP \\
&> \int_{S_{ij}} \left(f_j(X_{p_i}) - \frac{a}{4} \right) dP \\
&> \frac{3a}{4} P(S_{ij}).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

又因 $S_{ij} - K \in \mathscr{F}_{n_2}$,故有

$$\int_{S_{ij}-K} f_j(X_n) dP = \int_{S_{ij}-K} f_j\big(E(X_n|\mathscr{F}_{n_2})\big) dP.$$

因为在 K 的外部有

$$\| E(X_n|\mathscr{F}_{n_2}) - X_{n_2} \| \leqslant \frac{a}{4} \text{ 及 } f_j(X_{n_2}) < \frac{a}{4}.$$

所以

$$\int_{S_{ij}-K} f_j(X_n) dP \leqslant \frac{a}{2} P(S_{ij}).$$

于是由(2.2)式有

$$\int_{S_{ij}\cap K} \| X_n \| dP > \int_{S_{ij}\cap K} f_j(X_n) dP \geqslant \frac{a}{4} P(S_{ij}).$$

对 i 与 j 求和得

$$\int_E \| X_n \| dP \geqslant \frac{a}{16} P(A).$$

其中 $E = K \cap (\bigcup_i B_i^2)$，且 $P(E) < \varepsilon, E \in \mathscr{F}_{n_2}, E \cap D = \varnothing$. 下面完全类似于第三章定理 2.3 的证明即可证得 $\lim\limits_{n\to\infty} E\| X_n \| = \infty$. 定理证毕.

定理 2.10 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值 Mil 且 $X \in (d)$，则 X 可唯一分解为

$$X_n = Y_n + Z_n, n \geqslant 1,$$

其中 $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值 L^1 有界鞅，$Z = \{Z_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值 Mil 且 $Z_n \to 0$ $a.e.$.

证 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{B}$ 值 Mil 且 $X \in (d)$，则对每一 $f \in \mathbf{B}^*$，由[81]的定理 3 知 $f(X) = \{f(X_n), \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为实值 Mil 且 $f(X) \in (d)$. 由第三章的定理 2.3 知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(X_n)$ $a.e.$ 存在且可积. 不失一般性，可设 $\mathbf{B}$ 是可分的，令 $\{x_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{B}$ 中可数稠子集. 对每一 $n \geqslant 1$，令

$$V_n = \{f \in \mathbf{B}^*, \| f \| \leqslant 1, \forall\, i \leqslant n, |f(x_i)| \leqslant \frac{1}{n}\}.$$

对每一 $x \in \mathbf{B}$，记

$$\| x \|_n = \sup\{f(x), f \in V_n\}.$$

则 $\| \cdot \|_n$ 是 $\mathbf{B}$ 上的范数且对 $x \in \mathbf{B}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} \| x \|_n = 0$. 现固定 $q \in N$，令 $h = \lim\inf \| X_n \|$. 由 Fatou 引理知 h 是可积的. 再令 $g = E(h | \mathscr{F}q)$. 注意到对每一 $f \in \mathbf{B}^*$，$\| f \| \leqslant 1$，有 $\lim\limits_{s\to\infty} f(X_s) \leqslant h$. 定义 g_n 如下：

$$g_n = \operatorname{esup}\{E(\lim_{s\to\infty} f(X_s) | \mathscr{F}q); f \in V_n\}$$

则 $g_n \leqslant g$. 序列 $\{g_n\}$ 是单调下降的. 用类似于定理 2.9 的证明方法

可证得$\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ $a.e.$(详细证明可参见[19]),固定$k>0$,由叶果洛夫定理知存在$B_k \in \mathscr{F}_q$,$P(B_k) > 1-\frac{1}{k}$,使得在B_k上g_n一致收敛于0. 现考虑如下算子:

$$T: \mathbf{B}^* \to L^\infty(B_k, \mathscr{F}_q|_{B_k}, P|_{B_k}),$$

$$T(f) = E(\lim_{t\to\infty} f(X_t) | \mathscr{F}_q).$$

将算子T限制在$\mathbf{B}^*$的单位球上是弱*-L^∞范数连续的.因此存在$L^1(B_k, \mathscr{F}_q|_{B_k}, P|_{B_k})$到$\mathbf{B}$的紧算子$V$使得$T=V^*$.因为$V$是紧的,所以由[1]知$V$是可表的,即存在有界可测函数$W^k: B_k \to \mathbf{B}$使得

$$V(\varphi) = \int \varphi W^k dP,\ \varphi \in L^1(B_k, \mathscr{F}_q|_{B_k}, P|_{B_k}).$$

于是

$$f\circ W^k = T(f), \forall f \in \mathbf{B}^*.$$

将$\{B_k, k\geqslant 1\}$不相交化($B'_k = B_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} B_j$)仍记为$\{B_k\}$.令

$$Y_q = \sum_k I_{B_k} W^k.$$

则Y^q是$\mathscr{F}q$可测的,$\|Y_q\| \leqslant g$且

$$f(Y_q) = E(\lim_{t\to\infty} f(X_t) | \mathscr{F}_q), \forall f \in \mathbf{B}^*.$$

显然$\{Y_k, \mathscr{F}_k, k\geqslant 1\}$为鞅且$L^1$有界.令

$$Z_n = X_n - Y_n, n\geqslant 1,$$

则$\{Z_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$为Mil且$\liminf E\|Z_n\| < \infty$,$Z_n$标量收敛于0,由定理2.9知$Z_n \to 0$ $a.e.$定理证毕.

推论 2.11 所有L^1有界的$\mathbf{B}$值Mil收敛的充要条件是$\mathbf{B}$具有RNP.

引理 2.12[25] 设$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n\geqslant 1\}$是$\mathbf{B}$值Mil且$X\in(C)$,则$\lim_{n\to\infty}\|X_n\|$ $a.e.$存在.

证 若结论不成立,则存在$a<b$使有$P(V_1) = \delta > 0$,其中

$$V_1 = \{\varliminf_n \|X_n\| < a < b < \varlimsup_n \|X_n\|\}.$$

易证 X 为 Mil $\Longleftrightarrow \lim\limits_{\sigma\in T}\sup\limits_{m\geq\sigma}P(\|E(X_m|\mathscr{F}_\sigma)-X_\sigma\|>\varepsilon)=0,\forall\varepsilon>0$. 于是对任意的 $0<\varepsilon<\delta$，可选取子列 $\{m_i\}$ 使有

$$\sup_{\sigma\in T(m_i)}\sup_{m\geq\sigma}P\left(\|E(X_m|\mathscr{F}_\sigma)-X_\sigma\|>\frac{b-a}{4}\right)<\frac{\varepsilon}{2^{i+3}},i\geq 1,$$

由 V_1 的定义知存在 $n_1\geq\tau_1\geq\sigma_1\geq m_1(\tau_1,\sigma_1\in T)$ 使有

$$P(V_1-\{\|X_{\sigma_1}\|>b\})<\frac{\varepsilon}{16},P(V_1-\{\|X_{\tau_1}\|<a\})<\frac{\varepsilon}{16}.$$

我们可以找到 $\mathbf{B}^*$ 的一个有限子集 G_1 使得

$$P(\{\|X_{\sigma_1}\|>b\}-H_1)<\frac{\varepsilon}{16},$$

其中 $H_1=\{\exists f\in G_1,使有 f(X_{\sigma_1})>b\}$. 令

$$A_1=H_1\cap\left\{\|E(X_{n_1}|\mathscr{F}_{\sigma_1})-X_{\sigma_1}\|\leq\frac{b-a}{4}\right\},$$

$$B_1=A_1\cap\left\{\|X_{\tau_1}\|<a,\|E(X_{n_1}|\mathscr{F}_{\tau_1})-X_{\tau_1}\|\leq\frac{b-a}{4}\right\},$$

则

$$P(V_1-A_1)<\frac{\varepsilon}{4},P(V_1A_1-B_1)<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$P(A_1)\geq P(V_1B_1)\geq P(V_1)-\frac{\varepsilon}{2}>\delta-\varepsilon,$$

若 G_1 中的元素全体为 $\{f_1,f_2,\cdots,f_{k_1}\}$，令

$$S_i=A_1\cap\{f_i(X_{\sigma_1})>b,f_j(X_{\sigma_1})\leq b,1\leq j<i\}$$

$$1\leq i\leq k_1,$$

则 $\{S_i,1\leq i\leq k_1\}$ 是 A_1 的 $\mathscr{F}_{\sigma_1}$ 可测分划，且

$$\int\limits_{A_1B_1^cS_i}\|X_{n_1}\|dP\geq\int\limits_{A_1B_1^cS_i}f_i(X_{n_1})dP+\int\limits_{B_1S_i}[f_i(X_{\tau_1})-a]dP$$

$$\geq\int\limits_{A_1B_1^cS_i}E(f_i(X_{n_1})|\mathscr{F}_{\tau_1})dP+\int\limits_{B_1S_i}(E(f_i(X_{n_1})|\mathscr{F}_{\tau_1})-\frac{b-a}{4}$$

$$-a)dP$$

$$\geq\int\limits_{A_1S_i}\left(f_i(X_{\sigma_1})-\frac{b-a}{4}\right)dP-\frac{b+3a}{4}P(B_1S_i)$$

$$\geqslant \frac{3b+a}{4}P(A_1S_i) - \frac{b+3a}{4}P(B_1S_i), 1 \leqslant i \leqslant k_1.$$

于是有

$$\int_{A_1-B_1} \| X_{n_1} \| dP = \sum_{i=1}^{k_1} \int_{A_1B_1^cS_i} \| X_{n_1} \| dP \geqslant \frac{b-a}{2}P(A_1).$$

若$(V_k, \sigma_k, \tau_k, n_k, A_k, B_k)_{1\leqslant k<i}$已给定，且

$$\max(m_k, n_{k-1}) \leqslant \sigma_k \leqslant \tau_k \leqslant n_k, \qquad \sigma_k, \tau_k \in T,$$

$$B_{k-1} \supset A_k \supset B_k, A_k \in \mathscr{F}_{\sigma_k}, B_k \in \mathscr{F}_{\tau_k},$$

$$P(V_k) \geqslant P(V_1) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\varepsilon}{2^j}, P(A_k) \geqslant P(V_k) - \frac{\varepsilon}{2^k},$$

$$\int_{A_k-B_k} \| X_{n_k} \| dP \geqslant \frac{b-a}{2}P(A_k).$$

令 $V_i = V_{i-1}B_{i-1}$，则

$$P(V_i) \geqslant P(V_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{2^{i-1}} \geqslant P(V_1) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

现在可选取 $\max(m_i, n_{i-1}) \leqslant \sigma_i \leqslant \tau_i \leqslant n_i (\sigma_i, \tau_i \in T)$ 使有

$$P(V_i - \{ \| X_{\sigma_i} \| > b\}) < \frac{\varepsilon}{2^{i+3}}, P(V_i - \{ \| X_{\tau_i} \| < a\}) < \frac{\varepsilon}{2^{i+3}}.$$

有 $\mathbf{B}^*$ 的有限子集 G_i 使得

$$P\left(\{ \| X_{\sigma_i} \| > b\} - H_i\right) < \frac{\varepsilon}{2^{i+3}},$$

其中 $H_i = \{\exists\ f \in G_i$ 使有 $f(X_{\sigma_i}) > b\}$. 令

$$A_i = H_i \cap \left\{ \| E(X_{n_i} | \mathscr{F}_{\sigma_i}) - X_{\sigma_i} \| \leqslant \frac{b-a}{4} \right\},$$

$$B_i = A_i \cap \left\{ \| X_{\tau_i} \| < a, \| E(X_{n_i} | \mathscr{F}_{\tau_i}) - X_{\tau_i} \| \leqslant \frac{b-a}{4} \right\},$$

则

$$P(V_i - A_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i-1}}, P(V_iA_i - B_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i-1}},$$

$$P(A_i) \geqslant P(V_1) - \sum_{j=1}^{i} \frac{\varepsilon}{2^j} > \delta - \varepsilon.$$

用前述相同的 方法可以证明

$$\int_{A_i - B_i} \| X_{n_i} \| dP \geqslant \frac{b-a}{2} P(A_i) > \frac{b-a}{2}(\delta - \varepsilon).$$

由归纳法可以构造一列$(V_i, \sigma_i, \tau_i, n_i, A_i, B_i)_{i\geqslant 1}$，令

$$\tau(\omega) = \begin{cases} n_i, & \omega \in A_i - B_i, i \geqslant 1, \\ \infty, & \text{其它}, \end{cases}$$

则$\tau \in T$且$E \| X_\tau \| I_{(\tau<\infty)} = \infty$，这就得到矛盾. 故引理成立.

定理 2.13 设$\mathbf{B}$是Banach空间，具有RNP，$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$是$\mathbf{B}$值Mil且$X \in (C)$，则$\{X_n, n \geqslant 1\}$ $a.e.$收敛.

证 由下面将要证明的定理2.14知$\{X_n, n \geqslant 1\}$依概率收敛，记$\operatorname{slim}_{n\to\infty} X_n = X_\infty$. 由Pettis可测性定理可以设$\mathbf{B}$是可分的，于是由Kadec-Klee定理知$\mathbf{B}$上存在与$\| \cdot \|$等价的Kadec范数$||| \cdot |||$（见文献[59]的定理 Ⅰ.2.4.4），又由引理2.12及第三章的定理2.1有

$$\lim_{n\to\infty} |||X_n||| = |||X_\infty||| \quad a.e.,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(X_n) = f(X_\infty), \quad \forall f \in \mathbf{B}^*.$$

由范数$||| \cdot |||$的Kadec性知$\{X_n, n \geqslant 1\}$ $a.e.$收敛于X_∞.

定理 2.14 设$\mathbf{B}$是Banach空间，具有RNP，$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$是$\mathbf{B}$值概率极限鞅且$X \in (C)$，则$\{X_n, n \geqslant 1\}$依概率收敛.

证 对任意的子列$\{n_k, k \geqslant 1\}$，$\{X_{n_k}, \mathscr{F}_{n_k}, k \geqslant 1\}$仍为$\mathbf{B}$值概率极限鞅. 由概率极限鞅的定义可选取子列$\{m_k, k \geqslant 1\} \subset \{n_k, k \geqslant 1\}$使得$\{X_{m_k}, \mathscr{F}_{m_k}, k \geqslant 1\}$是$\mathbf{B}$值拟终鞅且属于$(C)$类. 由推论2.7知$\{X_{m_k}, k \geqslant 1\}$ $a.e.$收敛. 若$X^1 = \{X_{n'_k}\}$和$X^2 = \{X_{n''_k}\}$是任意两个收敛子列，则可以选取一个新子列使得(i)$X_{n_k} \in \{X_{n'_k}\}$，若k是奇数；$X_{n_k} \in \{X_{n''_k}\}$，若$k$是偶数. (ii)$\{X_{n_k}\}$是$(C)$类拟终鞅. 于是$\{X_{n_k}\}$ $a.e.$收敛，从而$\lim_{k\to\infty} X_{n'_k} = \lim_{k\to\infty} X_{n''_k}$，由此知$\{X_n, n \geqslant 1\}$依概率收敛.

定理 2.15 设$\mathbf{B}$是Banach空间，具有RNP，$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n$

$\geqslant 1\}$ 是 B 值概率极限鞅，若 $X \in (d)$，则 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 依概率收敛于可积随机变量.

证明参见[82]的定理 10. 而关于 B 值渐近鞅的收敛性，Chacon and Sucheston 于 1975 年给出了如下结果，关于它的证明有兴趣的读者可参看[15]. 这里我们也略去证明.

定理 2.16 设 Banach 空间 B 具有 RNP，B^* 是可分的，则每一 (B) 类渐近鞅 $a.e.$ 弱收敛.

§3 B 值鞅型序列的局部收敛性

设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 B 值可积适应序列，其差序列记为 $D_n(X) = X_n - X_{n-1}, n \geqslant 1 (X_0 = 0)$. 如果 $\{X_n\}$ 在集合 A 上 $a.e.$ 收敛，且 $0 < P(A) < 1$，我们称这种只是在 Ω 的一个局部子集上的 $a.e.$ 收敛性为局部收敛性. 如 §2 的定理 2.6 就是一个局部收敛性的结果. 本节研究 B 值鞅型序列的局部收敛性. 我们引进下面的记号：

$$D_n^*(X) = \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \| D_k(X) \|,$$

$$D^*(X) = \sup_{1 \leqslant k < \infty} \| D_k(X) \|;$$

$$B_n(p, X) = \sum_{k=1}^{n} E(\| D_k(X) \|^p | \mathscr{F}_{k-1}),$$

$$B(p, X) = \lim_{n \to \infty} B_n(p, X);$$

$$S_n(p, X) = \sum_{k=1}^{n} \| D_k(X) \|^p,$$

$$S(p, X) = \lim_{n \to \infty} S_n(p, X).$$

C 总表示常数，在不同的地方可以是不同的值.

定理 3.1 设 B 是 p 阶光滑空间 $(1 \leqslant p \leqslant 2)$，$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 B 值可积适应序列，则

$$\left\{B(p, X) < \infty, \sum_{k=1}^{\infty} \| E(D_k(X) | \mathscr{F}_{k-1}) \| < \infty\right\} \subset \{X_n \to\}.$$

证 令 $D_n(W) = D_n(X) - E(D_n(X)|\mathscr{F}_{n-1})$,

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} D_k(W), \qquad n \geqslant 1.$$

则 $W = \{W_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 **B** 值鞅. 又

$$\| D_n(W) \|^p \leqslant 2^{p-1}(\| D_n(X) \|^p + E(\| D_n(X) \|^p | \mathscr{F}_{n-1})),$$

故

$$E(\| D_n(W) \|^p | \mathscr{F}_{n-1}) \leqslant 2^p E(\| D_n(X) \|^p | \mathscr{F}_{n-1}),$$

从而有

$$B(p,W) \leqslant 2^p B(p,X). \tag{3.1}$$

对任意 $\lambda > 0$,令

$$\tau = \inf\{n \geqslant 1, B_{n+1}(p,W) > \lambda\}, \inf\varnothing = \infty.$$

则 $\tau \in T$,且 $W_\tau = \{W_{\tau\wedge n}, \mathscr{F}_{\tau\wedge n}, n \geqslant 1\}$ 为 **B** 值鞅. 由 p 阶光滑性有

$$\begin{aligned}
E \| W_{\tau\wedge n} \|^p &= E \| \sum_{k=1}^{n} D_k(W) I_{(\tau\geqslant k)} \|^p \\
&\leqslant c \sum_{k=1}^{n} E \| D_k(W) I_{(\tau\geqslant k)} \|^p \\
&= c \sum_{k=1}^{n} E(E(\| D_k(W) I_{(\tau\geqslant k)} \|^p | \mathscr{F}_{k-1})) \\
&= cE \sum_{k=1}^{n} E(\| D_k(W) \|^p | \mathscr{F}_{k-1}) I_{(\tau\geqslant k)} \\
&= CE \sum_{k=1}^{\tau\wedge n} E(\| D_k(W) \|^p | \mathscr{F}_{k-1}) \\
&= CEB_{\tau\wedge n}(p,W) \\
&\leqslant c\lambda, \ \forall\, n \geqslant 1,
\end{aligned}$$

从而 $\sup E \| W_{\tau\wedge n} \| < \infty$. 由于 **B** 具有 RNP,故 $W_{\tau\wedge n}$ $a.e.$ 收敛. 但在集合 $\{B(p,W) \leqslant \lambda\} = \{\tau = \infty\}$ 上 $W_{\tau\wedge n} = W_n, (n \geqslant 1)$,再由 λ 的任意性知

$$\{B(p,W) < \infty\} \subset \{W_n \rightarrow\}.$$

但当 $\sum_{k=1}^{\infty}\|E(D_k(X)|\mathscr{F}_{k-1})\|<\infty$，$W_n$ 收敛的充要条件为 X_n 收敛. 故

$$\left\{B(p,W)<\infty,\sum_{k=1}^{\infty}\|E(D_k(X)|\mathscr{F}_{k-1})\|<\infty\right\}\subset\{X_n\rightarrow\},$$

结合(3.1)式知

$$\left\{B(p,X)<\infty,\sum_{k=1}^{\infty}\|E(D_k(X)|\mathscr{F}_{k-1})\|<\infty\right\}\subset\{X_n\rightarrow\}.$$

推论 3.2 设Banach空间**B**是p阶光滑的($1\leqslant p\leqslant 2$)，$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是**B**值拟终鞅，则

$$\{B(p,X)<\infty\}\subset\{X_n\rightarrow\}.$$

定理 3.3(条件三级数定理[22]) 设Banach空间**B**是p阶光滑的($1\leqslant p\leqslant 2$)，$1\leqslant\alpha\leqslant p$，$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是**B**值可积适应序列，c 是一正常数，令 A 是由下列三条件所确定的集合.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}P(\{\|D_n(X)\|\geqslant c\}|\mathscr{F}_{n-1})<\infty$,

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}E(D_n(X)I_{\{\|D_n(X)\|<c\}}|\mathscr{F}_{n-1})$ 收敛,

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}E(\|D_n(X)\|^{\alpha}I_{\{\|D_n(X)\|<c\}}|\mathscr{F}_{n-1})<\infty$,

则

$$A\subset\{X_n\rightarrow\}.$$

证 记 $B_i=\{\|D_i(X)\|\geqslant c\}$，$V_n=\sum_{i=1}^{n}[E(I_{B_i}|\mathscr{F}_{i-1})-I_{B_i}]$，$n\geqslant 1$，则$\{V_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为实值鞅且 $E(\sup|V_n-V_{n-1}|)\leqslant 1$，由第二章的推论 4.2 知

$$\{\sup V_n<\infty\}=\{V_n\rightarrow\}.$$

但由(1)知$A\subset\{\sup V_n<\infty\}$，故在$A$上$V_n$ $a.e.$ 收敛且有穷. 因此在 A 上有

$$\sum_{i=1}^{\infty}I_{B_i}<\infty，即 P(B_i,i.o.)=0.$$

从而

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| D_i(X) \| I_{\{\| D_i(X) \| \geqslant c\}} < \infty,$$

更有 $\sum_{i=1}^{\infty} D_i(X) I_{\{\| D_i(X) \| \geqslant c\}} a.e.$ 收敛. 再令

$$W_i = D_i(X) I_{\{\| D_i(X) \| < c\}} - E(D_i(X) I_{\{\| D_i(X) \| < c\}} | \mathscr{F}_{i-1}).$$

由(2)有

$$\{X_n \text{ 收敛}\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} D_i(X) I_{\{\| D_i(X) \| < c\}} \text{ 收敛} \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} W_i \text{ 收敛} \right\},$$

而 $\{W_i, \mathscr{F}_i, i \geqslant 1\}$ 为 B 值鞅差序列, 又

$$\| W_i \|^{\alpha} = \| D_i(X) I_{\{\| D_i(X) \| < c\}} - E(D_i(X) I_{\{\| D_i(X) \| < c\}} | \mathscr{F}_{i-1}) \|^{\alpha}$$

$$\leqslant (\| D_i(X) \| I_{\{\| D_i(X) \| < c\}} + E(\| D_i(X) \| I_{\{\| D_i(X) \| < c\}} | \mathscr{F}_{i-1}))^{\alpha}$$

$$\leqslant 2^{\alpha-1}(\| D_i(X) \|^{\alpha} I_{\{\| D_i(X) \| < c\}} + E(\| D_i(X) \|^{\alpha} I_{\{\| D_i(X) \| < c\}} | \mathscr{F}_{i-1})),$$

于是,

$$E(\| W_i \|^{\alpha} | \mathscr{F}_{i-1}) \leqslant 2^{\alpha} E(\| D_i(X) \|^{\alpha} I_{\{\| D_i(X) \| < c\}} | \mathscr{F}_{i-1}),$$

由(3)有

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(\| W_i \|^{\alpha} | \mathscr{F}_{i-1}) < \infty.$$

当 $1 \leqslant \alpha \leqslant p$ 时, p 光滑空间一定是 α 光滑空间, 故由推论 3.2 知

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} E(\| W_i \|^{\alpha} | \mathscr{F}_{i-1}) < \infty \right\} = \{B(\alpha, W) < \infty\}$$

$$\subset \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} W_i \text{ 收敛} \right\}.$$

从而

$$A \subset \{X_n \rightarrow\}.$$

由上述定理立即知[83]的引理 5 成立. 即

推论 3.4 设 B 为 2 阶光滑空间, $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 B 值可积适应序列, c 为一正常数, 则 $\{X_n\}$ 在由下列条件所确定的集合上 $a.e.$ 收敛.

(1) $\sum_{i=1}^{\infty} P(\{\|D_i(X)\| \geqslant c\} | \mathscr{F}_{i-1}) < \infty$,

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} E(D_i(X) I_{\{\|D_i(X)\| < c\}} | \mathscr{F}_{i-1})$ 收敛,

(3) $\sum_{i=1}^{\infty} E(\|D_i(X)\|^2 I_{\{\|D_i(X)\| < c\}} | \mathscr{F}_{i-1}) < \infty$.

注　当 $\mathbf{B} = R$ 时,上述推论即为熟知的条件三级数定理.

定理 3.5　设 $\mathbf{B}$ 为 p 阶光滑空间,$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值可积适应序列,又设 $\{\alpha_i\}$ 是一正数序列且 $1 \leqslant \alpha_i \leqslant p, i \geqslant 1$,则

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} E(\|D_i(X)\|^{\alpha_i} | \mathscr{F}_{i-1}) < \infty,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|E(D_i(X) | \mathscr{F}_{i-1})\| < \infty \Big\} \subset \{X_n \to\}.$$

证　取常数 $c \geqslant 1$,我们有

$$\begin{aligned} P(\{\|D_i(X)\| \geqslant c\} | \mathscr{F}_{i-1}) &= E(I_{\{\|D_i(X)\| \geqslant c\}} | \mathscr{F}_{i-1}) \\ &\leqslant c^{-\alpha_i} E(\|D_i(X)\|^{\alpha_i} I_{\{\|D_i(X)\| \geqslant c\}} | \mathscr{F}_{i-1}) \\ &\leqslant c^{-1} E(\|D_i(X)\|^{\alpha_i} | \mathscr{F}_{i-1}), \end{aligned}$$

故

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(\{\|D_i(X)\| \geqslant c\} | \mathscr{F}_{i-1}) \leqslant c^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} E(\|D_i(X)\|^{\alpha_i} | \mathscr{F}_{i-1}).$$

其次,

$$\begin{aligned} &\|E(D_i(X) I_{\{\|D_i(X)\| < c\}} | \mathscr{F}_{i-1})\| \\ &\quad = \|E(D_i(X) | \mathscr{F}_{i-1}) - E(D_i(X) I_{\{\|D_i(X)\| \geqslant c\}} | \mathscr{F}_{i-1})\| \\ &\quad \leqslant \|E(D_i(X) | \mathscr{F}_{i-1})\| + E(\|D_i(X)\|^{\alpha_i} | \mathscr{F}_{i-1}), \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{\infty} \|E(D_i(X) I_{\{\|D_i(X)\| < c\}} | \mathscr{F}_{i-1})\| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|E(D_i(X) | \mathscr{F}_{i-1})\| + \sum_{i=1}^{\infty} E(\|D_i(X)\|^{\alpha_i} | \mathscr{F}_{i-1}). \end{aligned}$$

最后,

$$E(\|D_i(X)\|^p I_{\{\|D_i(X)\|<c\}}|\mathscr{F}_{i-1})$$
$$\leqslant c^{p-\alpha_i}E(\|D_i(X)\|^{\alpha_i}|\mathscr{F}_{i-1})$$
$$\leqslant cE(\|D_i(X)\|^{\alpha_i}|\mathscr{F}_{i-1}),$$

故

$$\sum_{i=1}^{\infty}E(\|D_i(X)\|^p I_{\{\|D_i(X)\|<c\}}|\mathscr{F}_{i-1})$$
$$\leqslant c\sum_{i=1}^{\infty}E(\|D_i(X)\|^{\alpha_i}|\mathscr{F}_{i-1}).$$

由定理 3.3 立即知本定理成立.

定理 3.6 设 $\mathbf{B}$ 为 p 阶光滑空间,$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值可积适应序列,$\{\alpha_i\}$ 是一正数序列且 $0<\alpha_i<1,i\geqslant 1$,则

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}E(\|D_i(X)\|^{\alpha_i}|\mathscr{F}_{i-1})<\infty\right\}\subset\{X_n\rightarrow\}.$$

这个定理的证明与定理 3.5 的证明类似.这里省略其证明.

推论 3.7 设 $\mathbf{B}$ 是 p 阶光滑空间,$0<\alpha\leqslant p$,$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值拟终鞅,则

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}E(\|D_i(X)\|^{\alpha}|\mathscr{F}_{i-1})<\infty\right\}\subset\{X_n\rightarrow\}.$$

证 由定理 3.6 与推论 3.2 知推论 3.7 成立.

定理 3.8 设 $\mathbf{B}$ 为 2 阶光滑空间,$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值可积适应序列,$\{U_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为正的可预报序列,$\{\alpha_i\}$ 是正的实数序列且 $\alpha_i\geqslant 2,i\geqslant 1$,则

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}U_i<\infty,\ \sum_{i=1}^{\infty}U_i^{1-\frac{\alpha_i}{2}}E(\|D_i(X)\|^{\alpha_i}|\mathscr{F}_{i-1})<\infty,\right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{\infty}\|E(D_i(X)|\mathscr{F}_{i-1})\|<\infty\right\}\subset\{X_n\rightarrow\}.$$

证 对每一固定的 $i\geqslant 1$,令

$$Y_i=\left[E(\|D_i(X)\|^{\alpha_i}|\mathscr{F}_{i-1})\right]^{\frac{2}{\alpha_i}},$$

当 $\alpha_i>2$ 时,则

$$Y_i > U_i \Longleftrightarrow [E(\| D_i(X) \|^{\alpha_i} | \mathscr{F}_{i-1})]^{\frac{2}{\alpha_i}-1} < U_i^{1-\frac{\alpha_i}{2}},$$

于是,

$$Y_i = Y_i I_{(Y_i \leqslant U_i)} + Y_i I_{(Y_i > U_i)}$$

$$\leqslant U_i + [E(\| D_i(X) \|^{\alpha_i} | \mathscr{F}_{i-1})]^{\frac{2}{\alpha_i}-1} E(\| D_i(X) \|^{\alpha_i} | \mathscr{F}_{i-1}) I_{(Y_i > U_i)}$$

$$\leqslant U_i + U_i^{1-\frac{\alpha_i}{2}} E(\| D_i(X) \|^{\alpha_i} | \mathscr{F}_{i-1}),$$

但 $\alpha_i = 2$ 时,上述不等式仍成立,从而由

$$\sum_{i=1}^{\infty} U_i < \infty, \sum_{i=1}^{\infty} U^{1-\frac{\alpha_i}{2}} E(\| D_i(X) \|^{\alpha_i} | \mathscr{F}_{i-1}) < \infty$$

可得

$$\sum_{i=1}^{\infty} [E(\| D_i(X) \|^{\alpha_i} | \mathscr{F}_{i-1})]^{\frac{2}{\alpha_i}} < \infty.$$

由 Jensen 不等式有

$$[E(\| D_i(X) \|^2 | \mathscr{F}_{i-1})]^{\frac{\alpha_i}{2}} \leqslant E(\| D_i(X) \|^{\alpha_i} | \mathscr{F}_{i-1}),$$

故

$$E(\| D_i(X) \|^2 | \mathscr{F}_{i-1}) \leqslant [E(\| D_i(X) \|^{\alpha_i} | \mathscr{F}_{i-1})]^{\frac{2}{\alpha_i}},$$

由定理 3.5 知

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} U_i < \infty, \sum_{i=1}^{\infty} U^{1-\frac{\alpha_i}{2}} E(\| D_i(X) \|^{\alpha_i} | \mathscr{F}_{i-1}) < \infty,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| E(D_i(X) | \mathscr{F}_{i-1}) \| < \infty \Big\} \subset \{X_n \to\}.$$

推论 3.9 设 B 为 2 阶光滑空间,$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 B 值拟终鞅,$\{\alpha_i\}$ 是一正数序列且 $\alpha_i \geqslant 2, i \geqslant 1$,$\{b_n\}$ 是另一正数序列且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$,则

$$\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{1-\frac{\alpha_n}{2}} E(\| D_n(X) \|^{\alpha_n} | \mathscr{F}_{i-1}) < \infty \Big\} \subset \{X_n \to\}.$$

证 由定理 3.8 及拟终鞅的定义知推论 3.9 成立.

注　由于拟终鞅类包含了鞅类及拟鞅类，且实空间是 2 阶光滑空间，故推论 3.7 与推论 3.9 明显地改进了[84]的推论 2.2 及[44]的相应结果.

定理 3.10　设 $\mathbf{B}$ 为 p 阶光滑空间，$1 \leqslant p \leqslant 2$，$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值鞅，若下列二条件之一成立：

(1) $\sum_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{\| D_i(X) \|^\beta}{c^\beta + \| D_i(X) \|^\beta} \Big| \mathscr{F}_{i-1}\right) < \infty, 0 < \beta < 1$，

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{\| D_i(X) \|^\beta}{c \| D_i(X) \|^{\beta-1} + c^\beta} \Big| \mathscr{F}_{i-1}\right) < \infty, 1 \leqslant \beta \leqslant p$.

其中 c 为任一正常数，则 $\{X_n\}$ $a.e.$ 收敛

证　只须验证在条件(1)或条件(2)之下定理 3.3 中的条件(1)、(2)及(3)成立. 对于 $\beta > 0$，$\| D_i(X) \| \geqslant c > 0$，则有

$$\frac{2 \| D_i(X) \|^\beta}{c^\beta + \| D_i(X) \|^\beta} \geqslant 1,$$

故

$$P(\{ \| D_i(X) \| \geqslant c\} | \mathscr{F}_{i-1}) = E(I_{\{\| D_i(X) \| \geqslant c\}} | \mathscr{F}_{i-1})$$
$$\leqslant E\left(\frac{2 \| D_i(X) \|^\beta}{c^\beta + \| D_i(X) \|^\beta} \Big| \mathscr{F}_{i-1}\right),$$

由此可得

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(\{ \| D_i(X) \| \geqslant c\} | \mathscr{F}_{i-1}) < \infty.$$

对于 $\beta \geqslant 1$，$\| D_i(X) \| \geqslant c > 0$，则

$$\frac{2 \| D_i(X) \|^\beta}{c \| D_i(X) \|^{\beta-1} + c^\beta} \geqslant 1,$$

同样可得

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(\{ \| D_i(X) \| \geqslant c\} | \mathscr{F}_{i-1}) < \infty,$$

即定理 3.3 中的条件(1)成立.

其次，对 $0 < \beta < 1$，有

$$\sum_{i=1}^{\infty} c^{-1} \| E(D_i(X) I_{\{\| D_i(X) \| < c\}} | \mathscr{F}_{i-1}) \|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{\| D_i(X) \|}{c} I_{\{\| D_i(X) \| < c\}} \Big| \mathscr{F}_{i-1} \right)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{\| D_i(X) \|^{\beta}}{c^{\beta}} I_{\{\| D_i(X) \| < c\}} \Big| \mathscr{F}_{i-1} \right)$$

$$\leqslant 2 \sum_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{\| D_i(X) \|^{\beta}}{c^{\beta} + \| D_i(X) \|^{\beta}} \Bigg| \mathscr{F}_{i-1} \right) < \infty,$$

对 $\beta \geqslant 1$，由鞅性质有

$$\sum_{i=1}^{\infty} c^{-1} \| E(D_i(X) I_{\{\| D_i(X) \| < c\}} | \mathscr{F}_{i-1}) \|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{\| D_i(X) \|}{c} I_{\{\| D_i(X) \| \geqslant c\}} \Bigg| \mathscr{F}_{i-1} \right)$$

$$\leqslant 2 \sum_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{\| D_i(X) \|^{\beta-1}}{\| D_i(X) \|^{\beta-1} + c^{\beta-1}} \cdot \frac{\| D_i(X) \|}{c} I_{\{\| D_i(X) \| \geqslant c\}} \Bigg| \mathscr{F}_{i-1} \right)$$

$$\leqslant 2 \sum_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{\| D_i(X) \|^{\beta}}{c \| D_i(X) \|^{\beta-1} + c^{\beta}} \Bigg| \mathscr{F}_{i-1} \right) < \infty,$$

由此可知当(1) 或(2) 成立时，定理 3.3 中的条件(2) 成立.

最后，对 $1 \leqslant \beta \leqslant p$，有

$$\frac{\| D_i(X) \|^{\beta}}{2c^{\beta}} I_{\{\| D_i(X) \| < c\}} \leqslant \frac{\| D_i(X) \|^{\beta}}{c \| D_i(X) \|^{\beta-1} + c^{\beta}} I_{\{\| D_i(X) \| < c\}},$$

于是

$$\sum_{i=1}^{\infty} c^{-\beta} E(\| D_i(X) \|^{\beta} I_{\{\| D_i(X) \| < c\}} | \mathscr{F}_{i-1})$$

$$\leqslant 2 \sum_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{\| D_i(X) \|^{\beta}}{c \| D_i(X) \|^{\beta-1} + c^{\beta}} \Bigg| \mathscr{F}_{i-1} \right) < \infty,$$

对 $0 < \beta < 1$，任取 $1 \leqslant \alpha \leqslant p$，由于

$$\frac{\| D_i(X) \|^{\alpha}}{2c^{\alpha}} I_{\{\| D_i(X) \| < c\}}$$

$$\leqslant \frac{\| D_i(X) \|^{\beta}}{2c^{\beta}} I_{\{\| D_i(X) \| < c\}}$$

$$\leqslant \frac{\| D_i(X) \|^{\beta}}{c^{\beta} + \| D_i(X) \|^{\beta}} I_{\{\| D_i(X) \| < c\}},$$

故

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(\| D_i(X) \|^c I_{(\| D_i(X) \| < c)} | \mathscr{F}_{i-1})$$

$$\leqslant 2c^c \sum_{i=1}^{\infty} E\left(\frac{\| D_i(X) \|^\beta}{c^\beta + \| D_i(X) \|^\beta} \middle| \mathscr{F}_{i-1} \right) < \infty.$$

于是，由定理 3.3 知$\{X_n\}$ $a.e.$ 收敛.

定理 3.11[3] 设 **B** 是 p 阶光滑空间$(1 < p \leqslant 2)$，$X = \{X_n = \sum_{i=1}^{n} D_i(X), \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 **B** 值鞅，对任一 $\lambda > 0$，令 $\tau_\lambda = \inf\{n \geqslant 1, [S_n(p,X)]^{\frac{1}{p}} \geqslant \lambda\}$，$\inf\varnothing = \infty$，若满足：$\forall\ \lambda > 0$，有

$$\int_{(\tau_\lambda < \infty)} \| D_{\tau_\lambda}(X) \| dP < \infty,$$

则

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \| D_n(X) \|^p < \infty \right\} \subset \{X_n \to\}.$$

证 显然 $\tau_\lambda \in T$，从而 $\hat{X} = \{\hat{X}_n = X_{\tau_\lambda \wedge n}, \mathscr{F}_{\tau_\lambda \wedge n}, n \geqslant 1\}$ 为 **B** 值鞅，这样，

$$(S(p,\hat{X}))^{\frac{1}{p}} = \left(\| \hat{X}_1 \|^p + \sum_{k=1}^{\infty} \| \hat{X}_{k+1} - \hat{X}_k \| \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\| X_{\tau_\lambda \wedge 1} \|^p + \sum_{k=1}^{\infty} \| X_{\tau_\lambda \wedge (k+1)} - X_{\tau_\lambda \wedge k} \|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\| X_1 \|^p + \sum_{k=1}^{\tau_\lambda} \| X_{k+1} - X_k \|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

于是，在$\{\tau_\lambda = \infty\}$上，有

$$(S(p,\hat{X}))^{\frac{1}{p}} = [S(p,X)]^{\frac{1}{p}} \leqslant \lambda,$$

在$\{\tau_\lambda < \infty\}$上，有

$$(S(p,\hat{X}))^{\frac{1}{p}} = (S_{\tau_\lambda - 1}(p,X) + \| D_{\tau_\lambda}(X) \|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant (S_{\tau_\lambda - 1}(p,X))^{\frac{1}{p}} + \| D_{\tau_\lambda}(X) \|$$

$$\leqslant \lambda + \| D_{\tau_\lambda}(X) \|,$$

因此，

$$E(S(p,\hat{X}))^{\frac{1}{p}} \leqslant \lambda + \int_{\{\tau_\lambda < \infty\}} \| D_{\tau_\lambda}(X) \| dP < \infty.$$

由于B是p光滑空间，从而B是鞅p型空间，由[80]知：对任意$1 \leqslant r < \infty$，存在常数c使得

$$E\sup_n \| \hat{X}_n \|^r \leqslant cE\left(\sum_{n=1}^{\infty} \| \hat{X}_k - \hat{X}_{n-1} \|^p \right)^{\frac{r}{p}},$$

特别当$r = 1$时

$$\begin{aligned} E\sup_n \| \hat{X}_n \| &\leqslant cE\left(\sum_{n=1}^{\infty} \| \hat{X}_n - \hat{X}_{n-1} \|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= cE(S(p,\hat{X}))^{\frac{1}{p}} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

更有$\sup_n E \| \hat{X}_n \| < \infty$，又$p$光滑空间具有RNP，故$\{X_{\tau_\lambda \wedge n}\}$ $a.e.$ 收敛. 但在$\{\tau_\lambda = \infty\}$上，$X_{\tau_\lambda \wedge n} = X_n$ $a.e.$，$n \geqslant 1$，于是

$$\left\{(S(p,X))^{\frac{1}{p}} < \lambda\right\} \subset \{\tau_\lambda = \infty\} \subset \{X_n \rightarrow\},$$

由λ的任意性知

$$\{S(p,X) < \infty\} \subset \{X_n \rightarrow\}.$$

定理 3.12[85] 设B是p阶光滑空间$(1 < p \leqslant 2)$，$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$是B值可积适应序列，若$ED^*(X) < \infty$，$E\sup_n \| E(D_n(X) | \mathscr{F}_{n-1}) \| < \infty$，则

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \| D_n(X) \|^p < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \| E(D_n(X) | \mathscr{F}_{n-1}) \| < \infty \right\} \subset \{X_n \rightarrow\}.$$

证 令$D_n(W) = D_n(X) - E(D_n(X) | \mathscr{F}_{n-1})$，$n \geqslant 1$. 则$W = \{W_n = \sum_{k=1}^{n} D_k(W), \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$为B值鞅. 又因

$$\| D_n(W) \|^p \leqslant 2^{p-1}(\| D_n(X) \|^p + \| E(D_n(X) | \mathscr{F}_{n-1}) \|^p$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| D_n(W) \|^p \leqslant 2^{p-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \| D_n(X) \|^p \right.$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\|E(D_n(X)|\mathscr{F}_{n-1})\|^p\},$$

从而

$$\{\sum_{n=1}^{\infty}\|D_n(X)\|^p<\infty,\sum_{n=1}^{\infty}\|E(D_n(X)|\mathscr{F}_{n-1})\|<\infty\}$$

$$\subset\{\sum_{n=1}^{\infty}\|D_n(X)\|^p<\infty,\sum_{n=1}^{\infty}\|E(D_n(X)|\mathscr{F}_{n-1})|^p<\infty\}$$

$$\subset\{\sum_{n=1}^{\infty}\|D_n(W)\|^p<\infty\}.$$

另一方面，

$$\|D_n(W)\|\leqslant\|D_n(X)\|+\|E(D_n(X)|\mathscr{F}_{n-1})\|,$$

故

$$D^*(W)\leqslant D^*(X)+\sup\|E(D_n(X)|\mathscr{F}_{n-1})\|,$$

从而

$$ED^*(W)\leqslant ED^*(X)+E\sup\|E(D_n(X)|\mathscr{F}_{n-1})\|<\infty.$$

这样对任意停时 $\tau\in T$，总有

$$\int_{\{\tau<\infty\}}\|D_\tau(W)\|dP<\infty.$$

于是由定理 3.11 知

$$\{\sum_{n=1}^{\infty}\|D_n(W)\|^p<\infty\}\subset\{W_n\to\}.$$

故

$$\{\sum_{n=1}^{\infty}\|D_n(X)\|^p<\infty,\sum_{n=1}^{\infty}\|E(D_n(X)|\mathscr{F}_{n-1})\|<\infty\}$$

$$\subset\{W_n\to\}.$$

但

$$W_n=\sum_{k=1}^{n}D_k(W)=\sum_{k=1}^{\infty}D_k(X)-\sum_{k=1}^{n}E(D_k(X)|\mathscr{F}_{k-1})$$

$$=X_n-\sum_{k=1}^{n}E(D_k(X)|\mathscr{F}_{k-1}).$$

在 $\sum_{n=1}^{\infty}\|E(D_n(X)|\mathscr{F}_{n-1})\|<\infty$ 时，W_n 收敛的充要条件是 X_n 收敛，故

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\|D_n(X)\|^p<\infty,\sum_{n=1}^{\infty}\|E(D_n(X)|\mathscr{F}_{n-1})\|<\infty\right\}\subset\{X_n\to\}.$$

推论 3.13 设 **B** 是 p 阶光滑空间，$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是 **B** 值拟鞅，若 $ED^*(X)<\infty$，则

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\|D_n(X)\|^p<\infty\right\}\subset\{X_n\to\}$$

证 由拟鞅的定义有

$$\begin{aligned}&E\sup\|E(D_n(X)|\mathscr{F}_{n-1})\|\\&\leqslant E\sum_{n=1}^{\infty}\|E(D_n(X)|\mathscr{F}_{n-1})\|\\&=\sum_{n=1}^{\infty}E\|E(D_n(X)|\mathscr{F}_{n-1})\|<\infty,\end{aligned}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|E(D_n(X)|\mathscr{F}_{n-1})\|<\infty,\ a.e..$$

故由定理 3.12 知推论 3.13 成立.

§4 B 值鞅型序列的变换及其收敛性

设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是 **B** 值可积适应序列，其差序列记为 $\{D_n(X)\}$，$(X_0=0)$，$V=\{V_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为实值可预报序列. 令 $Y_n=\sum_{k=1}^{n}V_kD_k(X)$，$n\geqslant 1$. 称 $Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是 X 关于 V 的变换. 若 X 是鞅（相应地拟鞅，拟终鞅，一致渐近鞅，Mil，概率极限鞅等等），则称 Y 是 X 关于 V 的鞅变换（相应地拟鞅变换，拟终鞅变换，一致渐近鞅变换，Mil 变换，概率极限鞅变换，等等）.

定理 4.1[85] 设 Banach 空间 **B** 是 p 阶可光滑的（$1\leqslant p\leqslant$

2), $X=\{X_n=\sum_{k=1}^{n}D_k(X),\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是B值可积适应序列, $V=\{V_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是实值可预报序列, $Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是 X 关于 V 的变换，则

$$\left\{B(p,X)<\infty,V^*<\infty,\sum_{k=1}^{\infty}|V_k|\,\|E(D_k(X)|\mathscr{F}_{k-1})\|<\infty\right\}$$
$$\subset\{Y_n\rightarrow\}.$$

证　令 $D_n(W)=D_n(Z)-E(D_n(X)|\mathscr{F}_{n-1}),n\geqslant 1$，则 $W=\{W_n=\sum_{k=1}^{n}D_k(X),\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是B值鞅，记 $Y'=\{Y'_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为 W 关于 V 的变换，由定理 3.1 的证明知

$$B(p,W)\leqslant 2^pB(p,X). \tag{4.1}$$

先设 $V^*\leqslant 1$，对任意常数 $\lambda>0$，令

$$\tau=\inf\{n\geqslant 1,B_{n+1}(p,W)>\lambda\},\inf\varnothing=\infty.$$

则 $\tau\in\overline{T}$，于是 $W_\tau=\{W_{\tau\wedge n},\mathscr{F}_{\tau\wedge n},n\geqslant 1\}$ 与 $Y'_\tau=\{Y'_{\tau\wedge n},\mathscr{F}_{\tau\wedge n},n\geqslant 1\}$ 均为B值鞅. 用第五章的定理得 3.5 得

$$\begin{aligned}
\|Y'_{\tau\wedge n}\|^p&=E\left\|\sum_{k=1}^{n}D_k(Y')I_{\{\tau\geqslant k\}}\right\|^p\\
&\leqslant c\sum_{k=1}^{n}E\|D_k(Y')I_{\{\tau\geqslant k\}}\|^p\\
&\leqslant c\sum_{k=1}^{n}E\|D_k(W)I_{\{\tau\geqslant k\}}\|^p\\
&=c\sum_{k=1}^{n}E(E(\|D_k(W)I_{\{\tau\geqslant k\}}\|^p|\mathscr{F}_{k-1}))\\
&=cE\sum_{k=1}^{n}E(\|D_k(W)\|^p|\mathscr{F}_{k-1})I_{\{\tau\geqslant k\}}\\
&=cE\sum_{k=1}^{\tau\wedge n}E(\|D_k(W)\|^p|\mathscr{F}_{k-1})\\
&=cEB_{\tau\wedge n}(p,W)\\
&\leqslant c\lambda,\forall\ n\geqslant 1.
\end{aligned}$$

从而$\sup E\|Y'_{\tau\wedge n}\|<\infty$，由于**B**具有RNP，故$Y'_{\tau\wedge n}$ a.e. 收敛. 但在$\{B(p,W)\leqslant\lambda\}=\{\tau=\infty\}$上$Y'_n=Y'_{\tau\wedge n}$ a.e. $(n\geqslant 1)$，由λ的任意性知

$$\{B(p,W)<\infty\}\subset\{Y'_n\rightarrow\}.$$

对一般的$V=\{V_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$，令$V'_n=c^{-1}V_nI_{\{|V_n|\leqslant c\}},n\geqslant 1,\forall c>0$. 则$V'=\{V'_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$仍为实值可预报序列且$V'^*\leqslant 1$. 令$Y^{(c)}=\{Y_n^{(c)},\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$为$W$关于$V'$的变换，则由上述证明知

$$\{B(p,W)<\infty\}\subset\{Y_n^{(c)}\rightarrow\}.$$

但在$\{V^*\leqslant c\}$上$Y'_n=cY_n^{(c)},\forall n\geqslant 1$，故

$$\{B(p,W)<\infty,V^*\leqslant c\}\subset\{Y'_n\rightarrow\}.$$

而

$$\begin{aligned}Y'_n&=\sum_{k=1}^{n}V_kD_k(W)\\&=\sum_{k=1}^{n}V_kD_k(X)-\sum_{k=1}^{n}V_kE(D_k(X)|\mathscr{F}_{k-1})\\&=Y_n-\sum_{k=1}^{n}V_kE(D_k(X)|\mathscr{F}_{k-1}).\end{aligned}$$

但当$V^*\leqslant c$及$\sum_{k=1}^{\infty}|V_k|\,\|E(D_k(X)|\mathscr{F}_{k-1})\|<\infty$时$Y'_n$收敛必有$Y_n$收敛，由$c$的任意性有

$$\begin{aligned}\Big\{B(p,W)<\infty,V^*<\infty,\sum_{k=1}^{\infty}|V_k|&\\ \times\|E(D_k(X)|\mathscr{F}_{k-1})\|<\infty\Big\}&\\ \subset\{Y_n\rightarrow\},&\end{aligned}$$

再用(4.1)式立即得

$$\begin{aligned}\Big\{B(p,X)<\infty,V^*<\infty,\sum_{k=1}^{\infty}|V_k|&\\ \times\|E(D_k(X)|\mathscr{F}_{k-1})\|<\infty\Big\}&\\ \subset\{Y_n\rightarrow\}.&\end{aligned}$$

推论 4.2 设Banach空间**B**是p阶可光滑的$(1\leqslant p\leqslant 2)$，$X$

$= \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 **B** 值拟终鞅，$V = \{V_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是实值可预报序列，$Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 X 关于 V 的拟终鞅变换，则

$$\{B(p, X) < \infty, V^* < \infty\} \subset \{Y_n \to\}.$$

推论 4.3 设 Banach 空间 **B** 是 p 阶可光滑的 $(1 < p \leqslant 2)$，$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 **B** 值可积适应序列，$V = \{V_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是实值可预报序列，$Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 X 关于 V 的变换. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |V_n|^q < \infty$, a.e.（其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$），则

$$\{B(p, X) < \infty\} \subset \{Y_n \to\}.$$

证　因为 $|V_n| \to 0$, a.e.，从而 $\sup |V_n| < \infty$, a.e.. 由序列的 Hölder 不等式及条件期望的 Jensen 不等式有

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} |V_k| \, \| E(D_k(X) | \mathscr{F}_{k-1}) \| \\
&\leqslant \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |V_k|^q \Big)^{\frac{1}{q}} (E \| D_k(X) \|^p | \mathscr{F}_{k-1}))^{\frac{1}{p}} \\
&= \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |V_k|^q \Big)^{\frac{1}{q}} (B(p, X))^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

故

$$\{B(p, X) < \infty\} \subset \{Y_n \to\}.$$

推论 4.4 设 Banach 空间 **B** 是 p 阶可光滑的 $(1 < p \leqslant 2)$，$X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 **B** 值可积适应序列，则

$$\{B(p, X) < \infty\} \subset \{\frac{X_n}{n} \text{ 收敛于 } 0\}.$$

证　取 $V_n = \frac{1}{n}, n \geqslant 1$. 则 $V = \{V_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为实值可预报序列，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q} < \infty$，由推论 4.3 知

$$\{B(p, X) < \infty\} \subset \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - X_{k-1}}{k} \to \Big\}.$$

再用 Kronecker 定理[86] 知

$$\{B(p,X) < \infty\} \subset \left\{\frac{X_n}{n}\text{ 收敛于 }0\right\}.$$

定理 4.5 设 $\mathbf{B}$ 是Banach空间，$1 \leqslant p \leqslant 2$，则下列陈述等价：

(1) $\mathbf{B}$ 是 p 阶可光滑的；

(2) 对任何 $\mathbf{B}$ 值可积适应序列 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$，任何实值可预报序列 $V = \{V_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$，若 $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 X 关于 V 的变换，则

$$\left\{B(p,X) < \infty, V^* < \infty, \sum_{k=1}^{\infty} |V_k| \, \| E(D_k(X) | \mathscr{F}_{k-1}) \| < \infty\right\} \subset \{Y_n \to\};$$

(3) 对任何 $\mathbf{B}$ 值拟终鞅 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$，任何实值可预报序列 $V = \{V_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$，若 $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 X 关于 V 的变换，则

$$\{B(p,X) < \infty, V^* < \infty\} \subset \{Y_n \to\};$$

(4) 对任何 $\mathbf{B}$ 值鞅 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$，有

$$\{B(p,X) < \infty\} \subset \{X_n \to\}.$$

证 (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4) 为显然. 下面证(4)⇒(1). 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{B}$ 值鞅且满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E\| D_n(X) \|^p}{n^p} < \infty. \tag{4.2}$$

记 $X'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{D_k(X)}{k}, n \geqslant 1$. 则 $X' = \{X'_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值鞅且 $EB(p,X') = E\left(\sum_{k=1}^{\infty} E(\| D_k(X') \|^p | \mathscr{F}_{k-1})\right) = \sum_{k=1}^{\infty} E\| D_k(X') \|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E\| D_k(X) \|^p}{k^p} < \infty$，故 $B(p,X') < \infty$, $a.e.$，由(4) 知 $X'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{D_k(X)}{k}$ $a.e.$ 收敛. 由 Kronecker 定理知 $\frac{X_n}{n} \to 0$ $a.e.$. 由第五章的定理 3.5 知 $\mathbf{B}$ 是 p 阶可光滑的.

定理 4.6[87] 设 $X=\{X_n=\sum_{k=1}^{n}D_k(X),\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为B值鞅，对任一$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 停时 τ，有

$$\int_{\{\tau<\infty\}}\|D_\tau(X)\|dP<\infty,S(p,X)=\sum_{n=1}^{\infty}\|D_n(X)\|^p,p\geqslant 1.$$

则对 $K>0$，$D_i(X)$ 可以分解为

$$D_i(X)=D_i(W)+D_i(Y)+D_i(Z),i\geqslant 1,$$

其中$\{D_i(W),\mathscr{F}_i,i\geqslant 1\}$，$\{D_i(Y),\mathscr{F}_i,i\geqslant 1\}$，$\{D_i(Z),\mathscr{F}_i,i\geqslant 1\}$ 均为 B 值鞅值序列且

(1) $P(D^*(W)>0)\leqslant\frac{E(S(p,X))^{\frac{1}{p}}}{K}$ 及

$$(S(p,X))^{\frac{1}{p}}\leqslant K\Rightarrow D^*(W)=0,$$

(2) $E(\sum_{i=1}^{\infty}\|D_i(Y)\|)<\infty$，

(3) $ES(p,Z)<\infty$.

证 任意 $K>0$ 固定，令

$$\tau=\inf\left\{n\geqslant 1,(S_n(p,X))^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}\|D_i(X)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}>K\right\},$$

$$\inf\varnothing=\infty,$$

则 $\tau\in\overline{T}$. 对 $i\geqslant 1$，令

$$D_i(W)=D_i(X)I_{\{\tau<i\}},$$

$$D_i(Y)=D_i(X)I_{\{\tau=i\}}-E(D_i(X)I_{\{\tau=i\}}|\mathscr{F}_{i-1}),$$

$$D_i(Z)=D_i(X)I_{\{\tau>i\}}-E(D_i(X)I_{\{\tau>i\}}|\mathscr{F}_{i-1}),$$

显然$\{D_i(W),\mathscr{F}_i,i\geqslant 1\}$，$\{D_i(Y),\mathscr{F}_i,i\geqslant 1\}$，$\{D_i(Z),\mathscr{F}_i,i\geqslant 1\}$ 均为 B 值鞅差序列且

$$D_i(X)=D_i(W)+D_i(Y)+D_i(Z),i\geqslant 1.$$

而$(S(p,X))^{\frac{1}{p}}\leqslant K\Rightarrow(S_n(p,X))^{\frac{1}{p}}\leqslant K,(\forall\ n\geqslant 1)\Rightarrow\tau=\infty$，故由 $D_i(W)$ 的定义知 $D^*(W)=\sup_{i\geqslant 1}\|D_i(W)\|=0$. 另一方面，

$$P(D^*(W)>0)\leqslant P(\tau<\infty)=P((S(p,X))^{\frac{1}{p}}>K)$$

$$\leqslant \frac{E(S(p,X))^{\frac{1}{p}}}{K},$$

这就证明了(1)成立.

$$E\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\|D_i(Y)\|\Big)\leqslant E\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\|D_i(X)I_{\tau=i}\|\Big)$$

$$+E\Big(\sum_{i=1}^{\infty}E(\|D_i(X)I_{\{\tau=i\}}\|\mid\mathscr{F}_{i-1})\Big)$$

$$\leqslant 2\sum_{i=1}^{\infty}E\|D_i(X)\|I_{\{\tau=i\}}$$

$$=2E\|D_\tau(X)\|I_{\{\tau<\infty\}}<\infty,$$

这就证明了(2)成立.

对每一$i\geqslant 1$,由 Jensen 不等式有

$$E\|D_i(X)\|^p=E\|D_i(X)\|I_{\{\tau>i\}}$$

$$-E(D_i(X)I_{\{\tau>i\}}\mid\mathscr{F}_{i-1})\|^p$$

$$\leqslant 2^pE\|D_i(X)\|^pI_{\{\tau>i\}},$$

故

$$ES(p,Z)=E\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\|D_i(Z)\|^p\Big)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}E\|D_i(Z)\|^p$$

$$\leqslant 2^p\sum_{i=1}^{\infty}E\|D_i(X)\|^pI_{\{\tau>i\}}$$

$$=2^pE\sum_{i=1}^{\infty}\|D_i(X)\|^pI_{\{\tau>i\}}$$

$$=2^pE\Big[\Big(\sum_{i=1}^{\tau-1}\|D_i(X)\|^p\Big)I_{\{\tau<\infty\}}$$

$$+\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\|D_i(X)\|^p\Big)I_{\{\tau=\infty\}}\Big]$$

$$\leqslant 2^pK^p<\infty.$$

这就证明了(3). 定理证毕.

定理 4.7 设Banach空间$\mathbf{B}$为p阶光滑空间$(1\leqslant p\leqslant 2)$,$X$

$=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为(D)类 **B** 值鞅，$V=\{V_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为实值可预报序列，$Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是 X 关于 V 的鞅变换，则

$$\{S(p,Z)<\infty,V^*<\infty\}\subset\{Y_n\to\}.$$

证 对任意常数 L，令

$$\tau=\inf\{n\geqslant 1,\ \|X_n\|\geqslant L\},\inf\varnothing=\infty.$$

则 τ 是$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 停时. 再令

$$D_i(R)=V_iD_i(X)I_{(\tau\geqslant i)}I_{(|V_i|\leqslant L)},i\geqslant 1.$$

因对每一 $i\geqslant 1,V_iI_{(\tau\geqslant i)}I_{(|V_i|\leqslant L)}$ 是 $\mathscr{F}_{i-1}$ 可测的，所以 $E(D_i(R)|\mathscr{F}_{i-1})=V_iI_{(\tau\geqslant i)}I_{(|V_i|\leqslant L)}E(D_iX|\mathscr{F}_{i-1})=0$. 因此 $R\equiv\{R_n=\sum_{k=1}^{n}D_k(R),\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为 **B** 值鞅. 又对每一 $i\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\|D_i(R)\|&\leqslant L\|D_i(X)\|I_{(\tau\geqslant i)}=L\|D_i(X)\|I_{(\tau=i)}\\&\quad+L\|D_i(X)\|I_{(\tau>i)}\\&\leqslant L\|D_\tau(X)\|I_{(\tau<\infty)}+LI_{(\tau>i)}(\|X_i\|\\&\quad+\|X_{i-1}\|)\\&\leqslant L(\|X_\tau\|+\|X_{\tau-1}\|)I_{(\tau<\infty)}+2L^2\\&\leqslant L\|X_\tau\|I_{(\tau<\infty)}+3L^2,\end{aligned}$$

这样，对任意$\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 停时 σ，有

$$\|D_\sigma(R)\|I_{(\sigma<\infty)}\leqslant L\|X_\tau\|I_{(\tau<\infty)}+3L^2$$

又因对 **B** 值鞅(D) 条件与(C) 条件等价，所以

$$E\|D_\sigma(R)\|I_{(\sigma<\infty)}\leqslant LE\|X_\tau\|I_{(\tau<\infty)}+3L^2<\infty,$$

应用定理 4.6 得：$\forall K>0,1\leqslant p\leqslant 2,D_i(R)$ 可分解为

$$D_i(R)=D_i(W)+D_i(Y)+D_i(Z),\forall i\geqslant 1.$$

其中$\{D_i(W)\}$、$\{D_i(Y)\}$、$\{D_i(Z)\}$ 均为 **B** 值鞅差序列，且当

$$S(p,R)=\sum_{i=1}^{\infty}\|D_i(R)\|^p\leqslant K^p$$

时，有

$$\sup_{i\geqslant 1}\|D_i(W)\|=0,E\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\|D_i(Y)\|\Big)<\infty,$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|D_i(Z)\|^p\right)<\infty.$$

令

$$A_K=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\|D_i(R)\|^p\leqslant K^p\right\},$$

则在 A_K 上，$\sup_{i\geqslant 1}\|D_i(W)\|=0$，因此，$\sum_{i=1}^{\infty}D_i(W)$ $a.e.$ 收敛. 由 $E\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|D_i(Y)\|\right)<\infty$ 知 $\sum_{i=1}^{\infty}D_i(Y)$ $a.e.$ 收敛. 又由 **B** 是 p 阶光滑空间，故存在常数 c 使得

$$\begin{aligned}E\left\|\sum_{i=1}^{n}D_i(Z)\right\|&\leqslant\left(E\left\|\sum_{i=1}^{n}D_i(Z)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(c\left(\sum_{i=1}^{n}E\|D_i(Z)\|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant c\left(E\sum_{i=1}^{\infty}\|D_i(Z)\|^p\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

因此

$$\sup_{n\geqslant 1}E\left\|\sum_{i=1}^{n}D_i(Z)\right\|\leqslant c\left(E\sum_{i=1}^{\infty}\|D_i(Z)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

由于 **B** 具有 RNP，从而 $\sum_{i=1}^{\infty}D_i(Z)$ $a.e.$ 收敛. 这样，在 A_K 上 $\sum_{i=1}^{\infty}D_i(R)$ $a.e.$ 收敛. 但是

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|D_i(R)\|^p\leqslant L^p\sum_{i=1}^{\infty}\|D_i(X)\|^p,$$

于是

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\|D_i(X)\|^p<\infty\right\}\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k.$$

令

$$B_L=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\|D_i(X)\|^p<\infty,\sup_{n\geqslant 1}|V_n|\leqslant L,\sup_{n\geqslant 1}\|X_n\|<L\right\},$$

由 $D_i(R)$ 及 τ 的定义知：在 B_L 上 $Y_n = \sum_{i=1}^{n} V_i D_i(X) = \sum_{i=1}^{n} D_i(R)$ $a.e.$ 收敛，而

$$\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \| D_i(X) \|^p < \infty, \sup_{n\geqslant 1}|V_n| < \infty, \sup_{n\geqslant 1}\| X_n \| < \infty\right\}$$

$$= \bigcup_{L=1}^{\infty} B_L,$$

又 $\{\| X_n \|, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为实值非负下鞅，由下鞅收敛定理知：$\lim_{n\to\infty}\| X \|$ $a.e.$ 存在且可积，所以 $\sup_{n\geqslant 1}\| X_n \| < \infty$ $a.e.$，故

$$\{S(p,X) < \infty, V^* < \infty\} \subset \{Y_n \to\}.$$

定理 4.8 设 **B** 为 p 阶光滑空间 $(1 \leqslant p \leqslant 2)$，$X = \{X_n = \sum_{i=1}^{n} D_i(X), \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 **B** 值适应序列，$V = \{V_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为实值适应序列，$\{b_n\}$ 为正的实数序列且 $b_n \uparrow \infty (n \to \infty)$，令

$$X_{n_i} = V_i D_i(X) I_{\{|V_i| \| D_i(X) \| \leqslant b_n\}}, 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$X_{nn} = \sum_{i=1}^{n} X_{n_i}.$$

若以下条件满足：

(1) $\sum_{i=1}^{n} P(|V_i| \| D_i(X) \| > b_n) \to 0$,

(2) $b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} E(X_{n_i}|\mathscr{F}_{i-1}) \xrightarrow{P} 0$,

(3) $b_n^{-p}\sum_{i=1}^{n} E\| X_{n_i} - E(X_{n_i}|\mathscr{F}_{i-1}) \|^p \to 0.$

则

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i D_i(X)}{b_n} \xrightarrow{P} 0.$$

证 由(1)有

$$P\left[\frac{X_{nn}}{b_n} \neq \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i D_i(X)}{b_n}\right]$$

$$= P\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_{n_i}}{b_n} \neq \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i D_i(X)}{b_n}\right]$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} P(X_{n_i} \neq V_i D_i(X))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(|V_i| \, \| D_i(X) \| > b_n) \to 0,$$

要证

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i D_i(X)}{b_n} \xrightarrow{P} 0, \text{只须证} \frac{X_{nn}}{b_n} \xrightarrow{P} 0.$$

但由(2)知

$$b_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} E(X_{n_i} | \mathscr{F}_{i-1}) \xrightarrow{P} 0,$$

故只须证

$$b_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} [X_{n_i} - E(X_{n_i} | \mathscr{F}_{i-1})] \xrightarrow{P} 0.$$

但注意到$\{(X_{n_i} - E(X_{n_i} | \mathscr{F}_{i-1})), \mathscr{F}_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$为 B 值鞅差序列，这样由 p 光滑性，对任意 $\varepsilon > 0$，有

$$P(\| b_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} [X_{n_i} - E(X_{n_i} | \mathscr{F}_{i-1})] \| > \varepsilon)$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^p b_n^p} E \| \sum_{i=1}^{n} (X_{n_i} - E(X_{n_i} | \mathscr{F}_{i-1})) \|^p$$

$$\leqslant \frac{c}{\varepsilon^p b_n^p} \sum_{i=1}^{n} E \| X_{n_i} - E(X_{n_i} | \mathscr{F}_{i-1}) \|^p$$

再由(3)立即得

$$b_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} [X_{n_i} - E(X_{n_i} | \mathscr{F}_{i-1})] \xrightarrow{P} 0.$$

这就证明了定理成立.

注 由于实空间是 2 阶光滑的，取 $V_n = 1, n \geqslant 1$，则由上述定理立即推知[88]的定理 2.13 成立.

定理 4.9 设 $\mathbf{B}$ 为 p 阶光滑空间($1 < p \leqslant 2$),$X = \{X_n = \sum_{i=1}^{n} D_i(X), \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值鞅,$V = \{V_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为实值可预报序列,令 $1 \leqslant q < p$,若 $\{|V_n|^q \| D_n(X) \|^q\}$ 一致可积,则

$$E \frac{\| \sum_{i=1}^{n} V_i D_i(X) \|^q}{n} \to 0 (n \to \infty).$$

证　令 $\varepsilon > 0$,取 $\lambda > 0$ 充分大,使得对一切 $n \geqslant 1$,有

$$E|V_n|^q \| D_n(X) \|^q I_{(|V_n| \| D_n(X) \| > \lambda)} < \varepsilon, \forall n \geqslant 1.$$

令

$$Y_n = V_n D_n(X) I_{(|V_n| \| D_n(X) \| \leqslant \lambda)},$$

$$Z_n = V_n D_n(X) I_{(|V_n| \| D_n(X) \| > \lambda)}.$$

于是

$$V_n D_n(X) = Y_n + Z_n, n \geqslant 1.$$

显然,$\{\sum_{i=1}^{n} V_i D_i(X), \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值鞅.由于 $\mathbf{B}$ 为 p 阶光滑空间,由[89]知,存在常数 c,使得

$$\begin{aligned} E \| \sum_{i=1}^{n} V_i D_i(X) \|^q &\leqslant cE\Big(\sum_{i=1}^{n} \| V_i D_i(X) \|^p \Big)^{\frac{q}{p}} \\ &= cE\Big(\sum_{i=1}^{n} (\| Y_i \|^p + \| Z_i \|^p) \Big)^{\frac{q}{p}} \\ &\leqslant c\Big[E\Big(\sum_{i=1}^{n} \| Y_i \|^p \Big)^{\frac{q}{p}} + E\Big(\sum_{i=1}^{n} \| Z_i \|^p \Big)^{\frac{q}{p}}\Big], \end{aligned}$$

由于 $\| Y_i \| \leqslant \lambda$ 及 $(\sum_{i=1}^{n} \| Z_i \|^p)^{\frac{q}{p}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \| Z_i \|^q = \sum_{i=1}^{n} |V_i|^q \| D_i X \|^q I_{(|V_i| \| D_i(X) \| > \lambda)}$.

于是,

$$E \| \sum_{i=1}^{n} V_i D_i(X) \|^q \leqslant c[(n\lambda^p)^{\frac{q}{p}} + n\varepsilon],$$

因此,

$$n^{-1}E\left\|\sum_{i=1}^{n}V_iD_i(X)\right\|^q\leqslant c[\lambda^q n^{\frac{q}{p}-1}+\varepsilon].$$

令 $n\to\infty$ 得知：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}n^{-1}E\left\|\sum_{i=1}^{n}V_iD_i(X)\right\|^q\leqslant c\varepsilon.$$

再由 ε 的任意性知：$\lim\limits_{n\to\infty}E\dfrac{\left\|\sum_{i=1}^{n}V_iD_i(X)\right\|^q}{n}=0$. 定理证毕.

由定理 4.9 立即知下面的推论成立.

推论 4.10 设 B 为 2 阶光滑空间，$X=\{X_n=\sum_{i=1}^{n}D_i(X),\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为 B 值鞅，对 $1\leqslant q<2$，$\{\|D_n(X)\|^q\}$ 一致可积，则

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n^{\frac{1}{q}}}\xrightarrow{L^q}0.$$

注 当 $\mathbf{B}=\mathbf{R}$ 时，上述推论即为[88]的定理 2.22.

定理 4.11 设 B 为 p 阶光滑空间 $(1\leqslant p\leqslant 2)$，$X=\{X_n=\sum_{i=1}^{n}D_i(X),\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为 B 值鞅，$V=\{V_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为实值可预报序列，如果对某个 $q\geqslant 1$ 有 (H) 成立：

$$(H):\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-p}(a_n^p-a_{n-1}^p)^{-(q-1)}E|V_n|^{pq}\|D_n(X)\|^{pq}<\infty,$$

其中 $\{a_n\}$ 为一递增正实数序列且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty(a_0=0)$. 则

(1) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}V_iD_i(X)}{a_n}\xrightarrow{L^{pq}}0$,

(2) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}V_iD_i(X)}{a_n}\longrightarrow 0,a.e.$

证 (1) 首先注意到 $\{\sum_{i=1}^{n}V_iD_i(X),\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为 B 值鞅，当

$q=1$ 时，由 p 阶光滑性，存在常数 c 使得

$$\frac{E\left\|\sum_{i=1}^{n}V_iD_i(X)\right\|^p}{a_n^p}\leqslant ca_n^{-p}\sum_{i=1}^{n}E|V_i|^p\|D_i(X)\|^p,$$

由假设条件及 Kronecker 引理即得

$$\frac{E\left\|\sum_{i=1}^{n}V_iD_i(X)\right\|^p}{a_n^p}\to 0\ (n\to\infty).$$

当 $q>1$ 时，令 $h=(q-1)^{-1}q$，由[89]知：存在常数 $c>0$，使得

$$\frac{E\left\|\sum_{i=1}^{n}V_iD_i(X)\right\|^{pq}}{a_n^{pq}}\leqslant\frac{cE\left(\sum_{i=1}^{n}(|V_i|\,\|D_i(X)\|)^p\right)^{\frac{pq}{p}}}{a_n^{pq}}$$

$$=ca_n^{-pq}E\left(\sum_{i=1}^{n}|V_i|^p\|D_i(X)\|^p\right)^q$$

$$=ca_n^{-pq}E\Big[\sum_{i=1}^{n}(a_i^p-a_{i-1}^p)^{\frac{1}{h}}(a_i^p-a_{i-1}^p)^{-\frac{1}{h}}|V_i|^p\|D_i(X)\|^p\Big]^q$$

$$\leqslant ca_n^{-pq}E\Big\{\Big[\sum_{i=1}^{n}((a_i^p-a_{i-1}^p)^{\frac{1}{h}})^h\Big]^{\frac{1}{h}}\Big[\sum_{i=1}^{n}((a_i^p-a_{i-1}^p)^{-\frac{1}{h}}|V_i|^p\|D_i(X)\|^p)^q\Big]^{\frac{1}{q}}\Big\}^q$$

$$=ca_n^{-pq}E\Big[(a_n^p)^{q-1}\sum_{i=1}^{n}(a_i^p-a_{i-1}^p)^{-(q-1)}|V_i|^{pq}\|D_i(X)\|^{pq}\Big]$$

$$=ca_n^{-p}\sum_{i=1}^{n}(a_i^p-a_{i-1}^p)^{-(q-1)}E|V_i|^{pq}\|D_i(X)\|^{pq},$$

再利用题设条件及 Kronecker 引理可知：

$$\frac{E\left\|\sum_{i=1}^{n}V_iD_i(X)\right\|^{pq}}{a_n^{pq}}\longrightarrow 0\quad(n\to\infty).$$

这就证明了(1)成立. 由[90]立即知(2)成立.

推论 4.12 设 B 为 p 阶光滑空间($1\leqslant p\leqslant 2$)，$X=\{X_n=$

$\sum_{i=1}^{n} D_i(X), \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 **B** 值鞅, $V = \{V_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为实值可预报序列，若对某 $q \geqslant 1$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{[1-q(p-1)]} E V_n^{pq} \| D_n(X) \|^{pq} < \infty,$$

则

(1) $$\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i D_i(X)}{n} \xrightarrow{L^{pq}} 0,$$

(2) $$\frac{\sum_{i=1}^{n} V_i D_i(X)}{n} \longrightarrow 0, \ a.e..$$

证 当 $p = 1$ 时，对任意 $q \geqslant 1$，显然有

$$\frac{(n^p - (n-1)^p)^{-(q-1)}}{n^p} \leqslant n^{[1-q(p-1)]},$$

当 $1 < p \leqslant 2$ 时，利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^p - (n-1)^p)^{-1} n^{p-1} = \frac{1}{p} < 1$，容易证明：对一切 $q \geqslant 1$，存在正整数 K，当 $n \geqslant K$ 时有

$$\frac{(n^p - (n-1)^p)^{-(q-1)}}{n^p} \leqslant n^{[1-q(p-1)]},$$

在定理 4.11 中取 $a_n = n$，则定理中的条件成立，从而由定理 4.11 立即知本推论成立.

下面讨论概率极限鞅与相邻极限鞅的变换及其收敛性.

定理 4.13 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 **B** 值可积适应序列，$V = \{V_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是实值可预报序列，$Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 X 关于 V 的变换，若 $\sum_{i=1}^{\infty} (E|V_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty (1 < p < \infty)$，$\{\| X_n \|\}$ 一致绝对连续，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，且 $\| E(X_n | \mathscr{F}_{n-1}) - X_{n-1} \| \xrightarrow{P} 0 (n \to \infty)$，则 Y 为 **B** 值拟鞅.

证 $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 **B** 值可积适应序列是显然的. 对任意 $\varepsilon > 0$，令

$$R(i) = \{\| E(X_i|\mathscr{F}_{i-1}) - X_{i-1} \| < \varepsilon\},$$
$$S(i) = \{\| E(X_i|\mathscr{F}_{i-1}) - X_{i-1} \| > \varepsilon\}.$$

由于 $\sum_{i=1}^{\infty}(E|V_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$，故存在正整数 M_1，当 $m \geqslant M_1$ 时，$\sum_{i=m}^{\infty}(E|V_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$. 于是

$$\sum_{i=m}^{\infty}\int_{R(i)}|V_i| \, \| E(X_i|\mathscr{F}_{i-1}) - X_{i-1} \| dP$$
$$\leqslant \varepsilon\sum_{i=m}^{\infty}\int_{R(i)}|V_i|dP$$
$$\leqslant \varepsilon\sum_{i=m}^{\infty}\int_{\Omega}|V_i|dP$$
$$\leqslant \varepsilon\sum_{i=m}^{\infty}(E|V_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$
$$< \varepsilon^2.$$

又因 $\{\| X_n \|^q\}$ 一致绝对连续，故对上述 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $A \in \mathscr{F}$，$P(A) < \delta$ 时，恒有

$$\sup_{n\geqslant 1}\int_A \| X_n \|^q dP < \varepsilon.$$

由于 $\| E(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) - X_{n-1} \| \xrightarrow{P} 0 (n \to \infty)$，故对上述 $\varepsilon > 0$，$\delta > 0$，存在正整数 M_2，使当 $i \geqslant M_2$ 时，有

$$P(\| E(X_i|\mathscr{F}_{i-1}) - X_{i-1} \| > \varepsilon) < \delta.$$

取 $M = \max\{M_1, M_2\}$，则对一切 $n > M$，有

$$\sum_{i=M}^{n} E \| E(Y_i|\mathscr{F}_{i-1}) - Y_{i-1} \|$$
$$= \sum_{i=M}^{n} E|V_i| \, \| E(X_i|\mathscr{F}_{i-1}) - X_{i-1} \|$$
$$= \sum_{i=M}^{n}\int_{R(i)}|V_i| \, \| E(X_i|\mathscr{F}_{i-1}) - X_{i-1} | dP$$

$$+\sum_{i=M}^{n}\int_{S(i)}|V_i|\,\|E(X_i|\mathscr{F}_{i-1})-X_{i-1}\|\,dP.$$

但

$$\sum_{i=M}^{n}\int_{S(i)}|V_i|\,\|E(X_i|\mathscr{F}_{i-1})-X_{i-1}\|\,dP$$

$$\leqslant\sum_{i=M}^{n}\left(\int_{\Omega}|V_i|^p dP\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{S(i)}\|E(X_i|\mathscr{F}_{i-1})-X_{i-1}\|^q dP\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\sum_{i=M}^{n}(E|V_i|^p)^{\frac{1}{p}}\left[2^{q-1}\left(\int_{S(i)}\|X_i\|^q dP+\int_{S(i)}\|X_{i-1}\|^q dP\right)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\sum_{i=M}^{n}(E|V_i|^p)^{\frac{1}{p}}\left(2^q\sup_{k\geqslant 1}\int_{S(i)}\|X_k\|^q dP\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant 2\varepsilon^{\frac{1}{q}}\sum_{i=M}^{n}(E|V_i|^p)^{\frac{1}{p}},$$

于是，

$$\sum_{i=M}^{\infty}E\|E(Y_i|\mathscr{F}_{i-1})-Y_{i-1}\|$$

$$=\sum_{i=M}^{\infty}\int_{R(i)}|V_i|\,\|E(X_i|\mathscr{F}_{i-1})-X_{i-1}\|\,dP$$

$$+\sum_{i=M}^{\infty}\int_{S(i)}|V_i|\,\|E(X_i|\mathscr{F}_{i-1})-X_{i-1}\|\,dP$$

$$\leqslant\varepsilon^2+2\varepsilon^{\frac{1}{q}-1}<\infty.$$

这就证明了 $Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为 **B** 值拟鞅.

推论 4.14 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为 **B** 值可积适应序列，$\|E(X_n|\mathscr{F}_{n-1})-X_{n-1}\|\xrightarrow{P}0(n\to\infty)$ 且 $\{\|X_n\|^q\}$ 一致可积 $(1<q<\infty)$，对任意 $\{\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 停时 τ，若 $E\tau<\infty$，则

$$X^\tau=\{X_{\tau\wedge n},\mathscr{F}_{\tau\wedge n},n\geqslant 1\}$$

为 **B** 值拟鞅.

定理 4.15 设 Banach 空间 **B** 具有 RNP，$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为 **B** 值可积适应序列，$V=\{V_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为实值可预报序列，

$Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 X 关于 V 的变换. 若 $\sum_{i=1}^{\infty}(E|V_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty (1 < p < \infty)$, $\| E(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) - X_{n-1} \| \xrightarrow{P} 0(n \to \infty)$, 且 $\{\| X_n \|^q\}$ 一致可积. 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 **B** 值拟鞅, 且 $\{Y_n\}a.e.$ 收敛.

证 由于 $\{\| X_n \|^q\}$ 一致可积, 更一致绝对连续, 由定理 4.13 知 $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 **B** 值拟鞅. 又因为

$$
\begin{aligned}
E\| Y_n \| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} E|V_i| \, \| X_i - X_{i-1} \| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} (E|V_i|^p)^{\frac{1}{p}} (E\| X_i - X_{i-1} \|^q)^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} (E|V_i|^p)^{\frac{1}{p}} [2^{q-1}(E\| X_i \|^q \\
&\quad + E\| X_{i-1} \|^q)]^{\frac{1}{q}} \\
&\leqslant 2(\sup_{i \geqslant 1} E\| X_i \|^q)^{\frac{1}{q}} \sum_{i=1}^{n} (E|V_i|^p)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}
$$

于是

$$
\sup_{n \geqslant 1} E\| Y_n \| \leqslant 2(\sup_{i \geqslant 1} E\| X_i \|^q)^{\frac{1}{q}} \sum_{i=1}^{\infty} (E|V_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty.
$$

即 $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 L^1 有界的拟鞅, 又 **B** 具有 RNP, 故 $\{Y_n\}a.e.$ 收敛.

推论 4.16 设 **B** 具有 RNP, $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 **B** 值可积适应序列且 $\| E(X_n|\mathscr{F}_{n-1}) - X_{n-1} \| \xrightarrow{P} 0(n \to \infty)$, $V = \{V_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为实值可预报序列, 且 $\sum_{i=1}^{\infty}(E|V_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty (1 < p < \infty)$. $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 X 关于 V 的变换, 若存在实值随机变量 $Z \in L^q$, 使得对一切 $n \geqslant 1$, 有 $\| X_n \| \leqslant Z$, 则 $Y = \{Y_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 为 **B** 值拟鞅, $\{Y_n\}a.e.$ 收敛且 L^1 收敛.

证 由于对一切 $n\geq 1$，$\|X_n\|^q\leqslant Z^q\in L^1$，其中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 从而$\{\|X_n\|^q\}$一致可积，由定理 4.15 知 $Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\geq 1\}$ 为 **B** 值拟鞅且$\{Y_n\}a.e.$收敛，再由 Y_n 的定义知

$$\|Y_n\|\leqslant 2Z\sum_{i=1}^{\infty}|V_i|,\forall\ n\geq 1.$$

但是，$E(\sum_{i=1}^{\infty}|V_i|)=\sum_{i=1}^{\infty}E|V_i|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}(E|V_i|^p)^{\frac{1}{p}}<\infty$，即$\sum_{i=1}^{\infty}|V_i|$ 是可积随机变量，又 $Z\in L^\infty$，故 $Z\sum_{i=1}^{\infty}|V_i|$ 是可积随机变量，从而$\{\|Y_n\|\}$是一致可积的，从而$\{Y_n\}L^1$收敛.

注 因为概率极限鞅与相邻极限鞅均满足条件 $\|E(X_n|\mathscr{F}_{n-1})-X_{n-1}\|\xrightarrow{P}0(n\to\infty)$，所以在定理 4.13 至推论 4.16 中将 **B** 值可积适应序列换成相邻极限鞅或概率极限鞅. 去掉条件 $\|E(X_n|\mathscr{F}_{n-1})-X_{n-1}\|\xrightarrow{P}0(n\to\infty)$，而其它的条件不变，则相应的定理与推论均成立.

§5 B 值 BMO 序列

为方便起见，本节恒设$\mathscr{F}_\infty=\sigma(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_n)=\mathscr{F}$，其中$\{\mathscr{F}_n,n\geq 1\}$是$\mathscr{F}$的单调上升的子$\sigma$代数序列，$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一给定的完备概率空间. 本节的结果参见文献[91].

定义 5.1 设$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geq 1\}$是 **B** 值可积适应序列，称 X 是 BMO_a(或 BMO_a^-) 序列($a\geq 1$)，如果

$$\sup_{m\geq n\geq 1}\|E(\|X_m-X_{n-1}\|^a|\mathscr{F}_n)\|_\infty<\infty, \tag{5.1}$$

$$(\text{或者}\sup_{m\geq n\geq 1}\|E(\|X_m-X_n\|^a|\mathscr{F}_n)\|_\infty<\infty) \tag{5.2}$$

分别记为 $X\in\mathrm{BMO}_a$(或 $X\in\mathrm{BMO}_a^-$)(当 $a=1$ 时，简记为 $X\in\mathrm{BMO}$(或 $X\in\mathrm{BMO}^-$)). 若 X 还是鞅，则记为 $X\in\mathrm{BMO}_aM$(或 $X\in\mathrm{BMO}_a^-M$).

令

$$\| X \|_{\mathrm{BMO}_a} = \sup_{m \geqslant n \geqslant 1} \| E(\| X_m - X_{n-1} \|^a | \mathscr{F}_n) \|_\infty^{1/a},$$

$$\| X \|_{\mathrm{BMO}_a^-} = \sup_{m \geqslant n \geqslant 1} \| E(\| X_m - X_n \|^a | \mathscr{F}_n) \|_\infty^{1/a}.$$

定义 5.2 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 **B** 值可积适应序列，称 X 是 ${}_aK_p$（或 ${}_aK_p^-$）序列（$1 \leqslant a \leqslant p \leqslant \infty$ 且 $a < \infty$），如果存在 $v \in L^p(\Omega, \mathscr{F}, P, R^-)$，使得

$$\sup_{m \geqslant n} E(\| X_m - X_{n-1} \|^a | \mathscr{F}_n) \leqslant E(v^a | \mathscr{F}_n)(\forall\, n \geqslant 1), \quad (5.3)$$

$$(\text{或} \sup_{m \geqslant n} E(\| X_m - X_n \|^a | \mathscr{F}_n) \leqslant E(v^a | \mathscr{F}_n)(\forall\, n \geqslant 1)), \quad (5.4)$$

分别记为 $X \in {}_aK_p$（或 $X \in {}_aK_p^-$）（当 $a = 1$ 时，简记为 $X \in K_p$（或 $X \in K_p^-$））。若 X 还是鞅，则记为 $X \in {}_aK_pM$（或 $X \in aK_p^+M$）。

令

$$\| X \|_{{}_aK_p} = \inf_v \{ \| v \|_p ; v \text{ 满足(5.3)式} \},$$

$$\| X \|_{{}_aK_p^-} = \inf_v \{ \| v \|_p ; v \text{ 满足(5.4)式} \},$$

如不特别说明，以下提到 ${}_aK_p$（或 ${}_aK_p^-$）时，均指 $1 \leqslant a \leqslant p \leqslant \infty, a < \infty$，提到 v 时，对于 ${}_aK_p$ 和 ${}_aK_p^+$，指(5.3)或(5.4)中的 v.

命题 5.1 设 $1 \leqslant a \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty, 1 \leqslant a \leqslant p \leqslant \infty, a < \infty$，则

(1) $\mathrm{BMO}_a = {}_aK_\infty, L^\infty \subset \mathrm{BMO}_a, \mathrm{BMO}_a^+ = {}_aK_\infty^-$；

(2) ${}_aK_{p_2} \subset {}_aK_{p_1}, {}_aK_{p_2}^- \subset {}_aK_{p_1}^+$，特别地

$$\mathrm{BMO}_a \subset {}_aK_p, \mathrm{BMO}_a^+ \subset {}_aK_p^-;$$

(3) $X \in \mathrm{BMO} \Longleftrightarrow X \in \mathrm{BMO}^-$ 且 $D^*(X) \in L^\infty$；

(4) ${}_aK_p \subset {}_aK_p^-$，更有 $\mathrm{BMO}_a \subset \mathrm{BMO}_a^-$；

(5) $X \in {}_aK_p^- \Rightarrow \| X \| = \{ \| X_n \|, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是实值 ${}_aK_p^-$ 序列.

证 (1)与(2)由定义即可得出. (3)"$\Rightarrow$". 设 $X \in \mathrm{BMO}$，注意到

$$\|X_m - X_n\| \leqslant \|X_m - X_{n-1}\| + \|X_n - X_{n-1}\|,$$

由定义，显然 $X \in \mathrm{BMO}^-$，且

$$\|D_n(X)\| = \|X_n - X_{n-1}\| = E(\|X_n - X_{n-1}\| \,|\mathscr{F}_n)$$
$$\leqslant \|X\|_{\mathrm{BMO}},$$

于是，$D^*(X) = \sup\limits_{n\geqslant 1}\|D_n(X)\| \leqslant \|X\|_{\mathrm{BMO}}$，即 $D^*(X) \in L^\infty$.

"$\Leftarrow$" 设 $X \in \mathrm{BMO}^-$ 且 $D^*(X) \in L^\infty$，不妨设 $D^*(X) \leqslant K$，则

$$E(\|X_m - X_{n-1}\| \,|\mathscr{F}_n)$$
$$\leqslant E(\|X_m - X_n\| \,|\mathscr{F}_n) + E(D_n(X)|\mathscr{F}_n)$$
$$\leqslant \|X\|_{\mathrm{BMO}^-} + K,$$

故 $X \in \mathrm{BMO}$.

(4) 注意不等式

$$\|X_m - X_n\|^a \leqslant 2^{a-1}(\|X_m - X_{n-1}\|^a + \|X_n - X_{n-1}\|^a)$$

即得(4)成立.

(5) 注意不等式

$$|\|X_m\| - \|X_n\|| \leqslant \|X_m - X_n\|$$

即知(5)成立.

引理 5.2 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 **B** 值 $_aK_p^-$ 序列，则 $\forall\, \tau, \sigma \in T$，有

$$E(\|X_\tau - X_\sigma\|^a|\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}) \leqslant E(2^a v^a|\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}).$$

证 因为 $\tau, \sigma \in T$，所以可取正整数 n_0，使得 $n_0 \geqslant \tau \vee \sigma$ 时，$\forall\, A \in \mathscr{F}_\tau$，有

$$\int_A E(\|X_{n_0} - X_\tau\|^a|\mathscr{F}_\tau)dP$$

$$= \int_A \Big[\sum_{k=1}^{n_0} E(\|X_{n_0} - X_k\|^a I_{\{\tau=k\}}|\mathscr{F}_\tau)\Big]dP$$

$$= \sum_{k=1}^{n_0}\int_{A\cap\{\tau=k\}} E(\|X_{n_0} - X_k\|^a|\mathscr{F}_k)dP$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n_0}\int_{A\cap\{\tau=k\}} E(v^a|\mathscr{F}_k)dP$$

$$= \sum_{k=1}^{n_0} \int_{A \cap \{\tau = k\}} \nu^a dP$$

$$= \int_A E(\nu^a | \mathscr{F}_\tau) dP,$$

从而

$$E(\| X_{n_0} - X_\tau \|^a | \mathscr{F}_\tau) \leqslant E(\nu^a | \mathscr{F}_\tau),$$

注意到 $\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma} \subset \mathscr{F}_\tau$，上式两边对 $\mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}$ 取条件期望有

$$E(\| X_{n_0} - X_\tau \|^a | \mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}) \leqslant E(\nu^a | \mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}),$$

类似地可以得到

$$E(\| X_{n_0} - X_\sigma \|^a | \mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}) \leqslant E(\nu^a | \mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}),$$

于是

$$\begin{aligned}
&E(\| X_\tau - X_\sigma \|^a | \mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}) \\
&\quad \leqslant E(2^{a-1}[\| X_{n_0} - X_\tau \|^a + \| X_{n_0} - X_\sigma \|^a] | \mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}) \\
&\quad = 2^{a-1}[E(\| X_{n_0} - X_\tau \|^a | \mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}) + E(\| X_{n_0} - X_\sigma \|^a | \mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma})] \\
&\quad \leqslant E(2^a \nu^a | \mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}).
\end{aligned}$$

定理 5.3 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 **B** 值 $_aK_p^+$ 序列，则有

(1) $E(\| X_\tau - X_\sigma \|^a | \mathscr{F}_\sigma)$

$$\leqslant E(2^a \nu^a | \mathscr{F}_\sigma)(\forall\ \sigma \in T, \forall\ \tau \in T(\sigma)), \tag{5.5}$$

(2) 若 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ $a.e.$ 收敛，则

$E(\| X_\tau - X_\sigma \|^a | \mathscr{F}_\sigma)$

$$\leqslant E(2^a \nu^a | \mathscr{F}_\sigma)(\forall\ \sigma \in \overline{T}, \forall\ \tau \in \overline{T}(\sigma)). \tag{5.6}$$

证 (1) 由引理 5.2 成立为显然，下面证(2)。先设 $\sigma \in T, \tau \in \overline{T}(\sigma)$，由 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ $a.e.$ 收敛，定义 $X_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$，令 $\tau_n = \tau \wedge n$，则 $\tau_n \in T$，且 $\tau_n \uparrow \tau$，从而 $X_{\tau_n} \to X_\tau$ $a.e.$.

因为 $\sigma \in T, \tau \in \overline{T}(\sigma)$，所以可取 $n_0 \geqslant \sigma$，当 $n \geqslant n_0$ 时，$\tau_n \in T(\sigma)$，于是由条件期望的 Fatou 引理及(1) 有

$$\begin{aligned}
&E(\| X_\tau - X_\sigma \|^a | \mathscr{F}_\sigma) \\
&\quad = E(\lim_{n\to\infty} \| X_{\tau_n} - X_\sigma \|^a | \mathscr{F}_\sigma)
\end{aligned}$$

$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty} E(\| X_{\tau_n} - X_\sigma \|^a | \mathscr{F}_\sigma)$$
$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty} E(2^a v^a | \mathscr{F}_\sigma)$$
$$= E(2^a v^a | \mathscr{F}_\sigma).$$

再设 $\sigma \in \overline{T}, \tau \in \overline{T}(\sigma)$，我们证在集合 $\{\sigma < \infty\}$ 上 $a.e.$ 有

$$E(\| X_\tau - X_\sigma \|^a | \mathscr{F}_\sigma) \leqslant E(2^a v^a | \mathscr{F}_\sigma) \tag{5.7}$$

事实上，因为 $\{\sigma < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\sigma \leqslant n\}$，所以为证(5.7)式，只要证 $\forall\, n \geqslant 1$，有

$$E(\| X_\tau - X_\sigma \|^a | \mathscr{F}_\sigma) I_{\{\sigma \leqslant n\}} \leqslant E(2^a v^a | \mathscr{F}_\sigma) I_{\{\sigma \leqslant n\}}$$

令 $R = \sigma \wedge n, S = \sigma, A = \{\sigma \leqslant n\}$，则 $A = \{R = S\} \in \mathscr{F}_R \cap \mathscr{F}_S$，利用停时的性质有

$$E(\| X_\tau - X_\sigma \|^a | \mathscr{F}_\sigma) I_{\{\sigma \leqslant n\}} = E(\| X_\tau - X_R \|^a | \mathscr{F}_R) I_{\{\sigma \leqslant n\}} \tag{5.9}$$

注意到 $R = \sigma \wedge n \in T$ 及 $\tau \geqslant R$，由上面的证明有

$$E(\| X_\tau - X_\sigma \|^a | \mathscr{F}_R) \leqslant E(2^a v^a | \mathscr{F}_R)$$

代入(5.9)式并用停时的性质有

$$E(\| X_\tau - X_\sigma \|^a | \mathscr{F}_\sigma) I_{\{\sigma \leqslant n\}}$$
$$\leqslant E(2^a v^a | \mathscr{F}_R) I_{\{\sigma \leqslant n\}}$$
$$= E(2^a v^a | \mathscr{F}_\sigma) I_{\{\sigma \leqslant n\}}.$$

这就证明了(5.7)式成立. 下面证(5.6)式成立. 事实上，由(5.7)式有

$$E(\| X_\tau \| - X_\sigma \|^a | \mathscr{F}_\sigma)$$
$$= E(\| X_\tau - X_\sigma \|^a | \mathscr{F}_\sigma) I_{\{\sigma < \infty\}} + E(X_\tau - X_\sigma \|^a | \mathscr{F}_\sigma) I_{\{\sigma = \infty\}}$$
$$= E(\| X_\tau - X_\sigma \|^a | \mathscr{F}_\sigma) I_{\{\sigma < \infty\}}$$
$$\leqslant E(2^a v^a | \mathscr{F}_\sigma) I_{\{\sigma < \infty\}}$$
$$\leqslant E(2^a v^a | \mathscr{F}_\sigma).$$

定理证毕.

推论 5.4 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 **B** 值$_a K_p^-$ 序列，$\{\tau_n, n \geqslant 1\}$ 是 $\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 的非降有界停时列，则 $\{X_{\tau_n}, \mathscr{F}_{\tau_n}, n \geqslant 1\}$ 仍为

${}_aK_p^-$ 序列. 特别地, 对任意 $\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 停时 $\sigma, X_\sigma = \{X_{\sigma\wedge n}, \mathscr{F}_{\sigma\wedge n}, n \geqslant 1\}$ 是 ${}_aK_p^+$ 序列.

证 由于 X 是 ${}_aK_p^-$ 序列, 且 $\forall\, m \geqslant n \geqslant 1$, 有 $\tau_n \in T, \tau_m \in T(\tau_n)$, 故由定理 5.3 知

$$E(\|X_{\tau_m} - X_{\tau_n}\|^a)|\mathscr{F}_{\tau_n}) \leqslant E(2^a v^a\ \mathscr{F}_{\tau_n}),$$

所以

$$\sup_{m\geqslant n} E(\|X_{\tau_m} - X_{\tau_n}\|^a|\mathscr{F}_{\tau_n}) \leqslant E((2v)^a|\mathscr{F}_{\tau_n}), \forall\, n \geqslant 1.$$

由定义知 $\{X_{\tau_n}, \mathscr{F}_{\tau_n}, n \geqslant 1\}$ 为 ${}_aK_p^-$ 序列. 特别地, 取 $\tau_n = \sigma \wedge n$, 则 $\{\tau_n, n \geqslant 1\}$ 为 $\{\mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 的非降有界停时序列, 故 $\{X_{\sigma\wedge n}, \mathscr{F}_{\sigma\wedge n}, n \geqslant 1\}$ 是 ${}_aK_p^-$ 序列.

定理 5.5 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 **B** 值 ${}_aK_p$ 序列, 则

(1) $$E(\|X_\tau - X_{\sigma-1}\|^a|\mathscr{F}_\sigma) \leqslant E(2^a v^a|\mathscr{F}_\sigma) \tag{5.10}$$
$(\forall\, \sigma \in T, \forall\, \tau \in T(\sigma))$.

(2) 若 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ a.e. 收敛, 则

$$E(\|X_\tau - X_{\sigma-1}\|^a|\mathscr{F}_\sigma) \leqslant E(2^a v^a|\mathscr{F}_\sigma) \tag{5.11}$$
$(\forall\, \sigma \in \overline{T}, \forall\, \tau \in \overline{T}(\sigma))$.

证 令 $\mathscr{G}_n = \mathscr{F}_{n+1}, n \geqslant 0, \sigma' = \sigma - 1$. 因为

$$\{\sigma' = n\} = \{\sigma = n + 1\} \in \mathscr{F}_{n+1} = \mathscr{G}_n, n \geqslant 0,$$

所以 σ' 为 $\{\mathscr{G}_n, n \geqslant 0\}$ 停时. 又因为

$$\{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1} = \mathscr{G}_n, n \geqslant 1,$$
$$\{\tau = 0\} = \varnothing \in \mathscr{F}_1 = \mathscr{G}_0.$$

所以 τ 亦为 $\{\mathscr{G}_n, n \geqslant 0\}$ 停时, 且 $\tau \geqslant \sigma > \sigma - 1 = \sigma'$. 由 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 ${}_aK_p$ 序列知 $X' = \{X_n, \mathscr{G}_n, n \geqslant 0\}$ 是 ${}_aK_p$ 序列 $(X_0 = 0)$. 另外还有

$$\begin{aligned}\mathscr{G}_{\sigma'} &= \{A; A \in \mathscr{G}_\infty, A \cap \{\sigma' = n\} \in \mathscr{G}_n, n \geqslant 0\}\\ &= \{A; A \in \mathscr{F}_\infty, A \cap \{\sigma = n + 1\} \in \mathscr{F}_{n+1}, n \geqslant 0\}\\ &= \{A; A \in \mathscr{F}_\infty, A \cap \{\sigma = n\} \in \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}\\ &= \mathscr{F}_\sigma.\end{aligned}$$

对 X', τ, σ' 用定理 5.3 有

$$E(\| X_\tau - X_{\sigma'} \|^a | \mathscr{G}_{\sigma'}) \leqslant E(2^a v^p | \mathscr{G}_{\sigma'}),$$

即

$$E(\| X_\tau - X_{\sigma-1} \|^a | \mathscr{F}_\sigma) \leqslant E(2^a v^p | \mathscr{F}_\sigma).$$

这就证明了定理.

定理 5.6 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 **B** 值 $_aK_p$ 序列，则有

$$E((X_n^*)^{p'} | \mathscr{F}_1) \leqslant cE(v^{p'} | \mathscr{F}_1), \tag{5.12}$$

从而

$$E(X^*)^{p'} < c \| v \|_{p'}, \tag{5.13}$$

其中 p' 满足 $1 \leqslant a < p' \leqslant p < \infty$，$c$ 为仅与 p' 及 a 有关的常数.

证 考虑序列 $Y^{(n,L)} = \{Y_m^{(n,L)}, \mathscr{F}_m, m \geqslant 1\}$，

$$Y_m^{(n,L)} = \begin{cases} \| X_m \| \wedge L, & \text{当 } 1 \leqslant m < n \text{ 时}, \\ \| X_n \| \wedge L, & \text{当 } m \geqslant n \text{ 时}, \end{cases}$$

(L 是正整数)

则有 ① $Y^{(n,L)} \in {}_aK_p$，且 $\| Y^{(n,L)} \|_{{}_aK_p} \leqslant \| X \|_{{}_aK_p}$，

② $Y(n,L)^* = \sup_{m \geqslant 1} \| Y_m^{(n,L)} \| = X_n^* \wedge L$，

③ $\lim_{m \to \infty} Y_m^{(n,L)} = \| X_n \| \wedge L$ 存在.

$\forall \lambda > 0, \forall \alpha > 0$，定义停时如下：

$\tau_1 = \inf\{m : \| Y_m^{(n,L)} \| > \alpha\lambda\}$，

$\tau_2 = \inf\{m : \| Y_m^{(n,L)} \| > (\alpha + 1)\lambda\}$，约定 $\inf\varnothing = \infty$.

则 $\tau_1 \leqslant \tau_2$，故 $\{\tau_1 < \infty\} \in \mathscr{F}_{\tau_1} \subset \mathscr{F}_{\tau_2}$.

$\forall A \in \mathscr{F}_1, A \cap \{\tau_1 < \infty\} \in \mathscr{F}_{\tau_1} \subset \mathscr{F}_{\tau_2}$，

$$\{Y^{(n,L)^*} > (\alpha + 1)\lambda\} = \{\tau_2 < \infty\}$$

$$\subset \{\tau_1 < \infty, \| Y_{\tau_2}^{(n,L)} - Y_{\tau_1 - 1}^{(n,L)} \| \geqslant \lambda\},$$

记 $G_A(\lambda) = P(\{Y^{(n,L)^*} > \lambda\} \cap A)$，由定理 5.5，则有

$$G_A((\alpha + 1)\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda^a} \int_{A \cap \{\tau_1 < \infty\}} \| Y_{\tau_2}^{(n,L)} - Y_{\tau_1 - 1}^{(n,L)} \|^a dP$$

$$= \frac{1}{\lambda^a} \int_{A \cap \{\tau_1 < \infty\}} E(\| Y_{\tau_2}^{(n,L)} - Y_{\tau_1 - 1}^{(n,L)} \|^a | \mathscr{F}_{\tau_1}) dP$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda^a} \int_{A \cap \{\tau_1 < \infty\}} E(2^a \nu^a) | \mathscr{F}_{\tau_1}) dP$$

$$= \frac{1}{\lambda^a} \int_{A \cap \{\tau_1 < \infty\}} 2^a \nu^a dP,$$

从而有

$$\int_A (Y^{(n,L)^*})^{p'} dP = \int_0^\infty p' \lambda^{p'-1} G_A(\lambda) d\lambda$$

$$= p'(\alpha + 1)^{p'} \int_0^\infty \lambda^{p'-1} G_A((\alpha + 1)\lambda) d\lambda$$

$$\leqslant p'(\alpha + 1)^{p'} \int_0^\infty \lambda^{p'-a-1} \int_{A \cap \{Y^{(n,L)^*} > \alpha\lambda\}} 2^a \nu^a dP d\lambda$$

$$\leqslant \frac{p' \cdot 2^a \cdot (\alpha + 1)^{p'}}{\alpha^{p'-a}(p' - a)} \int_A \nu^a (Y^{(n,L)^*})^{p'-a} dP$$

$$\leqslant \frac{p' \cdot 2^a \cdot (\alpha + 1)^{p'}}{\alpha^{p'-a}(p' - a)} \left[\int_A \nu^{p'} dP\right]^{\frac{a}{p'}} \left[\int_A (Y^{(n,L)^*})^{p'} dP\right]^{1-\frac{a}{p'}},$$

当$\int_A (Y^{(n,L)^*})^{p'} dP \neq 0$时，有

$$\int_A (Y^{(n,L)^*})^{p'} dP \leqslant \left(\frac{p' \cdot 2^a}{p' - a} \right)^{\frac{p'}{a}} \cdot \left(\frac{(\alpha + 1)^{p'}}{\alpha^{p'-a}} \right)^{\frac{p'}{a}} \cdot \int_A \nu^{p'} dP$$

$$= c \int_A \nu^{p'} dP$$

（任意固定 α 后，c 仅与 p'，a 有关）.

当$\int_A (Y^{(n,L)^*})^{p'} dP = 0$时，上式自然成立，从而由 $A \in \mathscr{F}_1$ 的任意性有

$$E((Y^{(n,L)^*})^{p'} | \mathscr{F}_1) \leqslant cE(\nu^{p'} | \mathscr{F}_1),$$

注意到$Y^{(n,L)^*} = X_n^* \wedge L$，故$\lim\limits_{L \to \infty} Y^{(n,L)^*} = X_n^*$，由条件期望的Fatou引理有

$$E((X_n^*)^{p'}|\mathscr{F}_1) = E(\varliminf_{L\to\infty}(Y^{(n,L)^*})^{p'}|\mathscr{F}_1)$$

$$\leqslant \varliminf_{L\to\infty}((Y^{(n,L)^*})^{p'}|\mathscr{F}_1)$$

$$\leqslant cE(v^{p'}|\mathscr{F}_1).$$

这就证明了(5.12)式,对(5.12)式用 Fatou 引理即得(5.13)式.

定理 5.7 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 B 值 BMO 序列,$\| X \|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \frac{1}{2}$,则对 $0 < \alpha < e^{-1}$,存在只与 α 有关的常数 c_α,使得

$$E(\exp(\alpha X_n^*)|\mathscr{F}_1) \leqslant c_\alpha < \infty \tag{5.14}$$

证 考虑序列 $Y^{(n)} = \{Y_m^{(n)}, \mathscr{F}_m, m \geqslant 1\}$,

$$Y_m^{(n)} = \begin{cases} X_m, & 1 \leqslant m < n, \\ X_n, & m \geqslant n, \end{cases}$$

则有 ① $Y^{(n)} \in \mathrm{BMO}$,且 $\| Y^{(n)} \|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \| X \|_{\mathrm{BMO}}$,

②$Y^{(n)^*} = X_n^*$,

③ $\lim\limits_{m\to\infty} Y_m^{(n)} = X_n$.

$\forall \lambda, \mu > 0$,定义停止时间如下:

$\tau = \inf\{m: \| Y_m^{(n)} \| > \lambda + \mu\}$,

$\sigma = \inf\{m: \| Y_m^{(n)} \| > \lambda\}$,约定 $\inf\varnothing = \infty$.

$\forall A \in \mathscr{F}_1$,定义

$$\tau_A = \begin{cases} \tau, & \omega \in A, \\ \infty, & \omega \notin A, \end{cases} \qquad \sigma_A = \begin{cases} \sigma, & \omega \in A, \\ \infty, & \omega \notin A. \end{cases}$$

注意 $1 \leqslant \sigma \leqslant \tau$,从而 $1 \leqslant \sigma_A \leqslant \tau_A$,且 $\| Y_{\sigma_A - 1} I_A \| \leqslant \lambda$,

令 $G_A(\lambda) = P(\{Y^{(n)^*} > \lambda\} \cap A) = P(\sigma_A < \infty)$,由定理 5.5 有

$$\begin{aligned} G_A(\lambda + \mu) &= P(\{Y^{(n)^*} > \lambda + \mu\} \cap A) \\ &= P(\tau_A < \infty) \\ &\leqslant P(\sigma_A < \infty, \| Y_{\tau_A}^{(n)} - Y_{\sigma_A - 1}^{(n)} \| > \mu) \\ &= \frac{1}{\mu} \int_{\{\sigma_A < \infty\}} \| Y_{\tau_A}^{(n)} - Y_{\sigma_A - 1}^{(n)} \| dP \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\mu}\int_{\{\sigma_A<\infty\}} E(\| Y^{(n)}_{\tau_A} - Y^{(n)}_{\sigma_A-1}\| \,|\mathscr{F}_{\sigma_A})dP$$

$$\leqslant \frac{2}{\mu}\int_{\{\sigma_A<\infty\}} \| Y^{(n)}\|_{\mathrm{BMO}} dP$$

$$\leqslant \frac{2}{\mu}\int_{\{\sigma_A<\infty\}} \| X\|_{\mathrm{BMO}} dP$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu}P(\sigma_A<\infty)$$

$$= \frac{1}{\mu}G_A(\lambda),$$

即 $G_A(\lambda+\mu)\leqslant \frac{1}{\mu}G_A(\lambda)$.

特别地，取 $\mu=e,\lambda=ke$，则有

$$G_A((k+1)e)\leqslant \frac{1}{e}G_A(ke)\leqslant e^{-k}G_A(e)\leqslant e^{-k}P(A).$$

由于 $G_A(\lambda)$ 是单调下降的，故对 $e\leqslant\lambda<\infty$，设 $ke\leqslant\lambda<(k+1)e$，$k$ 是自然数，则

$$G_A(\lambda)\leqslant G_A(ke)\leqslant e^{-(k-1)}P(A)\leqslant e^2\cdot e^{-\frac{\lambda}{e}}P(A).$$

上述不等式对 $0<\lambda<e$ 也成立，这是因为

$$G_A(\lambda)\leqslant eP(A)\leqslant e^2\cdot e^{-\frac{\lambda}{e}}P(A).$$

于是，对 $0<\alpha<e^{-1}$，有

$$\int_A e^{\alpha Y^{(n)*}}dP = \int_0^\infty G_A(\lambda)de^{\alpha\lambda}$$

$$\leqslant P(A)\cdot \alpha e^2\int_0^\infty e^{(\alpha-e^{-1})\lambda}d\lambda$$

$$= c_\alpha P(A),$$

其中 $c_\alpha=\alpha e^2\int_0^\infty e^{(\alpha-e^{-1})\lambda}d\lambda<\infty$，且 c_α 仅与 α 有关. 由 $A\in F_1$ 的任意性有

$$E(e^{\alpha Y^{(n)*}}\,|\mathscr{F}_1)\leqslant c_\alpha<\infty.$$

注意到 $Y^{(n)*}=X_n^*$，故有

$$E(\exp(\alpha X_n^*)|\mathscr{F}_1) \leqslant c_\alpha < \infty.$$

推论 5.8 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\} \in \mathrm{BMO}$, $\| X \|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \frac{1}{2}$, 则当 $0 < \alpha < e^{-1}$ 时,存在仅与 α 有关的常数 c_α,使得

$$E(\exp(\alpha X^*)|\mathscr{F}_1) \leqslant c_\alpha < \infty.$$

证 注意 $X^* = \lim\limits_{n \to \infty} X_n^*$,用定理 5.7 及条件期望的 Fatuou 引理即知推论 5.8 成立.

推论 5.9 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\} \in \mathrm{BMO}$,则对 $0 < \alpha < (2e\| X \|_{\mathrm{BMO}})^{-1}$,存在只与 α 有关的常数 c_α,使得

$$\sup_{n \geqslant 1} \| E(\exp(\alpha \cdot \sup_{m \geqslant n} \| X_m - X_{n-1} \|)|\mathscr{F}_n) \|_\infty \leqslant c_\alpha < \infty, \tag{5.15}$$

证 为证(5.15)式,只须考虑 $\| X \|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \frac{1}{2}$ 及 $0 < \alpha < e^{-1}$ 的情形(否则,考查 $X/2\| X \|_{\mathrm{BMO}}$ 即可,$X \equiv 0$ 的情形自然满足(5.15 式). $\forall\ n \geqslant 1$,固定 n,并令

$$\mathscr{F}_m^{(n)} = \mathscr{F}_{m+n}, m = 0,1,2,\cdots,$$

$$Y_m^{(n)} = X_{m+n} - X_{n-1}, m = 0,1,2,\cdots.$$

由于

$$\begin{aligned}
&E(\| Y_p^{(n)} - Y_{q-1}^{(n)} \| \,|\mathscr{F}_q^{(n)}) \\
&= E(\| X_{p-n} - X_{q-n-1} \| \,|\mathscr{F}_{q-n}) \\
&\leqslant \| X \|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

故 $Y^{(n)} = \{Y_m^{(n)}, \mathscr{F}_m^{(n)}, m \geqslant 0\} \in \mathrm{BMO}$,且 $\| Y^{(n)} \|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \frac{1}{2}$,由推论 5.8 知:当 $0 < \alpha < e^{-1}$ 时,存在仅与 α 有关的常数 c_α,使得

$$E(\exp(\alpha \sup_{m \geqslant 0} \| Y_m^{(n)} \|)|\mathscr{F}_0^{(n)}) \leqslant c_\alpha < \infty,$$

即

$$E(\exp(\alpha \sup_{m \geqslant n} \| X_m - X_{n-1} \|)|\mathscr{F}_n) \leqslant c_\alpha < \infty.$$

再由 n 的任意性即得(5.15)式.

推论 5.10 $\forall\ a \geqslant 1$,有 $\mathrm{BMO}_a = \mathrm{BMO}$,且存在仅与 a 有关的

常数 c_a 使得：$\forall X \in \mathrm{BMO} = \mathrm{BMO}_a$，有

$$\| X \|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \| X \|_{\mathrm{BMO}_a} \leqslant c_a \| X \|_{\mathrm{BMO}}.$$

证　当 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\} \in \mathrm{BMO}_a$ 时，有

$$(E(\| X_m - X_{n-1} \| \,|\mathscr{F}_n))^a \leqslant E(\| X_m - X_{n-1} \|^a |\mathscr{F}_n)$$
$$\leqslant (\| X \|_{\mathrm{BMO}_a})^a,$$

这样，$X \in \mathrm{BMO}$ 且 $\| X \|_{\mathrm{BMO}} \leqslant \| X \|_{\mathrm{BMO}_a}$，即

$$\mathrm{BMO}_a \subset \mathrm{BMO}.$$

反之，设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\} \in \mathrm{BMO}$，不妨令 $\| X \|_{\mathrm{BMO}} = \frac{1}{2}$，否则考虑 $X/2 \| X \|_{\mathrm{BMO}}$.

取定 $\alpha, 0 < \alpha < e^{-1}$，则由推论 5.9 知存在只与 α 有关的常数 c_α 使得

$$\sup_{n \geqslant 1} \| E(\exp(\alpha \sup_{m \geqslant n} \| X_m - X_{n-1} \|) |\mathscr{F}_n) \|_\infty \leqslant c_\alpha < \infty,$$

故更有

$$E(\exp(\alpha \sup_{m \geqslant n} \| X_m - X_{n-1} \|) |\mathscr{F}_n) \leqslant c_\alpha < \infty, \forall n \geqslant 1.$$

由初等不等式　$t^n \leqslant \frac{n!}{\alpha^n} e^{\alpha t} (t \geqslant 0)$ 及

$$t^a \leqslant 1 + t^{[a]+1} (t \geqslant 0)$$

有

$$E(\| X_m - X_{n-1} \|^a |\mathscr{F}_n)$$
$$\leqslant 1 + E\left(\frac{([a]+1)!}{\alpha^{[a]+1}} \exp(\alpha \| X_m - X_{n-1} \|) |\mathscr{F}_n \right)$$
$$\leqslant 1 + \frac{([a]+1)!}{\alpha^{[a]+1}} c_\alpha \triangleq \frac{1}{2} c < \infty,$$

所以 $X \in \mathrm{BMO}_a$ 且 $\| X \|_{\mathrm{BMO}_a} \leqslant \frac{1}{2} c = c \| X \|_{\mathrm{BMO}}$. 其中 c 仅与 a，α 有关，α 取定后，c 仅与 a 有关. 这就证明了定理.

推论 5.11　设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 B 值 BMO 序列，则

$$E(X_n^* |\mathscr{F}_1) \leqslant c \| X \|_{\mathrm{BMO}},$$

从而有

$$E(X^* | \mathscr{F}_1) \leqslant c \| X \|_{\text{BMO}},$$

其中 c 为一正常数.

证　不妨设 $\| X \|_{\text{BMO}} = \frac{1}{2}$,由定理 5.7 知:当 $0 < \alpha < e^{-1}$ 时,有

$$E(\exp(\alpha X_n^*) | \mathscr{F}_1) \leqslant c_\alpha < \infty,$$

再由初等不等式,$t \leqslant \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} (t \geqslant 0)$ 有

$$E(X_n^* | \mathscr{F}_1) \leqslant \frac{1}{\alpha} E(\exp(\alpha X_n^*) | \mathscr{F}_1)$$

$$\leqslant \frac{c_\alpha}{\alpha} \triangleq \frac{1}{2} c = c \| X \|_{\text{BMO}},$$

所以

$$E(X^* | \mathscr{F}_1) \leqslant c \| X \|_{\text{BMO}}.$$

其中 c 是仅与 α 有关的正数,α 取定后,c 为一正常数.

定理 5.12　设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 **B** 值 $_oK_p$ 序列.则

(1) $p < \infty$ 时,$\{\| X_\tau \|^p, \tau \in T\}$ 是一致可积的,

(2) $p = \infty$ 时,$\{\| X_\tau \|, \tau \in T\}$ 是一致可积的.

证　注意到 $\forall \tau \in T$, $\| X_\tau \| \leqslant X^*$,根据定理 5.6 及推论 5.11 知定理 5.12 成立.

定义 5.3　设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 **B** 值可积适应序列.

(1) 称 X 是半一致渐近鞅,如果

$$\sup_{\sigma \in T} \sup_{\tau \in T(\sigma)} E \| E(X_\tau | \mathscr{F}_\sigma) - X_\sigma \| < \infty;$$

(2) 称 X 是有限次渐近鞅,如果对每一 $d \geqslant 1$,网 $\{EX_\tau, \tau \in T^d\}$ 收敛,其中 T^d 为至多取 d 个值的有界停时全体.

引理 5.13　设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 **B** 值可积适应序列,$X^* = \sup\limits_{n \geqslant 1} \| X_n \|$ 可积,则下面两条件有关系:"(1)⇒(2)".

(1) $\{X_n, n \geqslant 1\}$ $a.e.$ 收敛,

(2) $\{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是一致渐近鞅.

若 **B** 具有 RNP,则"(1)⟺(2)".

证明参见[92]的命题3，这里略去证明.

定理 5.14 每个B值${}_aK_p^+$序列是半一致渐近鞅.

证 设$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}\in {}_aK_p^+$，则

$\forall\ \sigma\in T,\forall\ \tau\in T(\sigma)$，由定理5.3有

$$E(\|X_\tau-X_\sigma\|^a|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant E(2^a\nu^a|\mathscr{F}_\sigma),$$

对凸函数$f(t)=|t|^a$及凹函数$g(t)=t^{\frac{1}{a}}(t\geqslant 0)$用条件期望的Jensen不等式有

$$\begin{aligned}(E(\|X_\tau-X_\sigma\|\,|\mathscr{F}_\sigma))^a&\leqslant E(\|X_\tau-X_\sigma\|^a|\mathscr{F}_\sigma)\\&\leqslant E(2^a\nu^a|\mathscr{F}_\sigma),\end{aligned}$$

所以

$$E(\|X_\tau-X_\sigma\|\,|\mathscr{F}_\sigma)\leqslant(E(2^a\nu^a|\mathscr{F}_\sigma))^{\frac{1}{a}},$$

于是

$$\begin{aligned}&E\|E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)-X_\sigma\|\\&\leqslant E(E(\|X_\tau-X_\sigma\|\,|\mathscr{F}_\sigma))\\&\leqslant E(E(2^a\nu^a|\mathscr{F}_\sigma))^{\frac{1}{a}}\\&\leqslant(E(E(2^a\nu^a|\mathscr{F}_\sigma)))^{\frac{1}{a}}\\&=2(E\nu^a)^{\frac{1}{a}}<\infty,\end{aligned}$$

故

$$\sup_{\sigma\in T}\sup_{\tau\in T(\sigma)}E\|E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)-X_\sigma\|\leqslant 2(E\nu^a)^{\frac{1}{a}}<\infty,$$

即X是半一致渐近鞅.

定理 5.15 设$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是B值${}_aK_p$序列，且$X_n\xrightarrow{P}X_0$，则$\forall\ d\geqslant 1$，有

$$\lim_{\tau\in T^d}\int_\Omega\|X_\tau-X_0\|\,dP=0,$$

特别地，$X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$是有限次渐近鞅.

证 由定理5.12知$\{X_n,n\geqslant 1\}$一致可积，故由题设条件知$X_n\xrightarrow{L^1}X_0$. 于是$\forall\ d\geqslant 1,\forall\ \varepsilon>0,\exists\ n_0\geqslant 1$，当$n\geqslant n_0$时，有

$$\int_{\Omega} \| X_n - X_0 \| dP \leqslant \frac{\varepsilon}{d}.$$

这样，对任意 $\tau \in T^d$，当 $\tau \geqslant n_0$ 时，

$$\int_{\Omega} \| X_\tau - X_0 \| dP = \sum_{i=1}^{d} \int_{\{\tau = n_i\}} \| X_{n_i} - X_0 \| dP$$

$$\leqslant d \cdot \frac{\varepsilon}{d} = \varepsilon.$$

即 $\lim_{\tau \in T^d} \int_{\Omega} \| X_\tau - X_0 \| dP = 0$. 特别地 X 是有限次渐近鞅.

定理 5.16 设 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是 **B** 值 ${}_{\alpha}K_p$ 序列，**B** 具有 RNP，则下列陈述等价：

(1) X 是一致渐近鞅，

(2) $\{X_n, n \geqslant 1\}$ $a.e.$ 收敛，

(3) 网 $\{X_\tau, \tau \in T\}$ 依概率收敛，

(4) 如果 $p < \infty$，则网 $\{X_\tau, \tau \in T\}$ L^p 收敛，

如果 $p = \infty$，则网 $\{X_\tau, \tau \in T\}$ L^1 收敛.

证 (1)$\Longleftrightarrow$(2) 由定理 5.12 及引理 5.13 立即得出. (4)$\Rightarrow$(3) 为显然，(3)$\Rightarrow$(4) 由定理 5.12 立即得出. (1)$\Rightarrow$(4). 如果 $p < \infty$，网 $\{X_\tau, \tau \in T\}$ 不是 L^p 收敛的，则存在递增的停时序列 $\{\tau_n, n \geqslant 1\} \subset T$，使得 $\{X_{\tau_n}, n \geqslant 1\}$ 不是 L^p 收敛的，但由定理 5.12 知 $\{\| X_{\tau_n} \|^p, n \geqslant 1\}$ 一致可积，又由已证的(1)$\Longleftrightarrow$(2)，可设 $X_n \to X_0$ $a.e.$，则 $X_{\tau_n} \to X_0$ $a.e.$，所以 $X_{\tau_n} \xrightarrow{L^p} X_0$，这就得到矛盾. 故网 $\{X_\tau, \tau \in T\}$ 为 L^p 收敛.

当 $p = \infty$ 时，可类似证明网 $\{X_\tau, \tau \in T\}$ L^1 收敛.

(4)$\Rightarrow$(1). 由(4)知 $\{X_\tau, \tau \in T\}$ L^1 收敛. 故 $\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, n_0 \geqslant 1$，当 $\sigma, \tau \in T(n_0)$ 时，有

$$E \| X_\tau - X_\sigma \| < \varepsilon.$$

于是

$$\sup_{\tau \in T(\sigma)} E \| E(X_\tau | \mathscr{F}_\sigma) - X_\sigma \| \leqslant \sup_{\tau \in T(\sigma)} E \| X_\tau - X_\sigma \| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{\sigma\in T}\sup_{\tau\in T(\sigma)} E\|E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)-X_\sigma\| = 0.$$

这就证明了定理.

定理 5.17 设 $X=\{X_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是 $\mathbf{B}$ 值一致渐近鞅,则下列陈述等价:

(1) X 是 BMO 序列,

(2) X 有如下分解:$X_n=Y_n+Z_n,n\geqslant 1$. 其中 $Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}\in$ BMOM,$Z=\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}\in L^\infty$ 且为一致渐近鞅.

证 (2)⇒(1). 由命题 5.1 知 $L^\infty\subset$ BMO,而两个 BMO 序列之和仍为 BMO 序列,故(2)⇒(1).

(1)⇒(2) 因为 X 是一致渐近鞅.由定理 1.1 知 X 有如下唯一的 Riesz 分解:

$$X_n=Y_n+Z_n,n\geqslant 1.$$

其中 $Y=\{Y_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值鞅. $Z=\{Z_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 为一致位势,故为一致渐近鞅. 由定理 1.1 的证明知 Y 还满足 $E(X_m|\mathscr{F}_n)\xrightarrow{L^1}Y_n,n\to\infty$. 故有子列 $E(X_{m_k}|\mathscr{F}_n)\longrightarrow Y_n\ a.e.\ ,k\to\infty$. 但 X 是 BMO 序列.从而

$$\|E(X_{m_k}|\mathscr{F}_n)-X_n\|$$
$$\leqslant E(\|X_{m_k}-X_n\|\,|\mathscr{F}_n)\leqslant 2\|X\|_{\mathrm{BMO}},$$

令 $k\to\infty$ 得

$$\|Y_n-Z_n\|\leqslant 2\|X\|_{\mathrm{BMO}},$$

即 $\|Z_n\|\leqslant 2\|X\|_{\mathrm{BMO}}$,所以 $z\in L^\infty\subset$ BMO,由于两个 BMO 序列之差仍为 BMO 序列,故 $Y=X-Z$ 是 BMO 列. 这就证明了(2). 定理证毕.

第七章 B 值鞅的极限理论

§1 加权和的强大数律

在第二章中，我们曾讨论过实值鞅的极限理论，在这一章中，我们将简略地讨论 B 值鞅的极限理论.

定理 1.1[93] 设 B 是一 Banach 空间，$\{D_n, n\geqslant 1\}$ 是一个 B 值随机变量序列，且 L^p 有界，即

$$\sup_{n\geqslant 1} E(\|D_n\|^p)<\infty,$$

$\{a_n\}$ 是一正数序列.

(1) 若 $0<p<1$，$A_n\equiv\sum_{i=1}^{n}a_i^p\to\infty$，$(n\to\infty)$，则对任意 $\alpha>1$，均有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_iD_i}{(A_n\cdot\log A_n\cdot[\log_2 A_n]^{\alpha})^{\frac{1}{p}}}=0, a.e.. \tag{1.1}$$

(2) 若 B 是 p 阶光滑空间，$1\leqslant p\leqslant 2$，$\{D_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是 B 值鞅差序列，$A_n\equiv\sum_{i=1}^{n}a_i^p\to\infty$，$(n\to\infty)$，则对任意 $\alpha>1$，均有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_iD_i}{(A_n\cdot\log A_n\cdot[\log_2 A_n]^{\alpha})^{\frac{1}{p}}}=0, a.e.. \tag{1.2}$$

(3) 若 B 是二阶光滑空间，$\{D_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是 B 值鞅差序列，

$p > 2, A_n \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \to \infty, (n \to \infty)$,则对任意 $\alpha > 1$,均有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \bar{D}_i}{(A_n^{\frac{p}{2}} \cdot \log A_n \cdot [\log_2 A_n]^{\alpha})^{\frac{1}{p}}} = 0, a.e.. \qquad (1.3)$$

其中 $\log_2 x = \log(\log x)$.

证　以下不妨令 $A_1 > e$.

(1) 首先注意:对任意非负实数序列 $\{c_i\}$,及 $0 < p < 1$,均有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i^p.$$

因此,先用范数三角不等式再用上述不等式得

$$E\left(\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i D_i \right\|^p\right) \leqslant E\left(\left[\sum_{i=1}^{n} \| a_i D_i \|\right]^p\right)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} E(\| a_i D_i \|^p) = \sum_{i=1}^{n} a_i^p E(\| D_i \|^p)$$

$$\leqslant \sup_{n\geqslant 1} E(\| D_i \|^p) \cdot A_n. \qquad (1.4)$$

令

$$n_k = \inf\{n : A_n > e^k\},$$

则

$$(\log A_{n_k})(\log_2 A_{n_k})^{\alpha} > k(\log k)^{\alpha}. \qquad (1.5)$$

记

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i D_i,$$

则对任何 $\varepsilon > 0$,由切贝谢夫不等式、(1.4)、(1.5) 有

$$P\left(\| S_{n_k} \| > \varepsilon (A_{n_k} \cdot \log A_{n_k} \cdot (\log_2 A_{n_k})^{\alpha})^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\leqslant \frac{E(\| S_{n_k} \|^p)}{\varepsilon^p A_{n_k} \cdot \log A_{n_k} \cdot (\log_2 A_{n_k})^{\alpha}}$$

$$\leqslant \frac{c}{\log A_{n_k} \cdot (\log_2 A_{n_k})^{\alpha}} \leqslant \frac{c}{k(\log k)^{\alpha}}. \qquad (1.6)$$

但是

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{\alpha}} < \infty, \tag{1.7}$$

所以由(1.6)、(1.7)并用 Borel-Cantelli 引理可得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\| S_{n_k} \|}{(A_{n_k} \cdot \log A_{n_k} \cdot (\log_2 A_{n_k})^{\alpha})^{\frac{1}{p}}} = 0, a.e.. \tag{1.8}$$

但由 n_k 的定义有

$$\frac{A_{n_{k+1}-1}}{A_{n_k}} < \frac{e^{k+1}}{e^k} = e, \tag{1.9}$$

所以

$$\begin{aligned}
&E(\max_{n_k \leqslant n < n_{k+1}} \| S_n - S_{n_k} \|^p) \\
&= E\Big(\max_{n_k \leqslant n < n_{k+1}} \| \sum_{i=n_k+1}^{n} a_i D_i \|^p\Big) \\
&\leqslant E\Big(\max_{n_k \leqslant n < n_{k+1}} \sum_{i=n_k+1}^{n} \| a_i D_i \|^p\Big) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n_{k+1}-1} E(a_i^p \| D_i \|^p) \\
&\leqslant (\sup_{i\geqslant 1} E(\| D_i \|^p)) A_{n_{k+1}-1} \\
&\leqslant (\sup_{i\geqslant 1} E(\| D_i \|^p)) e A_{n_k}.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

由(1.10),仿(1.8)可证

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\max\limits_{n_k \leqslant n < n_{k+1}} \| S_n - S_{n_k} \|}{(A_{n_k} \cdot \log A_{n_k} \cdot (\log_2 A_{n_k})^{\alpha})^{\frac{1}{p}}} = 0, a.e.. \tag{1.11}$$

固定 $n > 1$,可选 k,使 $n_k \leqslant n < n_{k+1}$,则有

$$\begin{aligned}
&\frac{\| S_n \|}{(A_n \cdot \log A_n \cdot [\log_2 A_n]^{\alpha})^{\frac{1}{p}}} \leqslant \frac{\| S_n \|}{(A_{n_k} \cdot \log A_{n_k} \cdot [\log_2 A_{n_k}]^{\alpha})^{\frac{1}{p}}} \\
&\leqslant \frac{\| S_n - S_{n_k} \| + \| S_{n_k} \|}{(A_{n_k} \cdot \log A_{n_k} \cdot [\log_2 A_{n_k}]^{\alpha})^{\frac{1}{p}}}
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{\max\limits_{n_k \leqslant n < n_{k+1}} \| S_n - S_{n_k} \| + \| S_{n_k} \|}{(A_{n_k} \cdot \log A_{n_k} \cdot [\log_2 A_{n_k}]^{\alpha})^{\frac{1}{p}}}. \tag{1.12}$$

由(1.8)、(1.11)和(1.12)即得(1.1).

(2) 令

$$c_j = \frac{a_j}{(A_j \cdot \log A_j \cdot [\log_2 A_j]^{\alpha})^{\frac{1}{p}}},$$

则$\{ \sum\limits_{j=1}^{n} c_j D_j, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1 \}$是鞅,而且

$$\sum_{j=1}^{n} E(\| c_j D_j \|^p) \leqslant \sup_{j \geqslant 1} E(\| D_j \|^p) \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^p}{A_j \cdot \log A_j \cdot (\log_2 A_j)^{\alpha}}.$$

但是

$$\int_{e}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \log x \cdot (\log_2 x)^{\alpha}} < \infty, \ (\forall \alpha > 1), \tag{1.13}$$

所以

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j - A_{j-1}}{A_j \cdot \log A_j \cdot (\log_2 A_j)^{\alpha}} < \infty, (\forall \alpha > 1), \tag{1.14}$$

从而

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{\infty} E(\| c_j D_j \|^p) \\ &\leqslant \sup_{j \geqslant 1} E(\| D_j \|^p) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i - A_{i-1}}{A_i \cdot \log A_i \cdot (\log_2 A_i)^{\alpha}} \\ &< \infty, \ (\forall \alpha > 1). \end{aligned} \tag{1.15}$$

而$\mathbf{B}$是p光滑Banach空间,所以由(1.15)并应用第五章定理3.4即得

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j D_j \qquad a.e.\ 收敛.$$

应用Kronecker引理,若令

$$b_n = (A_n \cdot \log A_n \cdot [\log_2 A_n]^{\alpha})^{\frac{1}{p}},$$

则有

$$\frac{S_n}{(A_n\cdot\log A_n\cdot[\log_2 A_n]^{\alpha})^{\frac{1}{p}}}=\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}a_jD_j$$

$$=\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}b_j(c_jD_j)\to 0,\qquad a.e.. \tag{1.16}$$

(3) 由 **B** 是二阶光滑 Banach 空间，$\{S_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是 L^p 可积鞅，所以(参看[89])

$$E(\|S_n\|^p)\leqslant cE\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\|D_i\|^2\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]$$

$$=cE\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i^2)^{1-\frac{2}{p}}(a_i^2)^{\frac{2}{p}}\|D_i\|^2\Big)^{\frac{p}{2}}\Big]. \tag{1.17}$$

但是由 Hölder 不等式有：

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i^2)^{1-\frac{2}{p}}(a_i^2)^{\frac{2}{p}}\|D_i\|^2$$

$$\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\Big)^{1-\frac{2}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}\big((a_i^2)^{\frac{2}{p}}\|D_i\|^2\big)^{\frac{p}{2}}\Big)^{\frac{2}{p}}$$

$$=A_n^{1-\frac{2}{p}}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\|D_i\|^p\Big)^{\frac{2}{p}}, \tag{1.18}$$

将(1.18)代入(1.17)得

$$E(\|S_n\|^p)\leqslant cE\Big[A_n^{\frac{p}{2}-1}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\|D_i\|^p\Big]$$

$$\leqslant c\sup_{i\geqslant 1}E(\|D_i\|^p)\cdot A_n^{\frac{p}{2}}. \tag{1.19}$$

利用(1.19)，仿(1)可证(1.3)成立.

下面我们将利用“尾概率的一致有界性”来进一步研究鞅的加权和的强大数定律.

定义 1.1 称 **B** 值随机序列$(D_n,n\geqslant 1$ 是尾概率一致有界的，若存在正实值随机变量 Z_0，及正实数 $c\in(0,\infty)$，使

$$P(\|D_n\|>t)\leqslant cP(Z_0>t),\quad(\forall\, n\geqslant 1,t>0). \tag{1.20}$$

这时，记$\{D_n\}\in b_p(Z_0)$.

本节剩余部分，对任意二列正实数$\{A_k,k\geqslant 1\}$、$\{a_k,k\geqslant 1\}$，恒

记

$$N_A(x) \equiv \operatorname{Card}\{k: \frac{A_k}{a_k} < x\}, \quad (\forall\, x > 0). \tag{1.21}$$

引理 1.2 设$\{a_k, k \geqslant 1\}$、$\{A_k, k \geqslant 1\}$是任意二列正实数，且$A_k \uparrow \infty$. 令$0 < p < \infty$，$\{D_n\}$是一列实值随机变量，且$\{D_n\} \in b_p(Z_0)$，$E(Z_0^p) < \infty$，$\overline{\lim\limits_{x \to \infty}} \frac{1}{x^p} \cdot N_A(x) < \infty$，且存在$x_0 > 0$使$N_A(x_0) = 0$，令

$$D'_n = D_n I_{\{\| D_n \| \leqslant \frac{A_n}{a_n}\}}, \quad (n \geqslant 1) \tag{1.22}$$

则总有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^r E(\| D'_n \|^r)}{A_n^r} < \infty, \ (\forall\, r > p). \tag{1.23}$$

证 由引理假设得知：存在常数K，使

$$N_A(x) < Kx^p, \quad (\forall\, x > 0). \tag{1.24}$$

再用$\{D_n\} \in b_p(Z_0)$有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^r E(\| D'_n \|^r)}{A_n^r} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^r}{A_n^r} \int\limits_{\left\{\| D_n \| \leqslant \frac{A_n}{a_n}\right\}} \| D_n \|^r dP \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^r}{A_n^r} \int_0^{\frac{A_n}{a_n}} t^r dP(\| D_n \| \leqslant t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^r}{A_n^r} \left[\frac{A_n^r}{a_n^r} P\left(\| D_n \| \leqslant \frac{A_n}{a_n}\right) - r\int_0^{\frac{A_n}{a_n}} t^{r-1} P(\| D_n \| \leqslant t) dt\right] \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{r a_n^r}{A_n^r} \int_0^{\frac{A_n}{a_n}} t^{r-1}(1 - cP(Z_0 > t)) dt\right] \\
&= rc \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^r}{A_n^r} \int_0^{\frac{A_n}{a_n}} t^{r-1} P(Z_0 > t) dt \\
&= rc \int_0^{\infty} t^{r-1} P(Z_0 > t) \sum_{\left\{n: \frac{A_n}{a_n} > t\right\}} \frac{a_n^r}{A_n^r} dt.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

但是

$$\sum_{\left\{n:\frac{A_n}{a_n}>t\right\}} \frac{a_n^r}{A_n^r} = \lim_{u\to\infty} \sum_{\left\{n:t<\frac{A_n}{a_n}<u\right\}} \frac{a_n^r}{A_n^r}$$

$$= \lim_{u\to\infty}\int_t^u \frac{dN_A(y)}{y^r}$$

$$= \lim_{u\to\infty}\left(\frac{N_A(u)}{u^r} - \frac{N_A(t)}{t^r} + \int_t^u \frac{rN_A(y)}{y^{r+1}}dy\right)$$

$$\leqslant r\int_t^{\infty} \frac{N_A(y)}{y^{r+1}}dy \qquad \left(\because \lim_{u\to\infty}\frac{N_A(u)}{u^r} = 0\right). \quad (1.26)$$

以(1.26)代入(1.25)并注意(1.24)得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^r E(\| D'_n \|^r)}{A_n^r} \leqslant cr^2\int_0^{\infty} t^{r-1}P(Z_0 > t)\int_t^{\infty} \frac{N_A(y)}{y^{r+1}}dydt$$

$$\leqslant cr^2K\int_0^{\infty} t^{r-1}P(Z_0 > t)\int_t^{\infty} \frac{y^p}{y^{r+1}}dydt$$

$$= cr^2K(r-p)^{-1}\int_0^{\infty} t^{p-1}P(Z_0 > t)dt$$

$$\leqslant c'E(Z_0^p) < \infty.$$

引理 1.3 设$\{a_n\}$、$\{A_n\}$、$\{D_n\}$如引理 1.2. $\{D_n\} \in b_p(Z_0)$; $\left\{\frac{A_n}{a_n}\right\}$严格上升.

(1) 设$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{N_A(x)}{x} < \infty$, $E(Z_0\log^+ Z_0) < \infty$. 令

$$D''_n = D_n I_{\left(\| D_n \| > \frac{A_n}{a_n}\right)},$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n}E(\| D''_n \|) < \infty. \quad (1.27)$$

(2) 设$1 < p < \infty$, $\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{N_A(x)}{x^p} < \infty$, $E(Z_0^p) < \infty$. 令D''_n如前,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n} E(\| D''_n \|) < \infty. \tag{1.28}$$

证 (1) 由假设可取常数 K，使

$$N_A(x) \leqslant Kx, \quad (\forall\ x > 0). \tag{1.29}$$

又由 $\{D_n\} \in b_p(Z_0)$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n} E(\| D''_n \|) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n} \int_{\frac{A_n}{a_n}}^{\infty} t dP(\| D_n \| \leqslant t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[P\left(\| D_n \| > \frac{A_n}{a_n} \right) + \frac{a_n}{A_n} \int_{\frac{A_n}{a_n}}^{\infty} P(\| D_n \| > t) dt \right]$$

$$\leqslant c \sum_{n=1}^{\infty} \left[P\left(Z_0 > \frac{A_n}{a_n} \right) + \frac{a_n}{A_n} \int_{\frac{A_n}{a_n}}^{\infty} P(Z_0 > t) dt \right]. \tag{1.30}$$

但是 $N_A(x)$ 对 x 非降，$\left\{\frac{A_n}{a_n}\right\}$ 严格上升，所以

$$\left\{ Z_0 > \frac{A_n}{a_n} \right\} \subset \left\{ N_A(Z_0) \geqslant N_A\left(\frac{A_n}{a_n} \right) \right\}$$

$$= \{ N_A(Z_0) \geqslant (n-1) \}. \tag{1.31}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(Z_0 > \frac{A_n}{a_n} \right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(N_A(Z_0) \geqslant n-1)$$

$$= E(N_A(Z_0)). \tag{1.32}$$

再用(1.29)有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(Z_0 > \frac{A_n}{a_n} \right) \leqslant KE(Z_0) < \infty. \tag{1.33}$$

又

$$n - 1 = N_A\left(\frac{A_n}{a_n} \right) \leqslant K \frac{A_n}{a_n}, \tag{1.34}$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{A_n} \int_{\frac{A_n}{a_n}}^{\infty} P(Z_0 > t)dt \\
&\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{K}{n-1} \int_{\frac{n-1}{K}}^{\infty} P(Z_0) > t)dt \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \int_{n-1}^{\infty} P(Z_0K > s)ds \\
&\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \sum_{m=n-1}^{\infty} P(Z_0K > m) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} P(Z_0K > m) \sum_{n=2}^{m-1} \frac{1}{n-1} \\
&\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} P(Z_0K > m) + \sum_{m=1}^{\infty} P(Z_0K > m)\log m \\
&\leqslant E(Z_0K) + \sum_{m=1}^{\infty} P(Z_0K > m)\log m. \qquad (1.35)
\end{aligned}
$$

但是

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} P(Z_0K > m)\log m \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \log m \sum_{k=m}^{\infty} \int_{(k,k+1]} dP(Z_0K \leqslant t) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{k} \log m \int_{(k,k+1]} dP(Z_0K \leqslant t) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} k\log k \int_{(k,k+1]} dP(Z_0K \leqslant t) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k,k+1]} t\log t dP(Z_0K \leqslant t) \\
&\leqslant E(Z_0K\log^+ Z_0K) < \infty. \qquad (1.36)
\end{aligned}
$$

以(1.36)、(1.35)、(1.33)代入(1.30)即得

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n} E(\| D''_n \|) < \infty. \qquad (1.37)
$$

(2) 由假设可取常数 $K > 0$,使

$$N_A(x) \leqslant Kx^p \quad (\forall\ x > 0). \tag{1.38}$$

仿(1.30)有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n} E(\| D''_n \|) \leqslant c\left(\sum_{n=1}^{\infty} P\left(Z_0 > \frac{A_n}{a_n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n} \int_{\frac{A_n}{a_n}}^{\infty} P(Z_0 > t)dt \right)$$

$$= c\left(\sum_{n=1}^{\infty} P\left(Z_0 > \frac{A_n}{a_n} \right) + \int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P\left(Z_0 > \frac{A_n}{a_n} s \right) ds \right). \tag{1.39}$$

但是由(1.32)及(1.38)有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(Z_0 > \frac{A_n}{a_n} \right) \leqslant E(N_A(Z_0)) \leqslant KE(Z_0^p). \tag{1.40}$$

以(1.40)代入(1.39)得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{A_n} E(\| D''_n \|)$$

$$\leqslant c\left(KE(Z_0^p) + \int_1^{\infty} KE\left(\left(\frac{Z_0}{s} \right)^p \right) ds \right)$$

$$\leqslant c(KE(Z_0^p) + KE(Z_0^p) \int_1^{\infty} s^{-p} ds)$$

$$< \infty \qquad (\because\ 1 < p < \infty \quad E(Z_0^p) < \infty).$$

定理 1.4([93]) 本定理分三部分:

(1) 设 **B** 为任一 Banach 空间,$\{D_n, n \geqslant 1\}$ 是一列 **B** 值随机变量. $\{D_n\} \in b_p(Z_0)$, $E(Z_0^p) < \infty$, $0 < p < 1$, $\{a_n\}$、$\{A_n\}$ 是两列正实数, $A_n \uparrow \infty$, $\varlimsup_{x \to \infty} N_A(x)/x^p < \infty$, 且 $\left\{ \frac{A_n}{a_n} \right\}$ 严格上升,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_iD_i}{A_n}=0,a.e..\qquad(1.41)$$

(2) 设**B**是超自反 Banach 空间，$\{D_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是**B**值鞅差序列，$\{D_n\}\in b_p(Z_0)$，$E(Z_0\log^+ Z_0)<\infty$，$\{a_n\}$、$\{A_n\}$ 是两列正实数，$A_n\uparrow\infty$，$\{A_n/a_n\}$ 严格上升，$\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}N_A(x)/x<\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_iD_i}{A_n}=0,\quad a.e..\qquad(1.42)$$

(3) 设**B**是p阶光滑 Banach 空间，$1<p\leqslant 2$，$\{D_n,\mathscr{F}_n,n\geqslant 1\}$ 是**B**值鞅差序列，$\{D_n\}\in b_p(Z_0)$，$E(Z_0^r)<\infty$，$1<r<p$，$\{a_n\}$、$\{A_n\}$ 满足(2)中的条件，$\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}N_A(x)/x^r<\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_iD_i}{A_n}=0,a.e..\qquad(1.43)$$

证 (1) 令

$$D'_n=D_nI\left\{\|D_n\|\leqslant\frac{A_n}{a_n}\right\},(n\geqslant 1)$$

则由假设可取K使

$$N_A(x)\leqslant Kx^p,\quad(\forall\ x>0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(D'_n\neq D_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\|D_n\|>\frac{A_n}{a_n}\right)$$

$$\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}P\left(Z_0>\frac{A_n}{a_n}\right)$$

$$\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}P\left(N_A(Z_0)>N_A\left(\frac{A_n}{a_n}\right)\right)$$

$$=c\sum_{n=1}^{\infty}P(N_A(Z_0)>n-1)$$

$$\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}P((KZ_0)^p>n-1)\leqslant cE((KZ_0)^p)<\infty.\qquad(1.44)$$

所以，由 Borel-Cantelli 引理知

$$P(D'_n \neq D_n,\text{对 } n\ i.o.) = 0.$$

所以为证(1)，只须证

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i D'_i}{A_n} = 0, \quad a.e.. \tag{1.45}$$

但是，由引理 1.2(注意$\left\{\frac{A_n}{a_n}\right\}$严格上升保证了 $N_A\left(\frac{A_1}{a_1}\right) = 0$) 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n E(\| D'_n \|)}{A_n} < \infty,$$

从而

$$E\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \| D'_n \|}{A_n}\right) < \infty.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \| D'_n \|}{A_n} < \infty, a.e..$$

因此，用 Kronecker 引理可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \| D'_i \|}{A_n} = 0, \quad a.e.,$$

(1) 证毕.

(2) 因为 **B** 是超自反空间，故 **B** 也是 r 阶光滑空间($r > 1$). 令

$$D'_n = D_n I_{\left(\| D_n \| \leqslant \frac{A_n}{a_n}\right)}, \qquad D''_n = D_n I_{\left(\| D_n \| > \frac{A_n}{a_n}\right)}$$

$$\Delta'_n = D'_n - E(D'_n | \mathscr{F}_{n-1}), \qquad \Delta''_n = D''_n - (D''_n | \mathscr{F}_{n-1})$$

则$\{\Delta'_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$，$\{\Delta''_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$ 是鞅差序列，而且

$$\begin{aligned} \Delta'_n + \Delta''_n &= D'_n + D''_n - E(D'_n + D''_n | \mathscr{F}_{n-1}) \\ &= D_n - E(D_n | \mathscr{F}_{n-1}) = D_n. \end{aligned} \tag{1.46}$$

又因为$\{D_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$、$\{\Delta'_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$、$\{\Delta''_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1\}$都是鞅差序列，**B** 是 r 阶光滑空间($r > 1$)，所以

$$E\left(\left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k D_k}{A_k} \right\|\right) = E\left(\left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \Delta'_k}{A_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \Delta''_k}{A_k} \right\|\right)$$

$$\leqslant E\left(\| \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \Delta'_k}{A_k} \| \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k E(\| \Delta''_k \|)}{A_k}$$

$$\leqslant \left[E\left(\| \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \Delta'_k}{A_k} \|^r \right) \right]^{\frac{1}{r}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k E(\| \Delta''_k \|)}{A_k}$$

$$\leqslant \left[c \sum_{k=1}^{\infty} E\left(\| \frac{a_k \Delta'_k}{A_k} \|^r \right) \right]^{\frac{1}{r}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k E(| \Delta'_k |)}{A_k}. \tag{1.47}$$

但是

$$\| \Delta'_k \|^r \leqslant (\| D'_k \| + E(\| D'_k \| \mid \mathscr{F}_{k-1}))^r$$

$$\leqslant (2 \| D'_k \|)^r + (2E(\| D'_k \| \mid \mathscr{F}_{k-1}))^r$$

$$\leqslant 2^r (\| D'_k \|^r + [E(\| D'_k \| \mid \mathscr{F}_{k-1})]^r).$$

再用 Jensen 不等式有

$$\| \Delta'_k \|^r \leqslant 2^r (\| D'_k \|^r + E(\| D'_k \|^r \mid \mathscr{F}_{k-1})),$$

从而

$$E(\| \Delta'_k \|^r) \leqslant 2^{r-1} E(\| D'_k \|^r). \tag{1.48}$$

仿之有

$$E(\| \Delta''_k \|) \leqslant 2^2 E(\| D''_k \|).$$

9) 以(1.48)、(1.49)代入(1.47)再利用引理 1.2 和引理 1.3 可得

$$E\left(\| \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k D_k}{A_k} \| \right) \leqslant \left(2^{r-1} c \sum_{k=1}^{\infty} E\left(\| \frac{a_k D'_k}{A_k} \|^r \right) \right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+ 2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k E(\| D''_k \|)}{A_k} < \infty. \tag{1.50}$$

此即

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k D_k}{A_k}, \mathscr{F}_n, n \geqslant 1 \right\}$$

是 L^1 有界 **B** 值鞅. 而今 **B** 是超自反的，所以 **B** 有 Radon-Nikodym 性质，因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_n D_n}{A_n} \qquad a.e. \text{ 收敛}.$$

再用 Kronecker 引理知：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}a_iD_i}{A_n}=0, a.e..$$

(3) 设 D_n、D'_n、D''_n、Δ'_n、Δ''_n 的定义如(2). 仿(2) 有

$$E\left(\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kD_k}{A_k}\right\|\right)\leqslant K\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}E\left(\left\|\frac{a_kD'_k}{A_k}\right\|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_kE(\|D''_k\|)}{A_k}\right]. \tag{1.51}$$

由引理 1.2、1.3 及 **B** 具有 RNP 可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kD_k}{A_k}\qquad a.e. 存在,$$

再用 Kronecker 引理可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kD_k}{A_n}=0\qquad a.e..$$

定理证毕.

§2 Banach 代数中的鞅变换

在第二章中,我们曾经研究过实值可预报序列与实值鞅的变换. 在第五章中,我们又讨论过实值可预报序列与 **B** 值鞅的变换. 在这一节中,我们将研究取值于 Banach 代数中的可预报序列与取值于 Banach 代数中的鞅的变换(参见[94]).

定义 2.1 称某个数域 R(下面取 R 为实数空间)上的线性空间 **B** 是一个代数,如果对任意 $x,y\in\mathbf{B}$,存在唯一一个乘积 $xy\in\mathbf{B}$,具有下列性质:

(1) 结合性:$(xy)z=x(yz)$,$(\forall\ x,y,z\in\mathbf{B})$;

(2) 分配性:$x(y+z)=xy+xz$,$(y+z)x=yx+zx$,$(\forall\ x,y,z\in\mathbf{B})$;

(3) $\alpha\beta(xy)=(\alpha x)(\beta y)$,$(\forall\ \alpha,\beta\in R,xy\in\mathbf{B})$;

(4) 有单位元素 $e\in\mathbf{B}$,使 $ex=xe=x$,$(\forall\ x\in\mathbf{B})$.

称代数 B 是一个 Banach 代数，如果 B 还是一个 Banach 空间，而且满足：

(5) $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$，$(\forall x, y \in \mathbf{B})$；

(6) $\|e\| = 1$.

注：由(5)和范数的三角不等式知

$$\|x_n y_n - xy\| \leqslant \|x_n(y_n - y)\| + \|(x_n - x)y\|$$
$$\leqslant \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\|,$$

所以 xy 对 x 和 y 连续(依范数).

例 1 n 维欧氏空间 R^n 按通常的线性运算和乘法，在通常的欧氏范数下构成 Banach 代数.

例 2 设 $(E,\mathscr{E})$ 是任一可测空间. $\mathscr{L}$ 是定义在 $\mathscr{E}$ 上的全体实值赋号测度，$\mathscr{M}$ 是定义在 E 上的全体实值有界可测函数. 令

$$\mathbf{B} = \left\{\mu(x,A): \begin{matrix}\forall c \in E, \mu(x,\cdot) \in \mathscr{L}, \\ \forall A \in \mathscr{E}, \mu(\cdot,A) \in \mathscr{M},\end{matrix} \sup_{x\in E}\|\mu(x,\cdot)\| < \infty\right\},$$

其中 $\|\mu(x,\cdot)\|$ 表示实值赋号测度 $\mu(x,\cdot)$ 的"全变差范数".

在 B 中依通常习惯定义加法及数量乘法. 并定义 B 中二元素 μ_1、μ_2 的乘法如下：

$$(\mu \otimes \mu_2)(x,A)$$
$$= \int_E \mu_1(x,dy)\mu_2(y,A), (x \in E, A \in \mathscr{E}), \tag{2.1}$$

再在 B 中定义范数如下：

$$\|\mu\| = \sup_{x\in E}\|\mu(x,\cdot)\|, \tag{2.2}$$

则有 $\|I_A(x)\| = 1$，即是 $I_A(x)$ 是 B 中的单位元素，记之为 I. 易证

(i) $\|\mu_1 \otimes \mu_2\| \leqslant \|\mu_1\|\|\mu_2\|$，$(\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{B})$；

(ii) $(\mathbf{B}, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间.

(iii) B 在前面定义的线性运算及乘法下，关于范数 $\|\cdot\|$ 构成一个 Banach 代数.

定义 2.2 若 Banach 代数对其中的乘法满足交换律，则称此

Banach 代数为交换 Banach 代数.

在这一节中,恒记

$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为完备概率空间,$(\mathbf{B},\|\cdot\|)$ 是 Banach 代数,

$M(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$

$=\{f:f$ 是关于 $\mathscr{F}$ 强可测的 $\mathbf{B}$ 值随机变量$\}$,

$L^p(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$

$=\{f:f\in M(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B}),\|f\|^p$ 是 Bochner 可积的$\}$,

$(p\geqslant 1)$,

$L(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})=L^1(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$.

命题 2.1 设 $X\in L(\Omega,\mathscr{F},P;B)$,$Y\in M(\Omega,\mathscr{G},P;\mathbf{B})$,$\int_\Omega\|X\|\,\|Y\|dP<\infty$,$\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 中的子 σ 代数,则

$$E(XY|\mathscr{G})=E(X|\mathscr{G})Y, \tag{2.3}$$

$$E(YX|\mathscr{G})=YE(X|\mathscr{G}). \tag{2.4}$$

证 只证(2.3)((2.4)的证明类似(2.3)),为此,只须证

$$\int_A E(X|\mathscr{G})YdP=\int_A XYdP,\quad (A\in\mathscr{G}). \tag{2.5}$$

取

$$Y_n=\sum_{i=1}^{k_n}y_i^{(n)}I_{A_i^{(n)}},A_i^{(n)}\in\mathscr{G},y_i^{(n)}\in\mathbf{B},$$

$$\|Y_n\|\leqslant 2\|Y\|,\lim_{n\to\infty}Y_n=Y,a.e.,$$

显然有

$$\int_A E(X|\mathscr{G})Y_ndP=\int_A XY_ndP,\quad (A\in\mathscr{G}). \tag{2.6}$$

用 Banach 代数中乘法的范数不等式(定义 2.1 中的(5))及 Bochner 积分的控制收敛定理,在(2.6)中令 $n\to\infty$ 即得(2.5).命题证毕.

命题 2.2 (1) 设 $\mathbf{B}$ 是可分的 Banach 代数,$\{D_n,n\geqslant 0\}$ 是 $\mathbf{B}$ 值随机变量序列.则$\{D_n,n\geqslant 0\}$ 是鞅差序列的充要条件是:对任意

的

$$\varphi_n: \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}, \varphi_n \text{ 关于}(\mathscr{B}(\mathbf{B}^n), \mathscr{B}(\mathbf{B})) \text{ 可测},$$

$\| \varphi_n(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) \| \leqslant K_n, (\forall\ x_0, \cdots, x_{n-1} \in \mathbf{B})$,均有

$$E(\varphi_n(D_0, D_1, \cdots, D_{n-1}) D_n) = 0, \quad (n \geqslant 1). \tag{2.7}$$

(2) 设 $\mathbf{B}$ 是任一 Banach 代数,$\{D_n, n \geqslant 0\}$ 是 $\mathbf{B}$ 值鞅差序列,$E(\| \sum_{i=0}^{n} D_i \|^2) < \infty, (n \geqslant 0)$,则$\{D_n, n \geqslant 0\}$ 是正交系.

证 (1) 必要性. 若存在 $\mathbf{B}$ 值鞅 $X = \{X_n, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$,使 $D_n = X_n - X_{n-1}, (n \geqslant 0, X_{-1} \equiv 0)$,则

$$E(D_n | \mathscr{F}_{n-1}) = 0, \quad (n \geqslant 1). \tag{2.8}$$

显然

$$E(\| \varphi_n(D_0, D_1, \cdots, D_{n-1}) \| \| D_n \|) \leqslant K_n E(\| D_n \|) < \infty,$$

所以,由命题 2.1 有

$$\begin{aligned} & E(\varphi_n(D_0, D_1, \cdots, D_{n-1}) D_n) \\ & = E(E(\varphi_n(D_0, D_1, \cdots, D_{n-1}) D_n) | \mathscr{F}_{n-1})) \\ & = E(\varphi_n(D_0, D_1, \cdots, D_{n-1}) E(D_n) | \mathscr{F}_{n-1})) \\ & = 0. \end{aligned}$$

充分性. 设(2.7) 成立. 取 $\mathscr{F}_n = \sigma(D_0, D_1, \cdots, D_n)$ 是 $D_0, D_1, \cdots, D_n$ 所产生的 σ 代数,$n = 0, 1, 2, \cdots$. 任取 $A \in \mathscr{F}_{n-1}$,由于$(D_0, D_1, \cdots, D_{n-1})^{-1}(\mathscr{B}(\mathbf{B}^n)) = \mathscr{F}_{n-1}$(此处 $\mathbf{B}^n$ 是 $\mathbf{B}$ 的 n 次笛卡尔积,$\mathscr{B}(\mathbf{B}^n)$ 是 $\mathbf{B}^n$ 中全体开集所产生的 σ 代数),所以存在 $A_{n-1} \in \mathscr{B}(\mathbf{B}^n)$,使$(D_0, D_1, \cdots, D_{n-1})^{-1}(A_{n-1}) = A$. 取

$$\varphi_n(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) = \begin{cases} e, & (x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) \in A_{n-1}, \\ 0, & \text{反之}, \end{cases}$$

其中 e、0 分别是 $\mathbf{B}$ 中的单位元和零元,则

$$\varphi_n = (D_0, D_1, \cdots, D_{n-1}) = \begin{cases} e, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \overline{\in} A. \end{cases}$$

由(2.7) 有

$$\int_A D_n dP = \int_\Omega \varphi_n(D_0, D_1, \cdots, D_{n-1}) D_n dP = 0, (n \geqslant 1),$$

所以 $E(D_n | \mathscr{F}_{n-1}) = 0 (n \geqslant 1)$，从而 $\{\sum_{i=0}^{n} D_i, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是 **B** 值鞅. 充分性证毕.

(2) 令 $X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i, (n \geqslant 0)$. 由于 $E(\| X_n \|^2) < \infty (n \geqslant 0)$，所以

$$\begin{aligned} E(\| D_n \|^2) &= E(\| X_n - X_{n-1} \|^2) \\ &\leqslant E([\| X_n \| + \| X_{n-1} \|]^2) \\ &\leqslant E(\| X_n \|^2 + \| X_{n-1} \|^2 + 2(\| X_n \| \| X_{n-1} \|)) \\ &\leqslant 2E(\| X_n \|^2 + \| X_{n-1} \|^2) < \infty, (n \geqslant 0). \end{aligned}$$

更有

$$E(\| D_n \| \| D_m \|) < \infty \quad (n \geqslant 0, m \geqslant 0).$$

因此，由命题 2.1，当 $m < n$ 时有

$$0 = E(E(D_n | \mathscr{F}_m) D_m) = E(D_n D_m),$$

此即 $\{D_n, n \geqslant 0\}$ 是正交系.

定理 2.1 设 **B** 是 2 阶光滑的 Banach 代数，$X = \{X_n = \sum_{i=0}^{n} D_i, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是 **B** 值鞅，$V = \{V_n, n \geqslant 0\}$ 是 **B** 值可预报序列，即是 V_n 是关于 $\mathscr{F}_{n-1}$ 强可测的 **B** 值随机变量($n \geqslant 0$，$\mathscr{F}_{-1}$ 定义为 $\mathscr{F}$)，$Y = \{Y_n = \sum_{i=0}^{n} V_i D_i, \mathscr{F}_n, n \geqslant 0\}$ 是 X 关于 V 的变换，令 $V^* = \sup_{n \geqslant 0} \| V_n \| \leqslant \alpha < \infty$，

$$E(\| X_n \|^2) < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} E(\| D_n \|^2) < \infty,$$

则 $\{Y_n, n \geqslant 0\}$ L^2 收敛.

证 显然，对任何 $m \geqslant 0$，$\{\sum_{k=m+1}^{n} V_k D_k, \mathscr{F}_n, n > m\}$ 是 **B** 值鞅，又因为 **B** 是 2 阶光滑空间，所以当 $n > m$ 时

$$E(\| Y_n - Y_m \|^2) = E\left(\| \sum_{k=m+1}^{n} V_k D_k \|^2 \right)$$

$$= c \sum_{k=m+1}^{n} E(\| V_k D_k \|^2)$$

$$= c \sum_{k=m+1}^{n} E(\| V_k \|^2 \| D_k \|^2)$$

$$\leqslant c\alpha^2 \sum_{k=m+1}^{n} E(\| D_k \|^2). \tag{2.9}$$

在(2.9)中令 $n > m \to \infty$,即得定理 2.1.

定理 22 设 $\mathbf{B}$、X、V、Y 如定理 2.1,(V^* 不必 $\leqslant \alpha < \infty$),$\{X_n\}$、$\{D_n\}$ 满足定理 2.1 中的条件,则

$$\lim_{n\to\infty} Y_n \quad \text{存在}\ a.e.\ in\{V^* < \infty\}. \tag{2.10}$$

证 (1) 设 $V^*(\omega) \leqslant 1$,($\forall\ \omega \in \Omega$).

由 $\mathbf{B}$ 是二阶光滑空间得知:$\exists\ c > 0$ 使

$$E(\| Y_n \|^2) = E\left(\| \sum_{k=0}^{n} V_k D_k \|^2 \right)$$

$$\leqslant c \sum_{k=0}^{n} E(\| V_k D_k \|^2)$$

$$\leqslant c \sum_{k=0}^{n} E(\| D_k \|^2) \leqslant c \sum_{k=0}^{\infty} E(\| D_k \|^2) < \infty$$

更有

$$\sup_{n\geqslant 0} E(\| Y_n \|) < \infty,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} Y_n \qquad a.e.\ \text{存在}.$$

(2) 一般情况,令

$$U_k^{(\lambda)} = \begin{cases} V_k, & \text{若}\ \| V_k \| \leqslant \lambda, \\ 0, & \text{反之}. \end{cases}$$

则由(1)知:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{U_k^{(\lambda)}}{\lambda} D_k \qquad a.e.\ \text{存在},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}U_k^{(\lambda)}D_k \qquad a.e. \text{存在}.$$

但对一切 $\lambda>0$,总有

$$\{V^*\leqslant\lambda\}\subset\bigcap_{n=0}^{\infty}\{U_n^{(\lambda)}=V_n\}$$

$$\subset\{\omega:\lim_{n\to\infty}Y_n(\omega)\ \text{存在}\} \qquad a.e.,$$

所以

$$\{V^*<\infty\}\subset\{\omega:\lim_{n\to\infty}Y_n(\omega)\ \text{存在}\} \qquad a.e.,$$

定理证毕.

第八章　定向集上的 B 值鞅型过程

本章总假设 Δ 是一向右定向集，记 $\bar{\Delta}=\Delta\cup\{\infty\}$，并约定对一切 $t\in\Delta$，$t\leqslant\infty$，则 $\bar{\Delta}$ 仍为向右定向集．设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是概率空间，$\{\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的一族单调上升的子 σ 代数，即对每一 $t\in\Delta$，$\mathscr{F}_t$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数且 $\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t$，$\forall\ s,t\in\Delta$，$s\leqslant t$．设 $\{X_t,t\in\Delta\}$ 是定义在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上取值于 Banach 空间 **B** 的随机过程，若对每一 $t\in\Delta$，X_t 是 $\mathscr{F}_t$ 可测的，则称 $\{X_t,t\in\Delta\}$ 适应于 $\{\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$，记为 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$，称 X 为 Δ 上的 **B** 值适应过程（或称为 **B** 值适应网）．若对每一 $t\in\Delta$，X_t 还是可积的，则称 X 为 Δ 上的 **B** 值可积适应过程（或称 **B** 值可积适应网）．$\{\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 可列停时全体记为 T，简单停时全体记为 T_s，$a.e.$ 成立的等式或不等式常省去 $a.e.$ 记号．

§1　定向集上的 B 值鞅

定义 1.1　设 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 是 Δ 上的 **B** 值可积适应过程，如果对任意 $s,t\in\Delta$，$s\leqslant t$，有

$$E(X_t|\mathscr{F}_s)=X_s,$$

则称 X 为 Δ 上的 **B** 值鞅．

定义 1.2　设 $\{X_t,t\in\Delta\}$ 是 **B** 值随机过程，X_∞ 是 **B** 值随机变量，如果 $\operatorname{slimsup}\limits_{t\in\Delta}\|X_t-X_\infty\|=0$，则称 $\{X_t,t\in\Delta\}$ 随机收敛于 X_∞ 或称 X_∞ 为 $\{X_t,t\in\Delta\}$ 随机收敛的极限，记为 $\operatorname{slim}\limits_{t\in\Delta}X_t=X_\infty$．如果

$\underset{t\in\Delta}{\text{elimsup}}\|X_t - X_\infty\| = 0$，则称$\{X_t, t\in\Delta\}$本性收敛于 X_∞，或称 X_∞ 为$\{X_t, t\in\Delta\}$本性收敛的极限，记为$\underset{t\in\Delta}{\text{elim}}X_t = X_\infty$.

显然，在序列情形上述定义即为序列的依概率收敛性及 $a.e.$ 收敛性，且$\underset{t\in\Delta}{\text{elim}}X_t = X_\infty \Rightarrow \underset{t\in\Delta}{\text{slim}}X_t = X_\infty$.

定义 1.3 设$\{A_t, t\in\Delta\}$是一可测集族，定义它的本性上极限为

$$\underset{t\in\Delta}{\text{elimsup}}A_t = \underset{t\in\Delta}{\text{einf}}(\underset{S\in\Delta(t)}{\text{esup}}A_s),$$

或等价地

$$I_{\underset{t\in\Delta}{\text{elimsup}}A_t} = \underset{t\in\Delta}{\text{elimsup}}I_{A_t}.$$

定义它的本性下极限为

$$\underset{t\in\Delta}{\text{eliminf}}A_t = \underset{t\in\Delta}{\text{esup}}(\underset{S\in\Delta(t)}{\text{einf}}A_s),$$

若$\underset{t\in\Delta}{\text{elimsup}}A_t = \underset{t\in\Delta}{\text{eliminf}}A_t = A_\infty$，则称 A_∞ 为$\{A_t, t\in\Delta\}$的本性极限，记为

$$\underset{t\in\Delta}{\text{elim}}A_t = A_\infty.$$

我们已经知道，当 $\Delta = N$ 时，Doob 鞅收敛定理是成立的，即 L^1 有界的实值鞅 $a.e.$ 收敛. 但对一般的定向集 Δ，这个结论未必成立，反例已在第四章 §4 中指明. 为了保证 Doob 鞅收敛定理对一般的定向集情形也成立，Krickeberg[96]于 1956 年提出了下面的 Vitali 条件.

定义 1.4 称单调上升的子 σ 代数族$\{\mathscr{F}_t, t\in\Delta\}$满足 Vitali 条件($V$)，如果对任一集合 $A\in\mathscr{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t)$，任一适应集合族$\{A_t, t\in\Delta\}$(即对任一 $t\in\Delta$, $A_t\in\mathscr{F}_t$)，$A\subset\underset{t\in\Delta}{\text{elimsup}}A_t$，对任一 $\varepsilon>0$，存在有限个指标 $t_1, t_2, \cdots, t_n\in\Delta$ 及两两不交的集合 $B_i\in\mathscr{F}_{t_i}$, $B_i\subset A_{t_i}$, $(i=1,2,\cdots,n)$使得 $P(A-\bigcup_{i=1}^{n}B_i)<\varepsilon$.

注：设 Δ 是完全有序的向右定向集，则单调上升的子 σ 代数族$\{\mathscr{F}_t, t\in\Delta\}$满足 Vitali 条件($V$)，特别单调上升的子 σ 代数序列是满足 Vitali 条件(V)的.

事实上，由于 $A\subset \operatorname{elimsup}_{t\in\Delta} A_t$，故存在 Δ 中的序列 $\{t_n, n\geqslant 1\}$ 使得 $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{t_n}$，对任意 $\varepsilon>0$，存在自然数 n_0，使得

$$P(A\cap(\bigcup_{n=1}^{n_0}A_{t_n})^c)\leqslant\varepsilon.$$

因 Δ 是完全有序的，故可对 $t_1,t_2,\cdots,t_{n_0}$ 按大小重新排序．不妨设 $t_1\leqslant t_2\leqslant t_3\leqslant\cdots\leqslant t_{n_0}$，令

$$B_1=A_{t_1},$$

$$B_i=A_{t_i}-(\bigcup_{j=1}^{i-1}A_{t_j})\quad i=2,\cdots,n_0,$$

则 $B_i\in\mathscr{F}_{t_i}$，$B_i\subset A_{t_i}$，$i=1,2,\cdots,n_0$，$B_i\cap B_j=\varnothing(i\neq j)$ 且

$$P(A-\bigcup_{i=1}^{n_0}B_i)=P\left(A-\bigcup_{n=1}^{n_0}A_{t_n}\right)\leqslant\varepsilon,$$

这就证明了 $\{\mathscr{F}_t, t\in\Delta\}$ 满足 Vitali 条件 (V).

定义 1.5 设 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 是 Δ 上的实值可积适应过程，如果对任意 $s,t\in\Delta$，$s\leqslant t$，有

$$E(X_t|\mathscr{F}_s)\underset{(\leqslant)}{\geqslant}X_s,$$

则称 X 为 Δ 上的下鞅（相应地上鞅）．若 X 既是上鞅又是下鞅，则称 X 为鞅.

引理 1.1 设 $(\mathbf{B},d)$ 是完备的距离空间，Δ 为向右定向集，$\{x_t,t\in\Delta\}$ 为 $\mathbf{B}$ 中任一元素族，若对 Δ 中的任一递增序列 $\{t_n,n\geqslant 1\}$，$\{x_{t_n},n\geqslant 1\}$ 收敛，则元素族 $\{x_t,t\in\Delta\}$ 收敛.

证 用反证法证明．设 $\{x_t,t\in\Delta\}$ 不收敛，则 $\{x_t,t\in\Delta\}$ 不是哥西族，于是存在 $\varepsilon>0$，使对一切 $s\in\Delta$，存在 $t\in\Delta(s)$，使得 $d(x_s,x_t)\geqslant\varepsilon$．因此，从任意 $t_1\in\Delta$ 出发，可构造 Δ 中一个递增序列 $\{t_n,n\geqslant 1\}$，使得 $d(x_{t_n},x_{t_{n-1}})\geqslant\varepsilon$，$n\geqslant 1$．显然序列 $\{x_{t_n},n\geqslant 1\}$ 不收敛，这与假设相矛盾，故引理成立.

定理 1.2 本定理分四部分陈述：

(1) 设 $1\leqslant p<\infty$，$X_\infty\in L^p(\Omega,\mathscr{F},P;R)$，令 $X_t=E(X_\infty|\mathscr{F}_t)$，$t\in\Delta$，则鞅 $\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ L^p 收敛于 $E(X_\infty|\bigvee_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t)$.

(2) 鞅$\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$具有形式$X_t=E(X_\infty|\mathscr{F}_t),t\in\Delta,X_\infty\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P;R)$的充要条件是$\{X_t,t\in\Delta\}$一致可积.

(3) L^p 可积鞅$\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ $(1<p<\infty)$具有形式$X_t=E(X_\infty|\mathscr{F}_t),t\in\Delta,X_\infty\in L^p(\Omega,\mathscr{F},P;R)$的充要条件是$\{X_t,t\in\Delta\}$ L^p 有界.

(4) 若下鞅$\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$满足条件$\sup\limits_{t\in\Delta}EX_t^-<\infty$,则$\{X_t,t\in\Delta\}$依概率收敛于一可积随机变量.

证 (1) 第二章的定理 1.12 表明(1)在序列情形时是成立的. 对 Δ 中任一递增序列$\{t_n,n\geqslant 0\}$,则$\{X_{t_n}=E(X_\infty|\mathscr{F}_{t_n}),\mathscr{F}_{t_n},n\geqslant 0\}$为鞅,由第二章的定理 1.12 知$\{E(X_\infty|\mathscr{F}_{t_n}),n\geqslant 0\}$ L^p 收敛,再由引理 1.1 知$\{E(X_\infty|\mathscr{F}_t),t\in\Delta\}$ L^p 收敛,记其 L^p 收敛的极限为 Y,即 $L^p\text{-}\lim\limits_{t\in\Delta}E(X_\infty|\mathscr{F}_t)=Y$. 下面证明 $Y=E(X_\infty|\bigvee\limits_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t)$. 首先 Y 是$\bigvee\limits_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t$ 可测的为显然,又对任一 $B\in\bigcup\limits_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t$,有

$$
\begin{aligned}
\int_B YdP &= \int_B L^p\cdot\lim_{t\in\Delta}E(X_\infty|\mathscr{F}_t)dP \\
&= L^p\cdot\lim_{t\in\Delta}\int_B E(X_\infty|\mathscr{F}_t)dP \\
&= \int_B X_\infty dP,
\end{aligned}
$$

而 $\bigcup\limits_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t$ 为代数,由 π-λ 系方法得

$$
\int_B YdP = \int_B X_\infty dP,\forall\ B\in\sigma(\bigcup_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t)=\bigvee_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t,
$$

即 $Y=E(X_\infty|\bigvee\limits_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t)$. 这就证明了(1).

(2) 若鞅$\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$是一致可积的,则对 Δ 中的任一递增序列$\{t_n,n\geqslant 0\}$,$\{X_{t_n},\mathscr{F}_{t_n},n\geqslant 0\}$为一致可积鞅,由第二章的定理 1.10 知$\{X_{t_n},n\geqslant 0\}$ L^1 收敛,再用引理 1.1 知$\{X_t,t\in\Delta\}$ L^1 收敛. 记其 L^1 收敛的极限为 X_∞,从而有

$$
E(X_\infty|\mathscr{F}_t) = E(L^1\cdot\lim_{t\in\Delta}X_t|\mathscr{F}_t)
$$

$$= L^1 \cdot \lim_{t\in\Delta} E(X_s|\mathscr{F}_t)$$
$$= X_t, \quad \forall\, t \in \Delta.$$

反之，设鞅$\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$具有形式$X_t=E(X_\infty|\mathscr{F}_t),t\in\Delta$，$X_\infty\in L^1(\Omega,\mathscr{F},P;R)$，则由第一章的定理 6.7 知$\{X_t,t\in\Delta\}$为一致可积族，这就证明了(2).

(3) 若鞅$\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}L^p$有界$(1<p<\infty)$，由第一章的推论 6.6 知$\{X_t,t\in\Delta\}$一致可积，对$\Delta$中的任一递增序列$\{t_n,n\geqslant 0\}$，$\{X_{t_n},\mathscr{F}_{t_n},n\geqslant 0\}$为一致可积鞅，由第二章的定理 1.10 知：存在可积随机变量X_∞，使得$X_{t_n}\to X_\infty,a.e.(L^1)$. 即$\{X_{t_n},n\geqslant 0\}$是$L^1$收敛的，由引理 1.1 知$\{X_t,t\in\Delta\}L^1$收敛，且其$L^1$收敛的极限为$X_\infty$. 由 Fatou 引理知$E|X_\infty|^p=E(\lim_{n\to\infty}|X_{t_n}|^p)\leqslant\liminf_{n\to\infty}E|X_{t_n}|^p\leqslant\sup_{t\in\Delta}E|X_t|^p<\infty$，即$X_\infty\in L^p(\Omega,\mathscr{F},P;R)$. 由已证的(2)可知$X_t=E(X_\infty|\mathscr{F}_t),\forall\,t\in\Delta$. 反之，若鞅$\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$具有形式$X_t=E(X_\infty|\mathscr{F}_t),\forall\,t\in\Delta,X_\infty\in L^p(\Omega,\mathscr{F},P;R)$，则$\sup_{t\in\Delta}E|X_t|^p=\sup_{t\in\Delta}E|E(X_\infty|\mathscr{F}_t)|^p\leqslant E|X_\infty|^p<\infty$，即$\{X_t,t\in\Delta\}$为$L^p$有界，这就证明了(3).

(4) 设下鞅$\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$满足条件$\sup_{t\in\Delta}EX_t^-<\infty$，则对$\Delta$中的任一递增序列$\{t_n,n\geqslant 0\}$，$\{X_{t_n},\mathscr{F}_{t_n},n\geqslant 0\}$为下鞅且$\sup_{n\geqslant 0}EX_{t_n}^-<\infty$(对下鞅这个条件等价于条件$\sup_{n\geqslant 0}E|X_{t_n}|<\infty$)由第二章的定理 1.8 知$\{X_{t_n},n\geqslant 0\}a.e.$收敛于一可积随机变量，从而$\{X_{t_n},n\geqslant 0\}$依概率收敛. $a.e.$有限的可积实随机变量全体($a.e.$相等的随机变量不加区别视为同一随机变量)记为$\mathscr{L}$，在$\mathscr{L}$中引进如下距离

$$\rho(\overline{X},\overline{Y})=\int_\Omega\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}dP,\forall\,X,Y\in\mathscr{L}.$$

不难验证：$\rho(\cdot,\cdot)$是$\mathscr{L}$上的距离且$(\mathscr{L},\rho)$是完备的距离空间. 由于

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}P(|X-Y|>\varepsilon)\leqslant\rho(X,Y)\leqslant\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}P(|X-Y|>\varepsilon),$$

故

$$\lim_{t\in\Delta}\rho(X_t,X_\infty)=0\Longleftrightarrow\lim_{t\in\Delta}P(|X_t-X_\infty|>\varepsilon),\forall\varepsilon>0.$$

再用引理 1.1 知$\{X_t,t\in\Delta\}$依概率收敛于随机变量X_∞，用 Fatou 引理知X_∞是可积的. 定理证毕.

定理 1.3 若$\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$为非负下鞅，且$\sup\limits_{t\in\Delta}EX_t^p<\infty(p>1)$，则存在$L^p$可积的随机变量$X_\infty$，使得$\{X_t,t\in\Delta\}L^p$收敛于$X_\infty$，若$\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$为一致可积下鞅，则存在可积随机变量$X_\infty$，使得$\{X_t,t\in\Delta\}L^1$收敛于$X_\infty$，在以上两种情形下均有

$$E(X_\infty|\mathscr{F}_t)\geqslant X_t,\quad\forall t\in\Delta.$$

证 设$\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$为$L^p$有界的非负下鞅($p>1$)，由第一章的推论 6.6 知，对$\Delta$中的任一递增序列$\{t_n,n\geqslant 0\}$，$\{X_{t_n},\mathscr{F}_{t_n},n\geqslant 0\}$是一致可积的非负下鞅，由第二章的定理 1.8 知，存在随机变量X_∞，使得$X_{t_n}\to X_\infty,a.e.$，对非负下鞅$\{X_{t_n},\mathscr{F}_{t_n},n\geqslant 0\}$用 Doob 不等式(第二章定理 1.5)知$\sup\limits_{n\geqslant 0}X_{t_n}$是$L^p$可积的，由 Fatou 引理知$X_\infty$是$L^p$可积的. 又$|X_{t_n}-X|\leqslant(2\sup\limits_{n\geqslant 0}X_{t_n})^p$，故由控制收敛定理有$X_{t_n}\to X_\infty(L^p)$. 再由引理 1.1 知$\{X_t,t\in\Delta\}L^p$收敛于$X_\infty$.

若$\{X_t,\mathscr{F}_{t_n},t\in\Delta\}$为一致可积下鞅，则对$\Delta$中的任一递增序列$\{t_n,n\geqslant 0\}$，$\{X_{t_n},\mathscr{F}_{t_n},n\geqslant 0\}$为一致可积下鞅，从而为$L^1$有界下鞅，据第二章的定理 1.8 知，存在可积随机变量X_∞，使得$X_{t_n}\to X_\infty,a.e.$. 由于$\{X_{t_n},n\geqslant 0\}$一致可积，故$\{X_{t_n},n\geqslant 0\}L^1$收敛于$X_\infty$，由引理 1.1 知$\{X_t,t\in\Delta\}$必$L^1$收敛于$X_\infty$，在上面两种情形下，若$s,t\in\Delta,s\leqslant t,\forall A\in\mathscr{F}_t$，由于

$$\left|\int_A(X_t-X_\infty)dP\right|\leqslant\int_A|X_t-X_\infty|dP,$$

故

$$\lim_{t\in\Delta}\int_A X_t dP=\int_A X_\infty dP.$$

因此

$$\int_A X_t dP \leqslant \varliminf_{t \in \Delta(s)} \int_A X_t dP$$
$$= \int_A X_\infty dP$$
$$= \int_A E(X_\infty | \mathscr{F}_s) dP,$$

即

$$X_s \leqslant E(X_\infty | \mathscr{F}_s), \quad \forall s \in \Delta.$$

定理 1.4 设$\{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$是非负下鞅，$\Phi$是定义在$[0,\infty)$上的单增凸函数，$\Phi(0) = 0$，且$\lim_{x \to \infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \infty$，若$\sup_{t \in \Delta} E\Phi(X_t) < \infty$，则存在可积随机变量$X_\infty$，使得$L^1.\lim_{t \in \Delta} X_t = X_\infty$，且

$$\lim_{t \in \Delta} E\Phi(|X_t - X_\infty|) = 0.$$

证 记$b = \sup_{t \in \Delta} E\Phi(X_t) < \infty$，则对任意$c > 0$，有

$$\int_{\{X_t \geqslant c\}} X_t dP = \int_{\{X_t \geqslant c\}} \frac{\Phi(X_t) X_t}{\Phi(X_t)} dP$$
$$= a_c \cdot \int_{\{X_t \geqslant c\}} \Phi(X_t) dP \leqslant a_c \cdot E\Phi(X_t) \leqslant a_c \cdot b,$$

其中$a_c = \int_{\{X_t \geqslant c\}} \frac{\Phi(X_t) X_t}{\Phi(X_t)} dP \Big/ \int_{\{X_t \geqslant c\}} \Phi(X_t) dP$，

由已知条件，$\forall \varepsilon > 0$，存在c_1，当$c > c_1$时，在集合$\{X_t \geqslant c\}$上有$X_t / \Phi(X_t) < \frac{\varepsilon}{b}$. 亦即当$c > c_1$时，

$$\int_{\{X_t \geqslant c\}} X_t dP \leqslant \varepsilon.$$

故$\{X_t, t \in \Delta\}$是一致可积族，由定理 1.3 知存在可积随机变量X_∞，使得$L^1 \cdot \lim_{t \in \Delta} X_t = X_\infty$且成立

$$X_t \leqslant E(X_\infty | \mathscr{F}_t), \quad \forall t \in \Delta.$$

由 Fatou 引理知

$$E\Phi(X_\infty) \leqslant \liminf_{t\in\Delta} E\Phi(X_t) \leqslant \sup_{t\in\Delta} E\Phi(X_t) < \infty,$$

用 Jensen 不等式有

$$\Phi(X_t) \leqslant \Phi(E(X_\infty|\mathscr{F}_t)) \leqslant E(\Phi(X_\infty)|\mathscr{F}_t).$$

再用第一章的推论 6.2 知 $\{\Phi(X_t), t \in \Delta\}$ 为一致可积族. 又 $\{\Phi(X_t), \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 为下鞅, 故

$$\lim_{t\in\Delta} E|\Phi(X_t) - \Phi(X_\infty)| = 0.$$

由于 $\Phi(x)$ 是单增凸函数, 总有

$$\Phi(|y - x|) \leqslant |\Phi(y) - \Phi(x)|, \quad \forall\, x, y \in [0, \infty),$$

因此,

$$\lim_{t\in\Delta} E\Phi(|X_t - X_\infty|) \leqslant \lim_{t\in\Delta} E|\Phi(X_t) - \Phi(X_\infty)| = 0.$$

关于定向集上 L^1 有界实值鞅的 $a.e.$ 收敛性有下面著名的 Krickeberg 定理[96].

定理 1.5 设 $\{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 是 L^1 有界的实值鞅, $\{\mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 满足 Vitali 条件(V), 则 $\{X_t, t \in \Delta\}$ 本性收敛.

1956 年 Krickeberg 首先证明了上述结论, 这个定理的一个新证法包含在下面的定理 1.6 中.

定理 1.6(Millet-Sucheston 1980[17]) 设 **B** 具有 RNP, $\{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 为 L^1 有界的 **B** 值鞅(即满足条件 $\sup_{t\in\Delta} E\|X_t\| < \infty$), $\{\mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 满足 Vitali 条件(V), 则 $\{X_t, t \in \Delta\}$ 本性收敛.

证 设 T_s 是 $\{\mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 简单停时全体, 由[17]中定理 12.3 及第一章的定理 4.3 知, 只须证明存在 **B** 值随机变量 X_∞, 使得

$$\lim_{\tau\in T_s} P(\|X_\tau - X_\infty\| > \varepsilon) = 0, \forall\, \varepsilon > 0.$$

在 $L^1(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B})$ 中定义距离 ρ:

$$\rho(X, Y) = \int_\Omega \frac{\|X - Y\|}{1 + \|X - Y\|} dP, \quad \forall\, X, Y \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B}),$$

则 $(L^1(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B}), \rho)$ 是完备的距离空间, 由于 $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} P(\|X - Y\| > \varepsilon) \leqslant \rho(X, Y) \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + P(\|X - Y\| > \varepsilon)$, 故 $L^1(\Omega, \mathscr{F},$

$P;\mathbf{B}$)中以定向集为指标为 $\mathbf{B}$ 值随机变量族的依概率收敛性等价于按距离 ρ 的收敛性，由引理 1.1 只需证明：对 T_1 中的任一递增序列 $\{\tau_n, n \geqslant 0\}$，$\{X_{\tau_n}, n \geqslant 0\}$ 依概率收敛，由于 $\{X_{\tau_n}, \mathscr{F}_{\tau_n}, n \geqslant 0\}$ 是 L^1 有界鞅（见推论 1.8），用第五章的定理 2.5 知 $\{X_{\tau_n}, n \geqslant 0\}$ a.e. 收敛，从而依概率收敛，这就证明了定理.

定理 1.7 （$\mathbf{B}$ 值鞅的可选采样定理[97]） 设 $X = \{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值鞅，$\tau_1, \tau_2 \in T$，$\tau_1 \leqslant \tau_2$ 若存在序列 $\{t_m\} \subset \Delta$ 使得

(1) $\lim\limits_{m \to \infty} P(\tau_2 \leqslant t_m) = 1$，

(2) $\lim\limits_{m \to \infty} E \| X_{t_m} \| I(\{\tau_2 \leqslant t_m\}^c) = 0$，

(3) X_{τ_2} 可积，即 $E \| X_{\tau_2} \| < \infty$，则

$$E(X_{\tau_2} | \mathscr{F}_{\tau_1}) = X_{\tau_1}.$$

证 定义

$$\tau_{im} = \begin{cases} \tau_i, \text{当 } \omega \in \{\tau_i \leqslant t_m\}, \\ t_m, \text{当 } \omega \in \{\tau_i \leqslant t_m\}^c, \end{cases} i = 1, 2.$$

对任意 $t \in \Delta$，如果 $t_m \leqslant t$，则

$$\{\tau_{im} \leqslant t\} = \Omega \in \mathscr{F}_t.$$

如果 $t_m \not\leqslant t$，则

$$\begin{aligned} \{\tau_{im} \leqslant t\} &= \{\tau_i \leqslant t\} \cap \{\tau_i \leqslant t_m\} \\ &= \bigcup_{\substack{\alpha \\ \alpha \leqslant t \\ \alpha \leqslant t_m}} \{\tau_i = \alpha\} \in \mathscr{F}_t. \end{aligned}$$

于是，τ_{im} 是停时且 $\tau_{im} \in T$，令 Γ_i 是 τ_i 的值域，$i = 1, 2$，只须证：对每一 $t \in \Gamma_1$，$A \in \mathscr{F}_{\tau_1}$，有

$$\begin{aligned} \int_{A \cap \{\tau_1 = t\}} X_{\tau_2} dP &= \int_{A \cap \{\tau_1 = t\}} X_{\tau_1} dP \\ &= \int_{A \cap \{\tau_1 = t\}} X_t dP. \end{aligned}$$

设 $t \leqslant t_m$，注意到对任意的 $s \in \Delta$，或者 $t \leqslant s$，因而 $A \cap \{\tau_1 = t\} \cap \{\tau_{2m} = s\} \in \mathscr{F}_s$，或者 $t \not\leqslant s$，这时 $s \neq t_m$，故 $\{\tau_{2m} = s\} \subset \{\tau_{2m} = \tau_2\}$，

从而 $A\cap\{\tau_1=t\}\cap\{\tau_{2m}=s\}=\varnothing\in\mathscr{F}_s$.

现在令 $t\in\Gamma_1, t_1\leqslant t_m$, 由于

$$X_s=E(X_{t_m}|\mathscr{F}_s),\quad \forall s\leqslant t_m,$$

于是

$$X_{\tau_{2m}}=\sum_s E(X_{t_m}|\mathscr{F}_s)I_{\{\tau_{2m}=s\}}.$$

上述和至多有可列项. 显然, $X_{\tau_{2m}}$ 是可积的.

则

$$\begin{aligned}\int_{A\cap\{\tau_1=t\}}X_{\tau_{2m}}dP&=\int_{A\cap\{\tau_1=t\}}\sum_s E(X_{t_m}|\mathscr{F}_s)I_{\{\tau_{2m}=s\}}dP\\&=\sum_s\int_{A\cap\{\tau_1=t\}\cap\{\tau_{2m}=s\}}E(X_{t_m}|\mathscr{F}_s)dP\\&=\sum_s\int_{A\cap\{\tau_1=t\}\cap\{\tau_{2m}=s\}}X_{t_m}dP\\&=\int_{A\cap\{\tau_1=t\}}X_{t_m}dP\\&=\int_{A\cap\{\tau_1=t\}}X_{t_1}dP,\end{aligned}$$

故 $$\begin{aligned}\int_{A\cap\{\tau_1=t\}}X_{\tau_{2m}}dP=&\int_{A\cap\{\tau_1=t\}\cap\{\tau_2\leqslant t_m\}}X_{\tau_2}dP\\&+\int_{A\cap\{\tau_1=t\}\cap\{\tau_2\leqslant t_m\}}X_{t_m}dP,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\int_{A\cap\{\tau_1=t\}}X_{\tau_{2m}}dP&=\lim_{m\to\infty}\int_{A\cap\{\tau_1=t\}\cap\{\tau_2\leqslant t_m\}}X_{\tau_2}dP\\&=\int_{A\cap\{\tau_1=t\}}X_{\tau_2}dP,\end{aligned}$$

所以, $$\int_{A\cap\{\tau_1=t\}}X_{\tau_2}dP=\int_{A\cap\{\tau_1=t\}}X_tdP$$

这就证明了定理.

注 当 $\mathbf{B}=R$ 时，上述定理即为[98]中的引理 2.3.

推论 1.8 设 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值鞅，若 $\tau_1,\tau_2\in T_s$，$\tau_1\leqslant\tau_2$，则 $E(X_{\tau_2}|\mathscr{F}_{\tau_1})=X_{\tau_1}$.

证 由于 τ_2 为简单停时，故存在 $t_0\in\Delta$，使得 $\tau_2\leqslant t_0$，任取序列 $\{t_n\}\subset\Delta(t_0)$，则定理 1.7 中的条件(1)，(2)，(3) 均成立，于是由定理立即知推论成立.

§2 定向集上的 B 值 L¹ 极限鞅

定义 2.1 设 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 是 Δ 上的 $\mathbf{B}$ 值可积适应过程. 若

$$\inf_{s\in\Delta}\sup_{t\in\Delta(s)}E(\|E(X_t|\mathscr{F}_s)-X_s\|)=0,$$

则称 X 为 $\mathbf{B}$ 值 L^1 极限鞅，显然 $\mathbf{B}$ 值鞅为 $\mathbf{B}$ 值 L^1 极限鞅.

定义 2.2 设 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 是 Δ 上的 $\mathbf{B}$ 值可积适应过程. 若

$$\lim_{t\in\Delta}E\|X_t\|=0,$$

则称 X 为位势.

定义 2.1(Riesz 分解定理[34]) 设 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 是 $\mathbf{B}$ 值可积适应过程，则 X 为 L^1 极限鞅当且仅当 X_t 能唯一分解成 $X_t=Y_t+Z_t,t\in\Delta$，其中 $Y=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值鞅，$Z=\{Z_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 为位势.

证 充分性：由于 $\mathbf{B}$ 值鞅是 $\mathbf{B}$ 值 L^1 极限鞅，L^1 收敛的 $\mathbf{B}$ 值可积适应过程是 $\mathbf{B}$ 值 L^1 极限鞅，而 $\mathbf{B}$ 值 L^1 极限鞅的线性组合仍为 $\mathbf{B}$ 值 L^1 极限鞅，故具有上述分解的 $\mathbf{B}$ 值可积适应过程是 $\mathbf{B}$ 值 L^1 极限鞅.

必要性：任取 $t\in\Delta$，对 $u,v\in\Delta(t)$，$u<v$，则有

$$\begin{aligned}&E(\|E(X_v|\mathscr{F}_t)-E(X_u|\mathscr{F}_t)\|)\\&\quad=E(\|E((X_v-X_u|\mathscr{F}_t)\|)\end{aligned}$$

$$\leqslant E(\| ((X_v - X_u)|\mathscr{F}_u) \|)$$
$$= E(\| E(X_v|\mathscr{F}_u) - X_u \|).$$

故由 X 是 L^1 极限鞅知：$\{E(X_u|\mathscr{F}_t), u \in \Delta(t)\}$ 为 $L^1(\Omega, \mathscr{F}_t, \Delta(t); \mathbf{B})$ 中 L^1 收敛的哥西族，又因为 $L^1(\Omega, \mathscr{F}_t, \Delta(t); \mathbf{B})$ 按 L^1 收敛是完备的，因此，哥西族 $\{E(X_u|\mathscr{F}_t), u \in \Delta(t)\} L^1$ 收敛于 Y_t，这样对每一 $t \in \Delta$，令

$$Y_t = \lim_{u \in \Delta(t)} E(X_u|\mathscr{F}_t), (L^1).$$

显然，Y_t 是 $\mathscr{F}_t$ 可测的且

$$\int_\Omega \| Y_t \| dP < \infty.$$

下面证明 $Y = \{Y_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值鞅，对任意 $s, t \in \Delta, s \leqslant t$，有

$$\begin{aligned} E(Y_t|\mathscr{F}_s) &= E(\lim_{u \in \Delta(t)} E(X_u|\mathscr{F}_t)|\mathscr{F}_s) \\ &= \lim_{u \in \Delta(t)} E(E(X_u|\mathscr{F}_t)|\mathscr{F}_s) \\ &= \lim_{u \in \Delta(t)} E(X_u|\mathscr{F}_s) \\ &= Y_s. \end{aligned}$$

令 $$Z_t = Z_t - Y_t, \forall\, t \in \Delta.$$

则 $$X_t = Y_t + Z_t, t \in \Delta,$$

且 $$\begin{aligned} E \| Z_t \| &= E \| X_t - Y_t \| \\ &\leqslant E(\| E(X_u|\mathscr{F}_t) - X_t \|) + E(\| E(X_u|\mathscr{F}_t - Y_t \|), \end{aligned}$$

于是， $$\limsup_{t \in \Delta} E \| Z_t \| = 0,$$

即 $$\lim_{t \in \Delta} E \| Z_t | = 0.$$

唯一性：若 $X_t = Y_t + Z_t = Y'_t + Z'_t, \forall\, t \in \Delta$，其中 $\{Y_t\}$ 与 $\{Y'_t\}$ 为 $\mathbf{B}$ 值鞅，$\{Z_t\}$ 与 $\{Z'_t\}$ 为位势，则对每一 $A \in \bigcup_{t \in \Delta} \mathscr{F}_t$，均有

$$\lim_{t \in \Delta} \int_A Z_t dP = 0,$$

$$\lim_{t \in \Delta} \int_A Z'_t dP = 0.$$

而 $Y'_t - Y_t = Z_t - Z'_t = u_t, t \in \Delta$ 为鞅，故对每一 $A \in \mathscr{F}_t, t \in \Delta$，有

$$\int_A u_t dP = \lim_{s \in \Delta(t)} \int_A u_s dP = 0,$$

从而
$$u_t = 0, a.e., \forall\, t \in \Delta,$$

于是，
$$Z_t = Z'_t, a.e., Y_t = Y'_t, a.e..$$

这就证明了定理.

注 当 $\Delta = N$ 时，就得到[33]的定理 3，当 $B = R$ 时，就得到[99]的定理 4.

以下对 **B** 值 L^1 极限鞅 $\{X_t, t \in \Delta\}$ 常写成 $X_t = Y_t + Z_t, t \in \Delta$，其中 $\{Y_t, t \in \Delta\}$，$\{Z_t, t \in \Delta\}$ 就是上面的唯一分解式中的 **B** 值鞅及位势，且

$$Y_t = \lim_{s \in \Delta(t)} E(X_s | \mathscr{F}_t), (L^1).$$

推论 2.2 设 $\{X_t = Y_t + Z_t, t \in \Delta\}$ 为 **B** 值 L^1 极限鞅，则

(1) $\{X_t\}$ 尾部 L^1 有界 $\Longleftrightarrow \{Y_t\}$ 尾部 L^1 有界；

(2) $\{X_t\}$ 尾部一致绝对连续 $\Longleftrightarrow \{Y_t\}$ 尾部一致绝对连续；

(3) $\{X_t\}$ 尾部一致可积 $\Longleftrightarrow \{Y_t\}$ 尾部一致可积.

利用鞅讨论集函数的性质是鞅在测度论中的一个重要应用，这方面的讨论可参见[99][101][102][103][104]等文献.

下面我们讨论定向集上某些 **B** 值鞅型过程诱导出的集函数及其性质.

设 $\{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 是 **B** 值 L^1 极限鞅，对任一 $A \in \mathscr{A} = \bigcup_{t \in \Delta} \mathscr{F}_t$，定义诱导 **B** 值集函数 Q 为

$$Q(A) = \lim_{t \in \Delta} \int_A X_t dP, \tag{2.1}$$

由定理 2.1 知：(2.1) 式中集函数的定义是合理的. 显然，Q 在代数 $\mathscr{A}$ 上是有限可加的.

设 $X = \{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 是 Δ 上的 **B** 值可积适应过程. 如果

$$\lim_{t\in\Delta}\int_A X_t dP (\forall A \in \mathscr{A} = \bigcup_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t) \tag{2.2}$$

存在，则称 X 为 **B** 值广义鞅. 显然，**B** 值 L^1 极限鞅为 **B** 值广义鞅.

定义 2.3 设 $X = \{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 是尾部 L^1 有界的 **B** 值广义鞅，令

$$Q(A) = \lim_{t\in\Delta}\int_A X_t dP, \forall A \in \bigcup_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t,$$

则 Q 是 $\mathscr{A} = \bigcup_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t$ 上的有界变差的 **B** 值集函数，从而，Q 是有界的.

证 对任一集合 $E \in \mathscr{A} = \bigcup_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t$，设 π 是集合 E 的任一有限分划，即

$$\pi = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}, A_i \in \mathscr{A}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

$$A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j), \bigcup_{i=1}^{n} A_i = E.$$

因 $\{\mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 是单调上升的，故存在 $t_0 \in \Delta$，使得有 $A_i \in \mathscr{F}_{t_0}, i = 1, 2, \cdots, n$. 这时

$$\begin{aligned}
\sum_{A_i\in\pi}\| Q(A_i) \| &= \sum_{A_i\in\pi}\left(\lim_{t\in\Delta}\left\|\int_{A_i} X_t dP\right\|\right) \\
&= \limsup_{t\in\Delta}\sum_{A_i\in\pi}\left\|\int_{A_i} X_t dP\right\| \\
&\leqslant \limsup_{t\in\Delta}\sum_{A_i\in\pi}\int_{A_i}\| X_t \| dP \\
&\leqslant \limsup_{t\in\Delta}\int_\Omega \| X_t \| dP,
\end{aligned}$$

由于 $\{X_t, t \in \Delta\}$ 是尾部 L^1 有界的，故存在 $s \in \Delta$，使得

$$\sup_{t\in\Delta(s)}\int_\Omega \| X_t \| dP < \infty,$$

从而，

$$\sum_{A_i\in\pi}\| Q(A_i) \| \leqslant \limsup_{t\in\Delta}\int_\Omega \| X_t \| dP$$

$$\leqslant \sup_{t\in\Delta(t_1)}\int_\Omega \|X_t\|dP < \infty,$$

由于 E 是 $\mathscr{A}$ 的任意集合，特别当 $E=\Omega$ 时，便得出 Q 在 $\mathscr{A}$ 上是有界变差的.

由定理 2.3 立即推知：尾部 L^1 有界的 B 值 L^1 极限鞅的诱导集函数在 $\mathscr{A}$ 上是有界变差的，从而是有界的.

定理 2.4 设 Q 是 B 值 L^1 极限鞅 $X=\{X_t=Y_t+Z_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 的诱导集函数，则对任一 $t\in\Delta$，任意 $A\in\mathscr{F}_t$，有

$$Q(A)=\int_A Y_t dP,$$

从而 Q 在 $\mathscr{F}_t$ 上是 σ 可加的、有界变差的，关于 P 是绝对连续的.

证 任给 $t\in\Delta$，任取 $A\in\mathscr{F}_t$，由定理 2.1 有

$$\begin{aligned}Q(A)&=\lim_{s\in\Delta}\int_A(Y_s+Z_s)dP\\&=\lim_{s\in\Delta}\int_A Y_s dP+\lim_{s\in\Delta}\int_A Z_s dP\\&=\lim_{s\in\Delta}\int_A Y_s dP\\&=\int_A Y_t dP.\end{aligned}$$

定理 2.5 设 $X=\{X_t=Y_t+Z_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 是 B 值 L^1 极限鞅，对每一 $t\in\Delta$，令

$$Q_t(A)=\int_A X_t dP,\quad \forall A\in\mathscr{F}_t.$$

Q 是 X 的诱导集函数，则 $\{Q_t(A),t\in\Delta\}$ 收敛于极限 $Q(A)$，且收敛在下述意义下是一致的：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ t_0\in\Delta$，当 $t\in\Delta(t_0)$ 时

$$\sup_{A\in\mathscr{F}_t}\|Q_t(A)-Q(A)\|\leqslant\varepsilon.$$

证 对每一 $t\in\Delta$，$\forall A\in\mathscr{F}_t$，由定理 2.1 有

$$Q_t(A)=\int_A X_t dP=\int_A Y_t dP+\int_A Z_t dP.$$

但由定理 2.4 有

$$Q(A) = \int_A Y_t dP$$

且 $\lim\limits_{t \in \Delta} Q_t(A) = Q(A)$，由于

$\lim\limits_{t \in \Delta} E \| Z_t \| = 0$，故 $\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, t_0 \in \Delta$，当 $t \in \Delta(t_0)$ 时

$$\left\| \int_A Z_t dP \right\| \leqslant \int_A \| Z_t \| dP \leqslant E \| Z_t \| < \varepsilon, \forall\, A \in \mathscr{F}_t.$$

于是，$\| Q_t(A) - Q(A) \| = \left\| \int_A Z_t dP \right\| < \varepsilon$，故

$$\sup_{A \in \mathscr{F}_t} \| Q_t(A) - Q(A) \| \leqslant \varepsilon.$$

推论 2.6 设 $X = \{X_t = Y_t + Z_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 是实值 L^1 极限鞅，Q_t 与 Q 意义同理 2.5，则

(1) $\lim\limits_{t \in \Delta} (\sup\limits_{\mathscr{F}_t} Q_t) = \sup\limits_{\bigcup\limits_{t \in \Delta} \mathscr{F}_t} Q$，

(2) $\lim\limits_{t \in \Delta} (\inf\limits_{\mathscr{F}_t} Q_t) = \inf\limits_{\bigcup\limits_{t \in \Delta} \mathscr{F}_t} Q$.

证 由定理 2.5 及[36]的引理 1 得出.

设 Ω 是一集合，$\sum$ 是 Ω 的子集组成的代数，υ 是 $\sum$ 上的实值有限可加集函数，令

$$\upsilon^+(\Omega) = \sup_{A \in \sum} \upsilon(A)$$

$$\upsilon^-(\Omega) = -\inf_{A \in \sum} \upsilon(A) = \sup_{A \in \sum} (-\upsilon(A)).$$

（若 υ 是有界的，则 $\upsilon = \upsilon^+ - \upsilon^-$ 恰是 υ 的 Jordan 分解，见[100]，p. 98）

推论 2.7 设 $X = \{X_t = Y_t + Z_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 是实值 L^1 极限鞅，Q_t 与 Q 的意义同定理 2.5. 则

(1) $\lim\limits_{t \in \Delta} Q_t^+(\Omega) = Q^+(\Omega)$，

(2) $\lim\limits_{t \in \Delta} Q_t^-(\Omega) = Q^-(\Omega)$.

证 由定理 2.5 及[36]的推论 1 得出.

定理 2.8 设 $X = \{X_t = Y_t + Z_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 是 **B** 值 L^1 极限鞅，对每一 $\tau \in T$，$\int_\Omega \| Y_\tau \| dP < \infty$，$Q$ 是 X 诱导出的集函数，则 Q 是 $\mathscr{A}$ 上 σ 可加的充要条件是：对任一 $\tau \in T$ 有

$$\int_\Omega Y_\tau dP = Q(\Omega).$$

证 设 Q 在 $\mathscr{A}$ 上 σ 可加，对任一 $\tau \in T$，设 τ 的值域为 $\{t_1, t_2, \cdots\} \subset \Delta$，则

$$Q(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} Q(\{\tau = t_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{\tau = t_n\}} Y_{t_n} dP$$
$$= \int_\Omega Y_\tau dP.$$

反之，设 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A \in \mathscr{F}_{t_0}, A_n \in \mathscr{F}_{t_n}, n = 1, 2, \cdots, A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$，
对任一 $n \in N$，取 $t'_n \in \Delta$，满足 $t'_n \geqslant t_n, t'_n \geqslant t_0$，
令

$$\tau = \begin{cases} t'_n & \omega \in A_n, n = 1, 2, \cdots, \\ t_0 & \omega \in A^c. \end{cases}$$

则 $\tau \in T$，故

$$Q(\Omega) = \int_\Omega Y_\tau dP = \int_{A^c} Y_{t_0} dP + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} Y_{t'_n} dP$$
$$= \int_{A^c} Y_{t_0} dP + \sum_{n=1}^{\infty} Q(A_n).$$

于是，$Q(A) = Q(\Omega) - Q(A^c) = Q(\Omega) - \int_{A^c} Y_{t_0} dP$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} Q(A_n).$$

这就证明了 Q 在 $\mathscr{A}$ 上是 σ 可加的.

定义 2.3 设 $X = \{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 为 **B** 值鞅，若存在 $X_\infty \in L^1(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P; \mathbf{B})$ 使得 $\overline{X} = \{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \overline{\Delta}\}$ 仍为 **B** 值鞅，则称 X 是

右闭的，X_∞ 称为鞅 X 的右闭元.

定理 2.9 设 $\mathbf{B}$ 是任一 Banach 空间，则下列陈述等价：

(1) $\mathbf{B}$ 具有 RNP；

(2) 任意概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的尾部一致可积的 $\mathbf{B}$ 值 L^1 极限鞅 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 的诱导集函数 Q 可唯一扩张成 $\mathscr{F}_\infty$ 上的 σ 可加测度且

$$Q(A)=\int_A X_\infty dP,\quad \forall A\in\mathscr{F}_\infty,$$

其中，$X_\infty\in L^1(\Omega,\mathscr{F}_\infty,P,\mathbf{B})$；

(3) 对任意概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的尾部一致可积的 $\mathbf{B}$ 值 L^1 极限鞅

$$X=\{X_t=Y_t+Z_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$$

中的鞅$\{Y_t\}$是右闭的.

证 (1)⇒(2). 设 $X=\{X_t=Y_t+Z_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 是任意概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的任一尾部一致可积 $\mathbf{B}$ 值 L^1 极限鞅，Q 是 X 的诱导集函数.

$$Q(A)=\lim_{t\in\Delta}\int_A X_t dP,\quad \forall A\in\mathscr{A}.$$

Q 在 $\mathscr{A}$ 上是有限可加的，下面证明 Q 在 $\mathscr{A}$ 上是 σ 可加的，为此，设 $A_n\in\mathscr{A}$，$n=1,2,\cdots$ 是一集合序列且

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A},A_n\cap A_m=\varnothing\quad(n\neq m),$$

由推论 2.2 知：$\{Y_t\}$ 尾部一致可积，从而$\{Y_t\}$尾部一致绝对连续，于是，对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$ 及 $t_0\in\Delta$，使得当 $A\in\mathscr{F}$，$P(A)<\delta$ 时，有

$$\sup_{t\in\Delta(t_0)}\int_A\|Y_t\|dP<\epsilon.$$

由于

$$(\bigcup_{n=k+1}^{\infty}A_n)\downarrow\varnothing,(k\to\infty),$$

对前述 $\delta > 0$，存在正整数 n_0，使有

$$P(\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} A_n) < \infty.$$

由 $\{\mathscr{F}_t\}$ 的单调性，对一切正整数 $k \geqslant n_0$，总有 $t \in \Delta, t \geqslant t_0$，使得

$$A_1, A_2, \cdots, A_k, \bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}_t.$$

从而，由定理 2.4 知

$$\begin{aligned}
\| \sum_{n=1}^{k} Q(A_n) - Q(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \| &= \| Q(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n) \| \\
&= \| \int_{\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n} Y_t dP \| \leqslant \int_{\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n} \| Y_t \| dP \\
&\leqslant \sup_{t \in \Delta(t_0)} \int_{\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} A_n} \| Y_t \| dP < \varepsilon.
\end{aligned}$$

这就证明了
$$Q(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q(A_n).$$

即 Q 在 $\mathscr{A}$ 上是 σ 可加的，再用第一章的定理 6.8 及定理 2.3 知：Q 在 $\mathscr{A}$ 上有界，在 $\mathscr{A}$ 上显然有 $Q \leqslant P$，由 Carathéodory － Hahn － Kuvanck 扩张定理知：Q 可唯一扩张成 $\mathscr{F}_\infty$ 上的 σ 可加测度，这个扩张的测度仍记为 Q 且在 $\mathscr{F}_\infty$ 上 $Q \leqslant P$. 由定理 2.3 易知：Q 在 $\mathscr{F}_\infty$ 上是有界变差的，由于 **B** 具有 RNP，故有 $X_\infty \in L^1(\Omega, \mathscr{F}_\infty, P; \mathbf{B})$ 使得

$$Q(A) = \int_A X_\infty dP, \forall\ A \in \mathscr{F}_\infty.$$

这就证明了(2) 成立.

(2)⇒(3). 设(2) 成立.

$$X = \{X_t = Y_t + Z_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$$

为任一概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的尾部一致可积的 **B** 值 L^1 极限鞅，Q 为某诱导集函数，由(2)，Q 可唯一扩张成 $\mathscr{F}_\infty$ 上的 σ 可加测度且

$$Q(A) = \int_A X_\infty dP, \quad \forall\ A \in \mathscr{F}_\infty,$$

$X_\infty \in L^1(\Omega,\mathscr{F}_\infty,P;\mathbf{B})$. 特别，对一切$s\in\Delta$，一切$A\in\mathscr{F}_s$，用定理2.4有

$$\int_A Y_s dP = Q(A) = \int_A X_\infty dP,$$

即$E(X_\infty|\mathscr{F}_s)=Y_s$，亦即$\{Y_t,\mathscr{F}_t,t\in\bar{\Delta}\}$仍为鞅，这就证明了(3)成立.

(3)⇒(1). 设(3)成立，任给一个定义在$\mathscr{F}$上的$\mathbf{B}$值的σ可加的具有有界变差的关于P绝对连续的集合函数μ. 往证：存在一个$X_\infty \in L^1(\Omega,\mathscr{F},P;\mathbf{B})$，使得

$$\mu(A)=\int_A X_\infty dP,\quad \forall\ A\in\mathscr{F}.$$

现设$\pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$是$\Omega$的有限分划，$A_i\in\mathscr{F}$，$P(A_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$. 再设$\Gamma$是全体上述分划构成的向右定向集，其中偏序关系"$\leqslant$"定义如下：$\pi_1\in\Gamma$，$\pi_2\in\Gamma$，$\pi_1\leqslant\pi_2$的充要条件是："$A\in\pi_2\Rightarrow$ 存在$B\in\pi_1$，使得$A\subset B$ a.e."，令$\mathscr{F}_\pi$是由π产生的σ代数($\pi\in\Gamma$)，显然有$\mathscr{F}_\pi\subset\mathscr{F}$，$\sigma(\bigcup_{\pi\in\Gamma}\mathscr{F}_\pi)=\mathscr{F}$. 再令

$$X_\pi(\omega)=\frac{\mu(A_i)}{P(A_i)}\quad 当\ \omega\in A_i,$$

$\pi=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，$\pi\in\Gamma$，则$(X_\pi,\mathscr{F}_\pi,\pi\in\Gamma)$是一个$\mathbf{B}$值鞅(见[58]的例16.2). 从而是一个$\mathbf{B}$值$L^1$极限鞅，且对每一$E\in\mathscr{F}_{\pi_0}$，$\pi_0\in\Gamma$，一切$\pi\geqslant\pi_0$，有

$$\int_E X_\pi dP=\mu(E)$$

下面证明$\{X_\pi,\pi\in\Gamma\}$是一致可积的，对任一$\pi\in\Gamma$，有

$$P(\{\|X_\pi\|\geqslant n\})\leqslant\frac{1}{n}E(\|X_\pi\|)=\frac{1}{n}\sum_{A\in\pi}\|\mu(A)\|$$

$$\leqslant\frac{1}{n}V_\mu(\Omega),$$

其中$V_\mu(\cdot)$是μ的变差函数，由于$V_\mu(\Omega)<\infty$，于是，任给$\varepsilon>0$，可取n充分大，使

$P(\{\|X_\pi\| \geqslant n\}) < \epsilon, \forall \pi \in \Gamma$. 但 $\mu \ll P$，从而 $V_\mu \ll P$，由[58]的命题 16.3 有：$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0$，使"$A \in \mathscr{F}, P(A) < \epsilon \Rightarrow V_\mu(A) < \delta$"，因此，对任何 $\delta > 0$，有

$$\int_{\{\|X_\pi\| \geqslant n\}} \|X_\pi\| dP \leqslant V_\mu(\{\|X_\pi\| \geqslant n\}) < \delta, \forall \pi \in \Gamma.$$

这就证明了 $\{X_\pi, \pi \in \Gamma\}$ 是一致可积的，从而，它更是尾部一致可积的，再由 **B** 值 L^1 极限鞅 Riesz 分解的唯一性及假设条件知：存在右闭元 $X_\infty \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B})$ 使得

$$E(X_\infty | \mathscr{F}_\pi) = X_\pi, \quad \forall \pi \in \Gamma,$$

即 $\forall A \in \mathscr{F}_\pi$，有

$$\int_A X_\infty dP = \int_A X_\pi dP = \mu(A),$$

从而有

$$\mu(A) = \int_A X_\infty dP, \quad \forall A \in \bigcup_{\pi \in \Gamma} \mathscr{F}_\pi,$$

再由 μ 关于 P 的绝对连续性及 X_∞ 的可积性立即推得：

$$\mu(A) = \int_A X_\infty dP, \forall A \in \mathscr{F} = \sigma(\bigcup_{\pi \in \Gamma} \mathscr{F}_\pi).$$

定理 2.10　设 **B** 是任一 Banach 空间，则下列陈述等价：

(1) **B** 具有 RNP；

(2) 任意概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的尾部 L^1 有界的 **B** 值 L^1 极限鞅 $X = \{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 依概率收敛于一可积随机变量 Y_∞；

(3) 任意概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的尾部一致可积的 **B** 值 L^1 极限鞅 $X = \{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ L^1 收敛于一 **B** 值可积随机变量 Y_∞.

证　(1)⇒(2). 设 $X = \{X_t = Y_t + Z_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 为任一概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的尾部 L^1 有界的 **B** 值 L^1 极限鞅，由定理 2.1 及推论 2.2 知：$\{Y_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 为尾部 L^1 有界的鞅，而 $Z_t \xrightarrow{L^1} 0$，从而 $Z_t \xrightarrow{P} 0$. 下面证明 $\{Y_t\}$ 依概率收敛于一可积随机变量 Y_∞. 由于 $\{Y_t\}$ 是尾部 L^1 有界的 **B** 值鞅，故存在 $t_0 \in \Delta$，

使得
$$\sup_{t\in\Delta(t_0)}\int_\Omega \| Y_t \| dP < \infty.$$
若$\{Y_t\}$不依概率收敛，则存在$\varepsilon > 0$，对任意$t \in \Delta$，存在$t' \in \Delta(t)$，使得
$$P(\{\| Y_{t'} - Y_t \| \geqslant \varepsilon\}) \geqslant \varepsilon.$$
故可取$t_1 \in \Delta(t_0)$，使得
$$P(\{\| Y_{t_1} - Y_{t_0} \| \geqslant \varepsilon\}) \geqslant \varepsilon.$$
再取$t_2 \in \Delta(t_1)$，使得
$$P(\{\| Y_{t_2} - Y_{t_1} \| \geqslant \varepsilon\}) \geqslant \varepsilon.$$
依次继续下去，可得一 **B** 值鞅序列$\{Y_{t_n}, \mathscr{F}_{t_n}, n \geqslant 0\}$，

且
$$\sup_{n\geqslant 0}\int_\Omega \| Y_{t_n} \| dP < \infty,$$
由第五章的定理 2.5 知：$\{Y_{t_n}\}a.e.$强收敛. 这与$\{Y_{t_n}\}$具有的性质相矛盾，故$\{Y_t\}$依概率收敛于Y_∞，再由$\{Y_t\}$是尾部L^1有界知Y_∞还是可积的，于是
$$X_t = Y_t + Z_t \xrightarrow{P} X_\infty.$$
(2)⇒(3). 由第一章的定理 6.8 及定理 6.9 立即得出.

(3)⇒(1). 设$X = \{Z_t = Y_t + Z_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$是任意概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的尾部一致可积的 **B** 值$L^1$极限鞅，且$X_t \xrightarrow{L^1} Y_\infty$，$Y_\infty$为 **B** 值可积随机变量. 由于$Z_t \xrightarrow{L^1} 0$，从而$Y \xrightarrow{L^1} Y_\infty$. 显然$Y_\infty$是$\mathscr{F}_\infty$可测的，下面证明$\{Y_t, \mathscr{F}_t, t \in \bar{\Delta}\}$仍为 **B** 值鞅. 对任意$t \in \Delta$，$t$固定，对任意$\varepsilon > 0$，存在$t_0 \in \Delta(t)$，使得$E(\| Y_\infty - Y_{t_0} \|) < \varepsilon$. 于是，对任意$A \in \mathscr{F}_t$，有
$$\begin{aligned}\left\| \int_A Y_t dP - \int_A Y_\infty dP \right\| &= \left\| \int_A Y_{t_0} dP - \int_A Y_\infty dP \right\| \\ &\leqslant \int_A \| Y_\infty - Y_{t_0} \| dP \\ &\leqslant E(\| Y_\infty - Y_{t_0} \|) < \varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了：对任意 $t\in\Delta$，任意 $A\in\mathscr{F}_t$，有

$$\int_A Y_\infty dP=\int_A Y_t dP,$$

即
$$E(Y_\infty|\mathscr{F}_t)=Y_t,\forall\, t\in\Delta.$$

再用定理 2.9 知：**B** 具有 RNP. 即(1) 成立.

§3　定向集上的 B 值一致渐近鞅

定义 3.1　设 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 是 Δ 上的 **B** 值可积适应过程，

(1) 若 $\inf\limits_{\sigma\in T_s}\sup\limits_{\tau\in T_s(\sigma)}E\|E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)-X_\sigma\|=0$，则称 X 为 **B** 值一致渐近鞅；

(2) 若 $\lim\limits_{\tau\in T_s}E\|X_\tau\|=0$，则称 X 为 **B** 值一致位势.

显然，**B** 值鞅是一致渐近鞅，一致位势是位势.

本节的结果可参见文献[97]，我们先证明下面有用的引理.

引理 3.1　设 $\{\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的单调上升的子 σ 代数族，T_s 是 $\{\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 简单停时的全体，设 $\tau\in T_s$，则

(1) **B** 值随机变量 X 是 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的 $\Longleftrightarrow XI_{(\tau=t)}$ 是 $\mathscr{F}_t$ 可测的，$\forall\, t\in\Delta$；

(2) 任一 **B** 值可积随机变量 X，有

$$E(X|\mathscr{F}_\tau)=E(X|\mathscr{F}_t)\text{，在}\{\tau=t\}\text{ 上},\forall\, t\in\Delta.$$

证　(1) 若 X 是如下形式的 **B** 值随机变量：$X=cI_A$，其中 $c\in\mathbf{B}$，$A\in\mathscr{F}$，则 X 为 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的 $\Longleftrightarrow A\in\mathscr{F}_\tau$. 由于 $XI_{(\tau=t)}=cI_A\cdot I_{(\tau=t)}=cI_{A\cap(\tau=t)}$，$A\in\mathscr{F}_\tau\Longleftrightarrow A\cap\{\tau=t\}\in\mathscr{F}_t,\forall\, t\in\Delta$. 于是 $A\in\mathscr{F}_\tau\Longleftrightarrow XI_{(\tau=t)}$ 是 $\mathscr{F}_t$ 可测的，$\forall\, t\in\Delta$. 从而，(1) 对 **B** 值简单随机变量成立. 现设 X 是任意 **B** 值随机变量，若 X 是 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的，则存在 **B** 值 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的简单函数序列 $\{X_n\}$，使得 $X_n\to X$，由前一步的证明知：对每一 n，$X_nI_{(\tau=t)}$ 是 $\mathscr{F}_t$ 可测的简单函数，$\forall\, t\in\Delta$，且

$X_n I_{\{\tau=t\}} \to X I_{\{\tau=t\}}$，从而 $XI_{\{\tau=t\}}$ 是 $\mathscr{F}_t$ 可测的，$\forall\, t\in\Delta$. 反之，设 X 是任一 **B** 值随机变量，任一固定的 $\tau\in T_s$，设 τ 的值域为 $\{t_1,t_2,\cdots,t_m\}\in\Delta$，对任一 $t\in\Delta$，若 $t\overline{\in}\{t_1,t_2,\cdots,t_m\}$，则 $\{\tau=t\}=\varnothing$，而 $\bigcup_{i=1}^{m}\{\tau=t_i\}=\Omega$. 现设对每一 $t\in\Delta$，$XI_{\{\tau=t\}}$ 是 $\mathscr{F}_t$ 可测的，由于 $t\overline{\in}\{t_1,t_2,\cdots,t_m\}$，$\{\tau=t\}=\varnothing$，故对每一固定的 t_i，$i=1,2,\cdots,m$，$XI_{\{\tau=t_i\}}$ 是 $\mathscr{F}_{t_i}$ 可测的，于是存在 $\mathscr{F}_{t_i}$ 可测的简单函数序列 $\{X_n^{(i)}I_{\{\tau=t_i\}}\}$ 使得

$$X_n^{(i)}I_{\{\tau=t_i\}}\to XI_{\{\tau=t_i\}}.$$

令

$$X_n=\sum_{i=1}^{m}X_n^{(i)}I_{\{\tau=t_i\}},$$

则 X_n 是定义在 Ω 上的 **B** 值简单函数，且 $X_n\to X$，而 $X_nI_{\{\tau=t_i\}}=X_n^{(i)}I_{\{\tau=t_i\}}$ 是 $\mathscr{F}_{t_i}$ 可测的，$i=1,2,\cdots,m$. 故由前一步证明 X_n 是 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的，$\forall\, n\geqslant 1$，于是 X 是 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的.

(2) 设 X 为任一 **B** 值可积随机变量，任意 $\tau\in T_s$，由(1)知：函数 $\sum_t E(X|\mathscr{F}_t)I_{\{\tau=t\}}$ 是 $\mathscr{F}_\tau$ 可测的（注：由于 τ 是简单停时，上述和是有限项的和）且可积，对任意 $A\in\mathscr{F}_\tau$，

$$\begin{aligned}
&\int_A\sum_t E(X|\mathscr{F}_t)I_{\{\tau=t\}}dP\\
&=\sum_t\int_{A\cap\{\tau=t\}}E(X|\mathscr{F}_t)dP\\
&=\sum_t\int_{A\cap\{\tau=t\}}XdP\\
&=\int_A XdP\\
&=\int_A E(X|\mathscr{F}_\tau)dP.
\end{aligned}$$

故

$$E(X|\mathscr{F}_\tau)=\sum_t E(X|\mathscr{F}_t)I_{\{\tau=t\}},$$

即 $\quad E(X|\mathscr{F}_\tau)=E(X|\mathscr{F}_t)$，在 $\{\tau=t\}$ 上，$\forall\, t\in\Delta$.

引理 3.2 设$\{Z_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$是B值可积适应过程，$T_t$是$\{\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$简单停时全体，于是$\{Z_\tau,\mathscr{F}_\tau,\tau\in T_t\}$为B值可积适应过程，用$\mathscr{T}_t$表示$\{\mathscr{F}_\tau,\tau\in T_t\}$简单停时全体，则给定$u\in\Delta$，对每一$\theta\in\mathscr{T}_t,\theta\geqslant u$，存在$\sigma\in T_t,\sigma\geqslant u$，使得

$$Z_{T_t,\theta}=Z_{\Delta,\sigma},$$

其中，$Z_{T_t,\theta}=\sum Z_\tau I_{\{\theta=\tau\}}$，$Z_{\Delta,\sigma}=\sum Z_t I_{\{\sigma=t\}}$

证 设$\theta\in\mathscr{T}_t,\theta\geqslant u$，定义$\sigma(\omega)=[\theta(\omega)](\omega)$，显然$\sigma\geqslant u$，设$\theta$的值域为$\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n\}$其中每一$\tau_i\in T_t$，则$\sigma(\omega)=\tau_i(\omega),\omega\in\{\theta=\tau_i\},i=1,2,\cdots,n$，于是$\sigma$只取$\Delta$中有限个值，对任意$t\in\Delta$，

$$\{\sigma=t\}=\bigcup_{i=1}^{n}(\{\theta=\tau_i\}\cap\{\tau_i=t\})\in\mathscr{F}_t,$$

即 σ为$\{\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$简单停时，又

$$\begin{aligned}Z_{T_t,\theta}&=Z_{T_t,\theta(\omega)}(\omega)=\sum_{i=1}^{n}Z_{T_t,\theta(\omega)}I_{\{\theta=T_i\}}\\&=\sum_{i=1}^{n}Z_{\Delta,\tau_i}(\omega)I_{\{\theta=T_i\}}=\sum_{i=1}^{n}Z_{\Delta,\tau_i(\omega)}(\omega)I_{\{\theta=T_i\}}\\&=\sum_{i=1}^{n}Z_{\Delta,[\theta(\omega)](\omega)}(\omega)I_{\{\theta=T_i\}}=\sum_{i=1}^{n}Z_{\Delta,\sigma(\omega)}(\omega)I_{\{\theta=T_i\}}\\&=Z_{\Delta,\sigma(\omega)}(\omega)=Z_{\Delta,\sigma}.\end{aligned}$$

定理 3.3 设$X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$为B值可积适应过程，则$X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$为B值一致渐近鞅的充要条件是：$\{X_t\}$有如下分解：

$$X_t=Y_t+Z_t,\forall\ t\in\Delta,$$

其中

$Y=\{Y_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$为B值鞅，

$Z=\{Z_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$为B值一致位势.

证 由推论1.8及B值一致位势的定义，充分性显然. 下面证必要性：对每一固定的$\sigma\in T_t$，任意$\tau_1,\tau_2\in T_t,\sigma\leqslant\tau_1\leqslant\tau_2$，则

$$E\|E(X_{\tau_2}|\mathscr{F}_\sigma)-E(X_{\tau_1}|\mathscr{F}_\sigma)\|$$

$$= E\| E((X_{\tau_2} - X_{\tau_1})|\mathscr{F}_\sigma)\|$$
$$\leqslant E\| E((X_{\tau_2} - X_{\tau_1})|\mathscr{F}_{\tau_1})\|$$
$$= E\| E(X_{\tau_2}|\mathscr{F}_{\tau_1}) - X_{\tau_1}\|.$$

由 **B** 值一致渐近鞅的定义知：$\{E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)\}_{\tau\in T(\sigma)}$ 为 $L^1(\Omega,\mathscr{F}_\sigma,P;\mathbf{B})$ 中的哥西族. 由 $L^1(\Omega,\mathscr{F}_\sigma,P;\mathbf{B})$ 的完备性知：存在 $\mathscr{F}_\sigma$ 可测的可积随机变量 Y_σ 使得

$$Y_\sigma = L^1 \cdot \lim_{\tau\in T_s(\sigma)} E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma).$$

其中 $L^1\cdot\lim$ 表示 L^1 收敛意义的极限.

特别对每一 $t\in\Delta$，有 $Y_t = L^1 \cdot \lim_{\tau\in T_s(t)} E(X_\tau|\mathscr{F}_t)$，由引理 3.1 知：

$$E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma) = \sum_t E(X_\tau|\mathscr{F}_t) I(\{\sigma = t\}).$$

由于 σ 是简单停时，上式中是有限项求和. 这样，

$$\begin{aligned} Y_\sigma &= L^1 \cdot \lim_{\tau\in T_s(\sigma)} E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma) \\ &= L^1 \cdot \lim_{\tau\in T_s(\sigma)} \left(\sum_t E(X_\tau|\mathscr{F}_t) I(\{\sigma = t\})\right) \\ &= \sum_t Y_t I(\{\sigma = t\}). \end{aligned}$$

令

$$Z_t = X_t - Y_t,\quad \forall\, t\in\Delta.$$

下面证明 $\{Y_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 是 **B** 值鞅，对任意 $s,t\in\Delta, s\leqslant t$

$$\begin{aligned} E(Y_t|\mathscr{F}_s) &= E(L^1 \cdot \lim_{\tau\in T_s(t)} E(X_\tau|\mathscr{F}_t)|\mathscr{F}_s) \\ &= L^1 \cdot \lim_{\tau\in T_s(t)} E(E(X_\tau|\mathscr{F}_t)|\mathscr{F}_s) \\ &= L^1 \cdot \lim_{\tau\in T_s(s)} E(X_\tau|\mathscr{F}_s) \\ &= Y_s. \end{aligned}$$

即 $\{Y_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 为 **B** 值鞅.

再证 $\{Z_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 为 **B** 值一致位势. $\forall\,\varepsilon>0$，由 X 是 **B** 值一致渐近鞅，可取 $\tau'\in T_s$，使得

$$\sup_{\substack{\tau,\sigma\in T_s(\tau')\\ \sigma\leqslant\tau}} E\|E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)-X_\sigma\|<\varepsilon,$$

对任一$\sigma\in T_s(\tau')$，取$\tau\in T_s(\sigma)$，使得

$$E\|E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)-Y_\sigma\|<\varepsilon,$$

于是$E\|Z_\sigma\|=E\|X_\sigma-Y_\sigma\|\leqslant E\|E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)-X_\sigma\|$

$$+E\|E(X_\tau|\mathscr{F}_\sigma)-Y_\sigma\|<2\varepsilon.$$

这就证明了$\{Z_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$为**B**值一致位势. 最后证明唯一性：

若$X_t=Y_t+Z_t=Y'_t+Z'_t,\forall t\in\Delta$. 其中$\{Y_t\}$与$\{Y'_t\}$为**B**值鞅. $\{Z_t\}$与$\{Z'_t\}$为**B**值一致位势，则$\{Y_t-Y'_t\}$为**B**值鞅，从而$\{\|Y_t-Y''_t\|\}$为实值下鞅，于是，对任意$s,t\in\Delta,s\leqslant t$,

$$E\|Y_s-Y'_s\|\leqslant E\|Y_t-Y'_t\|,$$

故对每一个$s\in\Delta$,

$$\begin{aligned}E\|Y_s-Y'_s\|&\leqslant\sup_{t\in\Delta}E\|Y_t-Y''_t\|=\lim_{t\in\Delta}E\|Y_t-Y'_t\|\\&=\lim_{t\in\Delta}E\|Z_t-Z'_t\|\\&\leqslant\lim_{t\in\Delta}E\|Z_t\|+\lim_{t\in\Delta}E\|Z'_t\|=0,\end{aligned}$$

从而 $Y_s=Y'_s$ a.s. $,Z_s=Z'_s$ a.s. $,\forall s\in\Delta$.

推论 3.4 **B**值一致渐近鞅一定是**B**值L^1极限鞅.

证 由于一致位势一定是位势，再利用定理 3.3 及定理 2.1 立即知本推论成立.

注 下面常将**B**值一致渐近鞅X写成

$$X=\{X_t=Y_t+Z_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\},$$

其中$\{Y_t\}$与$\{Z_t\}$为定理 3.3 中的**B**值鞅与**B**值一致位势.

对**B**值一致渐近鞅有下面的可选采样定理：

定理 3.5 设$\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$为**B**值一致渐近鞅，则$\{X_\tau,\mathscr{F}_\tau,\tau\in T_s\}$为**B**值一致渐近鞅.

证 由定理 3.3 知：$X_t=Y_t+Z_t,\forall t\in\Delta$，其中$\{Y_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$为**B**值鞅，$\{Z_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$为**B**值一致位势. 但$X_\tau=Y_\tau+Z_\tau,\forall\tau\in T_s$，由推论 1.8 知：$\{Y_\tau,\mathscr{F}_\tau,\tau\in T_s\}$为**B**值鞅. 下面证明$\{Z_\tau,$

$\mathscr{F}_\tau,\tau \in T_t\}$ 为 **B** 值一致位势. 由 $\{Z_t,\mathscr{F}_t,t \in \Delta\}$ 是 **B** 值一致位势知：$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ u \in \Delta$，使对一切 $\sigma \in T_t$，$\sigma \geqslant u$，有 $E\|Z_\sigma\| < \varepsilon$. 设 θ 是任一 $(\mathscr{F}_\tau)_{\tau\in T_t}$ 简单停时，且 $\theta \geqslant u$，则由引理 3.2 知：存在 $\sigma \in T_t$，$\sigma \geqslant u$，使得 $Z_{T_t,\theta} = Z_{\Delta,\sigma}$，于是 $E\|X_{T_t,\theta}\| = E\|Z_{\Delta,\sigma}\| < \varepsilon$，这就证明了 $\{Z_\tau,\mathscr{F}_\tau,\tau \in T_t\}$ 为 **B** 值一致位势. 再用定理 3.3 知：$\{X_\tau,\mathscr{F}_\tau,T_t\}$ 为 **B** 值一致渐近鞅.

定理 3.6 设 **B** 是任一 Banach 空间，则下列命题等价：

(1) **B** 具有 RNP；

(2) 任意概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的尾部 L^1 有界的 **B** 值鞅 $X = \{X_t,\mathscr{F}_t,t \in \Delta\}$ 依概率收敛于一可积随机变量 X_∞；

(3) 任意概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的尾部 L^1 有界的 **B** 值一致渐近鞅 $X = \{X_t,\mathscr{F}_t,t \in \Delta\}$ 依概率收敛于一可积随机变量 X_∞；

(4) 任意概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的尾部一致可积的 **B** 值 L^1 极限鞅 $X = \{X_t,\mathscr{F}_t,t \in \Delta\}$ 依概率收敛于一可积随机变量 X_∞；

(5) 任意概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的尾部一致可积的 **B** 值 L^1 极限鞅 $X = \{X_t,\mathscr{F}_t,t \in \Delta\}$ L^1 收敛于一 **B** 值可积随机变量 X_∞；

(6) 任意概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的尾部一致可积的 **B** 值一致渐近鞅 $X = \{X_t,\mathscr{F}_t,t \in \Delta\}$ L^1 收敛于一 **B** 值可积随机变量 X_∞；

(7) 任意概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的尾部一致可积的 **B** 值鞅 $X = \{X_t,\mathscr{F}_t,t \in \Delta\}$ L^1 收敛于一 **B** 值可积随机变量 X_∞.

证 由于 **B** 值鞅为 **B** 值一致渐近鞅，而 **B** 值一致渐近鞅为 **B** 值 L^1 极限鞅. 因此，(4)⇒(3)⇒(2) 及 (5)⇒(6)⇒(7) 均显然. 再由第一章的定理 6.9 知：(4)⇒(5)；下面只须证明：(1)⇒(2)⇒(4) 及 (7)⇒(1). (1)⇒(2)，设 $X = \{X_t,\mathscr{F}_t,t \in \Delta\}$ 为尾部 L^1 有界的 **B** 值鞅，则存在 $t_0 \in \Delta$，使得

$$\sup_{t\in\Delta(t_0)}\int_\Omega \|X_t\|\,dP < \infty,$$

若它不依概率收敛，则存在 $\varepsilon > 0$，$\forall\ t \in \Delta$，$\exists\ t' \in \Delta(t)$，使得

$$P\{\|X_{t'} - X_t\| \geqslant \varepsilon\} \geqslant \varepsilon.$$

故可取 $t_1 \in \Delta(t_0)$，使得

$$P\{\|X_{t_1} - X_{t_0}\| \geqslant \varepsilon\} \geqslant \varepsilon.$$

再取 $t_2 \in \Delta(t_1)$，使得

$$P\{\|X_{t_2} - X_{t_1}\| \geqslant \varepsilon\} \geqslant \varepsilon.$$

依此继续下去，可得一 B 值鞅序列 $\{X_{t_n}, \mathscr{F}_{t_n}, n \geqslant 0\}$ 且 $\sup\limits_{n\geqslant 0}\int_\Omega \|X_{t_n}\| dP < \infty$. 由第五章定理 2.5 知：$X_{t_n}$ a. e. ，强收敛，这与 $\{X_{t_n}\}$ 具有的性质相矛盾. 故 $\{X_t\}$ 依概率收敛. 再由 X 为尾部 L^1 有界知，X_∞ 还是可积的.

(2)⇒(4)　设 $X = \{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 为 B 值 L^1 极限鞅，则由定理 2.1，X 可唯一分解为 $X_t = Y_t + Z_t, \forall\, t \in \Delta$，其中 $\{Y_t\}$ 为 B 值鞅，$\{Z_t\}$ 为 B 值位势，由第一章的定理 6.9 知，$Z_t \xrightarrow{P} 0$，且由上述分解知若 X 尾部 L^1 有界，则 $\{Y_t\}$ 尾部 L^1 有界，用(2)知：存在可积随机变量 X_∞，使得 $Y_t \xrightarrow{P} X_\infty$. 从而

$$X_t = Y_t + Z_t \xrightarrow{P} X_\infty.$$

(7)⇒(1)　设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为任一概率空间，μ 为任一定义在 $\mathscr{F}$ 上的 B 值完全可加有界变差集函数且 $\mu \ll P$. 设 $\pi = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是 Ω 的任一有限分划，$A_i \in \mathscr{F}, P(A_i) > 0, i = 1,2,\cdots,n$. 再设 Δ 是 Ω 的全体有限分划构成的向右定向集，其中"$\leqslant$"定义如下：$\pi_1 \in \Delta, \pi_2 \in \Delta, \pi_1 \leqslant \pi_2$ 的充要条件是："$A \in \pi_2 \Rightarrow$ 存在 $B \in \pi_1$ 使得 $A \subset B$ a. s."，令 $\mathscr{F}_\pi$ 是由 π 产生的 σ 代数($\pi \in \Delta$)，显然有：$\mathscr{F}_\pi \subset \mathscr{F}, \sigma(\bigcup\limits_{\pi\in\Delta}\mathscr{F}_\pi) = \mathscr{F}$. 再令：

$$X_\pi = \frac{\mu(A_i)}{P(A_i)},$$

当 $\omega \in A_i, \pi \in \Delta$. 由[58]的例 16. 2 知：$\{X_\pi, \mathscr{F}_\pi, \pi \in \Delta\}$ 是一致可积的 B 值鞅. 由(7)知：存在 $X_\infty, X_\infty \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathbf{B})$ 使得 $\lim\limits_{\pi\in\Delta} E\|X_\pi - X_\infty\| = 0$. $\forall\, \pi \in \Delta$ 固定，$\forall\, \varepsilon > 0$，必存在 $\pi_\varepsilon \in \Delta(\pi)$，

使得 $E\|X_{\pi_\varepsilon}-X_\infty\|<\varepsilon$，于是，$\forall A\in\mathscr{F}_\pi$，

$$\left\|\int_A X_\pi dP-\int_A X_\infty dP\right\| = \left\|\int_A X_{\pi_\varepsilon} dP-\int_A X_\infty dP\right\|$$

$$\leqslant\int_A\|X_{\pi_\varepsilon}-X_\infty\|dP<\varepsilon.$$

这就证明了：$\forall\,\pi\in\Delta,\forall\,A\in\mathscr{F}_\pi$，有

$$\int_A X_\pi dP=\int_A X_\infty dP.$$

现 $\forall\,A\in\mathscr{F},P(A)>0$，必有某个 $\pi\in\Delta$，使 $A\in\pi$，于是，

$$\mu(A)=\int_A\frac{\mu(A)}{P(A)}dP=\int_A X_\pi dP=\int_A X_\infty dP,$$

此即 $\mathbf{B}$ 具有 RNP.

设 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 是 $\mathbf{B}$ 值一致渐近鞅，对任一 $A\in\bigcup_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t$，定义诱导 $\mathbf{B}$ 值集函数 Q 为：

$$Q(A)=\lim_\Delta\int_A X_t dP.$$

由定理 3.3 知，上述定义是合理的，称 Q 为 X 诱导出的 $\mathbf{B}$ 值集函数. 显然 Q 在 $\bigcup_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t$ 上是有限可加的.

定理 3.7 设 $\mathbf{B}$ 是任一 Banach 空间，则下列命题等价：

(1) $\mathbf{B}$ 具有 RNP；

(2) 任意概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的尾部一致可积的 $\mathbf{B}$ 值一致渐近鞅 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 的诱导集函数 Q 可唯一扩张成 $\mathscr{F}_\infty$ 上的完全可加测度，且

$$Q(A)=\int_A X_\infty dP,\quad\forall\,A\in\mathscr{F}_\infty,$$

其中 $X_\infty\in L^1(\Omega,\mathscr{F}_\infty,P;\mathbf{B})$；

(3) 任意概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的尾部一致可积的 $\mathbf{B}$ 值一致渐近鞅 $X=\{X_t=Y_t+Z_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 中的鞅$\{Y_t\}$是右闭的.

证 类似于定理 2.9 的证明. 略.

记号：$\mathrm{e}\overline{\lim\limits_{\Delta}}$，$\mathrm{e}\underline{\lim\limits_{\Delta}}$，$\mathrm{e}\lim\limits_{\Delta}$ 分别表示本性上极限，本性下极限，本性极限. esup，einf 分别有示本性上确界，本性下确界.

引理 3.8 设 $Z=\{Z_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 为 **B** 值一致位势，$\{\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 满足 Vitali 条件 (V)，则

$$\mathrm{e}\lim_{\Delta}\|Z_t\|=0.$$

证　显然，$\{\|Z_t\|,t\in\Delta\}$ 是一致可积的，更是尾部一致可积的，由[105] 的定理 3 有：

$$E\mathrm{e}\overline{\lim_{\Delta}}\|Z_t\|\leqslant\overline{\lim_{T_s}}E\|Z_\tau\|=\lim_{T_s}E\|Z_\tau\|=0,$$

从而

$$\mathrm{e}\overline{\lim_{\Delta}}\|Z_t\|=0,$$

即

$$\mathrm{e}\lim_{\Delta}\|Z_t\|=0.$$

定理 3.9 设 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 是 **B** 值一致渐近鞅，若 **B** 具有 RNP，$\{\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 满足 Vitali 条件 (V)，且 $\liminf\limits_{\Delta}E\|X_t\|<\infty$，则

(1) (X_t) 按 **B** 中的拓扑本性收敛于某一随机变量；

(2) $(\|X_t\|)$ 为实值渐近鞅.

证　由定理 3.3 知：$X_t=Y_t+Z_t$，$\forall t\in\Delta$，其中 $\{Y_t\}$ 为 **B** 值鞅，$\{Z_t\}$ 为 **B** 值一致位势.

$$\begin{aligned}\sup_{\Delta}E\|Y_t\|&=\lim_{\Delta}E\|Y_t\|=\liminf_{\Delta}E\|X_t-Z_t\|\\&\leqslant\liminf_{\Delta}E\|X_t\|+\limsup_{\Delta}E\|Z_t\|\\&=\liminf_{\Delta}E\|X_t\|<\infty,\end{aligned}$$

更有 $\sup\limits_{\Delta}E\|Y_t\|<\infty$，即 $\{Y_t\}$ 为 L^1 有界鞅，由[106] 的定理 3.2（或[17] 的定理 12.4）知 $\{Y_t\}$ 按 **B** 中的拓扑本性收敛于 Y，即 $\mathrm{e}\lim\limits_{\Delta}\|Y_t-Y\|=0$. 由于

$$X_t-Y=(Y_t-Y)+Z_t$$

$$\|X_t-Y\|\leqslant\|Y_t-Y\|+\|Z_t\|,$$

从而

$$\operatorname*{elim}_{\Delta}\|X_t - Y\| \leqslant \operatorname*{elim}_{\Delta}\|Y_t - Y\| + \operatorname*{elim}_{\Delta}\|Z_t\| = 0.$$

这就证明了(1).

$$\begin{aligned}(2)\ \operatorname*{limsup}_{\tau\in T_t} E\|X_\tau\| &= \operatorname*{limsup}_{\tau\in T_t} E\|Y_\tau + Z_\tau\| \\ &\leqslant \operatorname*{limsup}_{\tau\in T_t} E\|Y_\tau\| + \operatorname*{limsup}_{\tau\in T_t} E\|Z_\tau\| \\ &= \operatorname*{limsup}_{\tau\in T_t} E\|Y_\tau\| \\ &\leqslant \operatorname*{liminf}_{\tau\in T_t} E\|X_\tau\| < \infty,\end{aligned}$$

即 $\operatorname*{limsup}_{\tau\in T_t} E\|X_\tau\| = \operatorname*{lim\,inf}_{\tau\in T_t} E\|X_\tau\| = \operatorname*{lim}_{\tau\in T_t} E\|X_\tau\| < \infty.$

这就证明了$\{\|X_t\|,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$为实值渐近鞅.

§4 定向集上的 B 值 Mil

定义 4.1 设$X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$是$\Delta$上的**B**值可积适应过程,如果$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ t_0\in\Delta$,当$t\in\Delta(t_0)$时有

$$P(\operatorname*{esup}_{\substack{t_0\leqslant s\leqslant t\\ s\in\Delta}}\|E(X_t|\mathscr{F}_s)-X_s\|>\varepsilon)<\varepsilon,$$

则称X为**B**值 Mil.

下面定理中的收敛并不要求空间具有 Radon-Nikodym 性质,它是第五章定理 1.5 的推广,从而是 Lévy 连续性定理的推广.

定理 4.1 设Δ是任一向右定向集,$\{\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$是$\mathscr{F}$的任一单调上升的子$\sigma$代数族,且满足 Vitali 条件$(V)$,$Y$是可积的**B**值随机变量,令$Y_t=E(Y|\mathscr{F}_t),\forall\ t\in\Delta$,则鞅$\{Y_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$本性收敛且$L^1$收敛于$E(Y|\bigvee_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t)$.

证 令T_s是$\{\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$简单停时全体,对任意$\tau\in T_s$,再令$Y_\tau=E(Y|\mathscr{F}_\tau)$,由引理 3.1 知:$Y_\tau=\sum_t Y_t I_{(\tau=t)}$,由[17]的定理 12.3 知:为证$\{Y_t,t\in\Delta\}$本性收敛,只须证明$\{Y_\tau,\tau\in T_s\}$依概率收敛,而依概率收敛与一完备距离空间中依距离收敛相互唯一确定,

故由引理 1.1 知，只要证明：对任一递增的简单停时列$\{\tau_n\}\subset T_s$，$\{Y_{\tau_n}\}$ 依概率收敛. 事实上，$\{Y_{\tau_n}=E(Y|\mathscr{F}_{\tau_n}),\mathscr{F}_{\tau_n},n\geqslant 1\}$ 为 B 值鞅，由第五章定理 1.5 知$\{Y_{\tau_n}\}a.e.$ 收敛，从而$\{Y_{\tau_n}\}$ 依概率收敛，这就证明了$\{Y_t,t\in\Delta\}$ 本性收敛. 又因$\{Y_t,t\in\Delta\}$ 是一致可积的，由第一章定理 6.9 知$\{Y_t,t\in\Delta\}L^1$ 收敛，显然其本性收敛的极限与 L^1 收敛的极限相等(在 $a.e.$ 意义下)，记之为 Y_∞，下面证明 $Y_\infty=E(Y|\bigvee\limits_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t)$，显然 Y_∞ 是 $\bigvee\limits_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t$ 可测的，$\forall\ A\in\bigcup\limits_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t$，$\exists\ t_0\in\Delta$，使得 $A\in\mathscr{F}_{t_0}$，由于 $Y_t\xrightarrow{L_1}Y_\infty$，故

$$\int_A Y_\infty dP=\lim_{t\in\Delta}\int_A Y_t dt=\int_A YdP.$$

用测度论的典型方法可证明：

$$\int_A Y_\infty dP=\int_A YdP,\forall\ A\in\bigvee_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t.$$

从而 $Y_\infty=E(Y|\bigvee\limits_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t)$，这就证明了定理.

定理 4.2 设 $X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 为 B 值可积适应过程，$\{\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 满足 Vitali 条件(V)，若$\{X_t,t\in\Delta\}$ 本性收敛且 L^1 收敛，则 X 为 B 值 Mil.

证 设 Y 为$\{X_t,t\in\Delta\}L^1$ 收敛的极限，令 $Y_t=E(Y|\mathscr{F}_t)$，$\forall\ t\in\Delta$，则$\{Y_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 为一致可积鞅，由定理 4.1 知$\{Y_t,t\in\Delta\}$ 本性收敛且 L^1 收敛于 $E(Y|\bigvee\limits_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t)=Y$，故$\{X_t,t\in\Delta\}$ 与$\{Y_t,t\in\Delta\}$ 均本性收敛且 L^1 收敛于 Y，令：

$$Z_t=X_t-Y_t,\quad t\in\Delta$$

则$\{Z_t,t\in\Delta\}$ 本性收敛且 L^1 收敛于零元 0，所以由定义，$\forall\ \varepsilon>0$，有：

$$P(\operatorname*{elimsup}_{t\in\Delta}\|Z_t\|>\varepsilon)=0$$

由第一章的定理 4.1 知，$\exists\ S_n\in\Delta,S_n\uparrow$，使得

$$\operatorname*{esup}_{t\geqslant S_n}\|Z_t\|\downarrow\operatorname*{elimsup}_{t\in\Delta}\|Z_t\|,$$

故

$$P(\inf_n \operatorname{esup}_{t\geqslant S_n} \| Z_t \| > \varepsilon) = 0.$$

于是，∃ $S_{n_0} \in \Delta$，使

$$P(\operatorname{esup}_{t\geqslant S_{n_0}} \| Z_t \| > \varepsilon) < \varepsilon. \qquad (A)$$

因为$\{Z_t, t \in \Delta\}L^1$ 收敛于零元 0，所以 ∃ $s \geqslant s_{n_0}$，使有

$$\int_\Omega \| Z_t \| dP \leqslant \varepsilon^2, \forall\, t \in \Delta(s).$$

任意固定 $t \geqslant s$，令 $W_v = E(X_t | \mathscr{F}_v)$，$v \in \Delta$，则$\{W_v, \mathscr{F}_v, v \in \Delta\}$ 是 **B** 值鞅，对上述固定的 t，由第一章的定理 4.1 知，∃ $v_n \leqslant t (n = 1, 2, \cdots)$，使得：

$$\operatorname{esup}_{v\leqslant t} \| W_v \| = \sup_{v_n \leqslant t} \| W_{v_n} \|,$$

于是

$$P(\operatorname{esup}_{v\leqslant t} \| W_v \| > \varepsilon) = P(\sup_{v_n\leqslant t} \| W_{v_n} \| > \varepsilon)$$
$$= \lim_{n\to\infty} P(\max_{1\leqslant i\leqslant n} \| W_{v_i} \| > \varepsilon).$$

任意固定 n，令

$$B_1 = \{ \| W_{v_1} \| > \varepsilon\}, B_i = \{ \| W_{v_i} \| > \varepsilon,$$
$$\| W_{v_j} \| \leqslant \varepsilon, 1 \leqslant j \leqslant i - 1\}$$
$$(i = 2, 3, \cdots, n),$$

则有

$$P(\max_{1\leqslant i\leqslant n} \| W_{v_i} \| > \varepsilon) = \sum_{i=1}^n P(B_i)$$
$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \int_{B_i} \| W_{v_i} \| dP \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \int_{B_i} \| W_v \| dP$$
$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \| W_v \| dP \leqslant \frac{1}{\varepsilon} E \| Z_t \| < \varepsilon,$$

其中 $v = \bigvee_{1\leqslant i\leqslant n} v_i$，所以

$$P(\operatorname{esup}_{v\leqslant t} \| E(Z_t | \mathscr{F}_v) \| > \varepsilon) < \varepsilon, t \geqslant s. \qquad (B)$$

从而对任意的 $t \geqslant s$，由(A)与(B)有

$$\begin{aligned}
&P(\operatorname*{esup}_{s\leqslant v\leqslant t}\| E(Z_t|\mathscr{F}_v) - Z_v\| > 2\varepsilon) \\
&\leqslant P(\operatorname*{esup}_{s\leqslant v\leqslant t}\| E(Z_t|\mathscr{F}_v\| > \varepsilon) + P(\operatorname*{esup}_{s\leqslant v\leqslant t}\| Z_v\| > \varepsilon) \\
&\leqslant P(\operatorname*{esup}_{v\leqslant t}\| E(Z_t|\mathscr{F}_v\| > \varepsilon) + P(\operatorname*{esup}_{s_{n_0}<v\leqslant t}\| Z_v\| > \varepsilon) \\
&< 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

由定义 $\{Z_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 为 **B** 值 Mil，因此 X 为 **B** 值 Mil.

此定理在序列情形下由 Talagrand 所证明(见[19]的定理 2)，在定向集指标实值过程情形由胡晓予所证明(见[107]的定理 1).

定义 4.2 设 $\{\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的单调上升的子 σ 代数族，如果任意 $A\in\mathscr{F}_\infty=\sigma(\bigcup_{t\in\Delta}\mathscr{F}_t)$，任一适应集合族 $\{A_t,t\in\Delta\}$，$A\subset \operatorname*{elimsup}_{t\in\Delta}A_t$，对任一 $\varepsilon>0$，存在 $t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_n$ 及两两不交的集合 $B_i\in\mathscr{F}_{t_i}$，$B_i\subset A_{t_i}$，$i=1,2,\cdots,n$ 使得

$$P(A\setminus\bigcup_{i=1}^{n}B_i)<\varepsilon,$$

则称 $\{\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 满足 Vitali 条件 (V'). 显然若 $\{\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 满足 Vitali 条件 (V')，则必满足 Vitali 条件 (V).

定义 4.3[17] 设 $\{s_k\}\subset\Delta$，$\{t_k\}\subset\Delta$，如果对每一 $k\geqslant1$，有 $s_k\leqslant t_k$，记为 $\{s_k\}\leqslant\{t_k\}$. 如果存在子列 $\{t_{n_k}\}\subset\{t_n\}$，使得 $\{s_k\}\leqslant\{t_{n_k}\}$，则称 $\{t_k\}$ 常在 $\{s_k\}$ 之上.

引理 4.3 设 $\mathscr{C}$ 是实值可积适应随机过程 $\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 全体组成的集合，其中 Δ 是任意的向右定向集，令

$$\mathscr{C}_N=\{\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}\in\mathscr{C},\Delta=N\}.$$

设 $\mathscr{C}_N$ 中每一满足 Doob 条件(即 L^1 有界)的元素 $a.e.$ 收敛，固定 $\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}\in\mathscr{C}$，$\{X_t,t\in\Delta\}L^1$ 有界，$\{\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$ 满足 Vitali 条件 (V')，若存在子序列 $\{s_n\}\subset\Delta$，使得对任一递增的常在 $\{s_n\}$ 之上的子列 $\{t_n\}\subset\Delta$，有 $\{X_{t_n},\mathscr{F}_{t_n},n\in N\}\in\mathscr{C}_N$，则 $\{X_t,t\in\Delta\}$ 本性收敛.

证 反证法. 设 $\{X_t,t\in\Delta\}$ 不本性收敛，由于 $\{X_t,t\in\Delta\}L^1$ 有

界，根据 Fatou 引理知 $\mathrm{eliminf}X_t < \infty$，$\mathrm{elimsup}X_t > -\infty$，因此存在两实数 $a < b$ 使得

$$A = \{\mathrm{eliminf}X_t < a < b < \mathrm{elimsup}X_t\}, P(A) = \varepsilon > 0,$$

又因$\{\mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 满足 Vitali 条件(V')，所以存在有限序列 $t_1^{(1)} \leqslant t_2^{(1)} \leqslant \cdots \leqslant t_{n_1}^{(1)}$ 使得 $s_1 \leqslant t_1^{(1)}$ 且

$$P(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n_1}\{X_{t_i^{(1)}} \leqslant a\}) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

我们可取有限序列 $t_1^{(2)} \leqslant t_2^{(2)} \leqslant \cdots \leqslant t_{n_2}^{(2)}$，使得 $t_1^{(2)} \geqslant s_2, t_1^{(2)} \geqslant t_{n_1}^{(1)}$，且

$$P(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n_2}\{X_{t_i^{(2)}} \geqslant b\} \leqslant \varepsilon/8.$$

用归纳法我们可选取一递增的子列$\{t_n\} \subset \Delta$，使得$\{s_n\} \leqslant \{t_n\}$ 及

$$P(\mathrm{liminf}X_{t_n} \leqslant a < b \leqslant \mathrm{limsup}X_{t_n}) \geqslant \varepsilon/2.$$

由于$\{X_{t_n}, \mathscr{F}_{t_n}, n \in N\} \in \mathscr{C}_N$ 且满足 Doob 条件，这就得到矛盾，从而$\{X_t, t \in \Delta\}$ 本性收敛.

下面的定理见[107].

定理 4.4 设 $X = \{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 为实值 L^1 有界的 Mil，$\{\mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 满足 Vitali 条件(V')，则$\{X_t, t \in \Delta\}$ 本性收敛.

证 令 $\mathscr{M}$ 为实值 Mil$\{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 的全体，$\mathscr{M}_N = \{\{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\} \in \mathscr{M}, \Delta = N\}$，由第三章的定理 2.3 知 $\mathscr{M}_N$ 中每个满足 Doob 条件的元素 $a.e.$ 收敛，固定$\{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\} \in \mathscr{M}$，$\{X_t, t \in \Delta\}$ L^1 有界，$\{\mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 满足 Vitali 条件(V')，由于$\{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 为 Mil，故 $\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, s \in \Delta$，对一切 $t \geqslant s$，有

$$P(\operatorname*{esup}_{s \leqslant u \leqslant t}|E(X_t|\mathscr{F}_u) - X_u| > \varepsilon) < \varepsilon.$$

于是对正实数列 $\varepsilon_n \downarrow 0$，$\exists\ \{s_n, n \in N\} \subset \Delta$，使得

$$P(\operatorname*{esup}_{s_n \leqslant u \leqslant t}|E(X_t|\mathscr{F}_u) - X_u| > \varepsilon_n) < \varepsilon_n. \qquad (*)$$

设$\{t_k, k \in N\}$ 是 Δ 中任一递增的常在$\{s_k, k \in N\}$ 之上的序列，则存在子列$\{t_{k_n}, n \in N\} \subset \{t_k, k \in N\}$ 使得 $s_n \leqslant t_{k_n}$，$\forall\ n \in N$. 当 $k \geqslant k_n$ 时，$\forall\ m \geqslant k$，由(*)式有

$$P(\sup_{k\leqslant p\leqslant m}|E(X_{t_m}|\mathscr{F}_{t_p})-X_{t_p}|>\varepsilon_n)$$
$$\leqslant P(\operatorname*{esup}_{s_n\leqslant s\leqslant t_m}|E(X_{t_m}|\mathscr{F}_s)-X_s|>\varepsilon_n)<\varepsilon_n.$$

从而$\{X_{t_n},\mathscr{F}_{t_n},n\in N\}$为Mil. 即$\{X_{t_n},\mathscr{F}_{t_n},n\in N\}\in\mathscr{M}_N$. 由引理4.3知$\{X_t,t\in\Delta\}$本性收敛.

推论 4.5 设$X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$为一致可积的实值适应过程,若$\{\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$满足Vitali条件$(V')$,则$\{X_t,t\in\Delta\}$本性收敛$\Leftarrow\Rightarrow X$为Mil.

证 由定理4.2,定理4.4及第一章的定理6.9知推论成立.

定义 4.6 设$X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$为$L^1$有界的**B**值Mil,$\{\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$满足Vitali条件$(V')$,若$\{f(X_t),t\in\Delta\}$本性收敛于0$(\forall f\in\mathbf{B}^*)$,则$\{X_t,t\in\Delta\}$本性收敛于零元(其中$\mathbf{B}^*$是**B**的共轭空间).

证 令$\mathscr{M}=\{\{\|X_t\|,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}:\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$为**B**值Mil,$\operatorname*{elim}_{t\in\Delta}f(X_t)=0,f\in\mathbf{B}^*\}$,$\mathscr{M}_N=\{\{\|X_t\|,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}\in\mathscr{M},\Delta=N\}$由[19]的定理6知$\mathscr{M}_N$中每一$L^1$有界的元素$a.e.$收敛于0. 任取满足定理条件的$X=\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$,则$\|X\|=\{\|X_t\|,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}\in\mathscr{M}$,由于$\{X_t,\mathscr{F}_t,t\in\Delta\}$为**B**值Mil,故$\forall\varepsilon>0$,$\exists\ s\in\Delta$,对一切$t\geqslant s$,有

$$P(\operatorname*{esup}_{s\leqslant u\leqslant t}\|E(X_t|\mathscr{F}_u)-X_u\|>\varepsilon)<\varepsilon.$$

于是对正实数$\varepsilon_n\downarrow 0$,$\exists\ \{s_n,n\in N\}\subset\Delta$,使得

$$P(\operatorname*{esup}_{s_n\leqslant u\leqslant t}\|E(X_t|\mathscr{F}_u)-X_u\|>\varepsilon_n)<\varepsilon_n. \tag{4.4}$$

设$\{t_k,k\in N\}$是Δ中任一递增的常在$\{s_k,k\in N\}$之上的序列,则存在子列$\{t_{k_n},n\in N\}\subset\{t_k,k\in N\}$使得$s_n\leqslant t_{k_n},n\in N$. 当$k\geqslant k_n$时,$\forall\ m\geqslant k$,由(4.4)式有

$$P(\sup_{k\leqslant p\leqslant m}\|E(X_{t_m}|\mathscr{F}_{t_p})-X_{t_p}\|>\varepsilon_n)$$
$$\leqslant P(\operatorname*{esup}_{s_n\leqslant s\leqslant t_m}\|E(X_{t_m}|\mathscr{F}_s)-X_s\|>\varepsilon_n)<\varepsilon_n.$$

从而$\{X_{t_n},\mathscr{F}_{t_n},n\in N\}$为**B**值Mil,显然对任意$f\in\mathbf{B}^*$有$\{f(X_{t_n}),$

$n \in N\}$ 收敛于 0，于是 $\{X_{t_n}, \mathscr{F}_{t_n}, n \in N\} \in \mathscr{M}_N$. 由引理 4.3 知 $\{\| X_t \|, t \in \Delta\}$ 本性收敛，但由 $\{X_{t_n}\} \in \mathscr{M}_N$ 且 L^1 有界知，$\{\| X_{t_n} \|, n \in N\}$ a.e. 收敛于 0，所以 $\{\| X_t \|, t \in \Delta\}$ 本性收敛于 0.

定理 4.7 设 **B** 是可分 Banach 空间，$X = \{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 是 L^1 有界的 **B** 值 Mil，$\{\mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 满足 Vitali 条件 (V')，则存在唯一分解：

$$X^t = Y_t + Z_t, t \in \Delta,$$

其中 $\{Y_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 为 L^1 有界的 **B** 值鞅，$\{Z_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 为 **B** 值 Mil 且 $\underset{t \in \Delta}{\mathrm{elim}} \| Z_t \| = 0$.

证 令 $D = \{x_1, x_2, \cdots\}$ 是 **B** 中的可数稠子集，$V_n^* = \{f \in \mathbf{B}^* : \| f \| \leqslant 1, |f(x_i)| \leqslant \frac{1}{n}, i = 1, 2, \cdots, n\}, n \geqslant 1$. 因为 $\{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 是 **B** 值 L^1 有界 Mil，若再注意对任何 Bochner 可积的 Y 及 σ 代数 $\mathscr{G}$，均有

$$f(E(Y|\mathscr{G})) = E(f(Y)|\mathscr{G}), (f \in \mathbf{B}^*),$$

则易证

$$\{f(X_t), \mathscr{F}_t, t \in \Delta\} \text{ 是实值 } L^1 \text{ 有界 Mil.}$$

所以，由定理 4.4 得知 $\{f(X_t)\}_{t \in \Delta}$ 本性收敛，从而

$$\underset{t \in \Delta}{\mathrm{elim}} f(X_t) \text{ 存在} \quad (\forall f \in \mathbf{B}^*).$$

又据定理 4.4 的证明知：存在单调上升的指标序列 $\{t_m, m \geqslant 1\}$ 使 $\{f(X_{t_m}), \mathscr{F}_{t_m}, m \geqslant 1\}$ 是实值 L^1 有界 Mil 且

$$\underset{t \in \Delta}{\mathrm{elim}} f(X_t) = \lim_{m \to \infty} f(X_{t_m}), (f \in \mathbf{B}^*). \tag{4.1}$$

任取 $t \in \Delta$ 固定，令

$$g_n^{(t)} = \mathrm{esup}\{E(\underset{t \in \Delta}{\mathrm{elim}} f(X_t) | \mathscr{F}_t) ; f \in V_n^*\}, \tag{4.2}$$

则（参见[19] 定理 8 的证明）

$$g_n^{(t)} \downarrow 0, \quad a.e. \quad (\text{当 } n \uparrow \infty \text{ 时}). \tag{4.3}$$

任意固定 $k > 0$，由 Egoroff 定理得知存在 $B_k \in \mathscr{F}_t$，使

$$P(B_k) > 1 - \frac{1}{k}, g_n^{(t)} \text{ 在 } B_k \text{ 上一致收敛于 } 0, (n \uparrow \infty). \tag{4.4}$$

令

$$\mathscr{F}_t^{(k)} \equiv \mathscr{F}_t \cap B_k \equiv \{A \cap B_k : A \in \mathscr{F}_t\},$$

$P_k = P|_{B_k}$ 是 P 在 B_k 的限制，

$$T(f) = E(\lim_{m\to\infty} f(X_{t_m}) | \mathscr{F}_t)\Big|_{B_k}, (f \in \mathbf{B}^*),$$

则可证 T 是 $\mathbf{B}^* \to L^\infty(B_k, \mathscr{F}_t^{(k)}, P_k)$ 的线性算子. 事实上，任取 $\varepsilon > 0$，$\exists\ n_0 \geqslant 1$，使

$$g_{n_0}^{(t)}(\omega) < \varepsilon, (\forall\ \omega \in B_k). \tag{4.5}$$

所以

$$E(\lim_{m\to\infty} f(X_{t_m}) | \mathscr{F}_t)|_{B_k} \leqslant \varepsilon, a.e. (f \in V_{n_0}^*). \tag{4.6}$$

而 $\forall\ f \in \mathbf{B}^*$，$\exists\ r > 0$，使 $rf \in V_{n_0}^*$，于是

$$E(\lim_{m\to\infty} rf(X_{t_m}) | \mathscr{F}_t)\Big|_{B_k} \leqslant \varepsilon, a.e., \tag{4.7}$$

从而

$$E(\lim_{m\to\infty} rf(X_{t_m}) | \mathscr{F}_t)\Big|_{B_k}$$

在 B_k 上有本性上确界，亦即 $\forall\ f \in \mathbf{B}^*$，$T(f) \in L^\infty(B_k, \mathscr{F}_t^{(k)}, P_k)$. 显然，$T(\cdot)$ 是线性的.

现将 T 限制在闭单位球 $S_0(1) = \{f \in \mathbf{B}^* : \| f \| \leqslant 1\}$ 上.

设 $\{f_n, f, n \geqslant 1\} \subset S_0(1)$，$f_n \xrightarrow{w^*} f$（即 $\{f_n\}$ 弱 * 收敛到 f），不妨再设 $f_n - f \in S_0(1) (n \geqslant 1)$，（否则以 $\frac{1}{3} f_n$、$\frac{1}{3} f$ 分别代 f_n，f 即可）.

由于 $\{g_n^{(t)}, n \geqslant 1\}$ 在 B_k 上一致收敛于 0（当 $n \uparrow \infty$ 时），所以 $\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists$ 正整数 $M > 0$，使

$$0 \leqslant g_M^{(t)}(\omega) < \varepsilon, (\forall\ \omega \in B_k). \tag{4.8}$$

又因为 $f_n \xrightarrow{w^*} f$，所以存在 $K > 0$，当 $n \geqslant K$ 时有

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| \leqslant \frac{1}{M}, (1 \leqslant i \leqslant M). \qquad (4.9)$$

因此，$(f_n - f) \in V_M^*, (n \geqslant k)$，从而 $n \geqslant k$ 时有

$$|E(\lim_{m \to \infty} |(f_n - f)(X_{t_m})| \mathscr{F}_t)| < \varepsilon, a.e. \ in \ B_k. \qquad (4.10)$$

于是

$$\alpha_{k,n} \equiv \text{esup}[I_{B_k} E(\lim_{m \to \infty} (f_n - f)(X_{t_m}) | \mathscr{F}_t)]$$
$$\leqslant \varepsilon, (n \geqslant K \vee n_0), \qquad (4.11)$$

此即

$$\| T(f_n) - T(f) \|_{L^\infty} \leqslant \varepsilon, (n \geqslant K \vee n_0). \qquad (4.12)$$

总之，我们证明了：

$$\text{“} f_n \xrightarrow{w^*} f \Rightarrow \| T(f_n) - T(f) \|_{L^\infty} \longrightarrow 0 \text{”}. \qquad (4.13)$$

设 $\{f_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ 是 $S_0(1)$ 中任一无穷子集. 对 $x_1 \in D$，存在 $\{\beta(n,1), n \geqslant 1\} \subset \Gamma$，使

$$\lim_{n \to \infty} f_{\beta(n,1)}(x_1) \quad 存在.$$

而对 $x_2 \in D$，在 $\{\beta(n,1), n \geqslant 1\}$ 中又有子列 $\{\beta(n,2), n \geqslant 1\}$，使

$$\lim_{n \to \infty} f_{\beta(n,2)}(x_2) \quad 存在.$$

…，对每个 $i \geqslant 1$，有 $\{\beta(n, i+1), n \geqslant 1\} \subset \{\beta(n,i), n \geqslant 1\}$，使

$$\lim_{n \to \infty} f_{\beta(n,i)}(x_i) \quad 存在，(i \geqslant 1).$$

因此，$\{\beta(n,n), n \geqslant 1\} \subset \Gamma$，且

$$\lim_{n \to \infty} f_{\beta(n,n)}(x_i) \quad 存在，(i \geqslant 1). \qquad (4.14)$$

任取 $x \in \mathbf{B}$，由于 $D = \{x_1, x_2, \cdots\}$ 在 $\mathbf{B}$ 中稠，所以，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists x_{i_0} \in D$，使 $\| x - x_{i_0} \| < \varepsilon$，从而

$$|f_{\beta(n,n)}(x) - f_{\beta(n,n)}(x_{i_0})| \leqslant \| x - x_{i_0} \| < \varepsilon. \qquad (4.15)$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性知

$$\lim_{n \to \infty} f_{\beta(n,n)}(x) \quad 存在(\forall x \in \mathbf{B}). \qquad (4.16)$$

因此(参见[95]P. 125 定理 9)存在 $f \in S_0(1)$ 使

$$f_{\beta(n,n)} \xrightarrow{w^*} f, (n \to \infty), \qquad (4.17)$$

由(4.13)、(4.17)得

$$\| T(f_{\beta(n,n)}) - T(f) \|_{L^\infty} \to 0, (n \to \infty). \tag{4.18}$$

至此,我们证明了:$T(S_0(1))$ 中任一无穷子集均有收敛子列,且其极限在 $T(S_0(1))$ 中,所以 $T(S_0(1))$ 是列紧集,从而 $T(S_0(1))$ 的闭包亦为列紧集,即 $T(S_0(1))$ 是相对紧集.所以 T 是紧算子(参见[95]).而一线性算子是紧算子的充要条件是共轭算子是紧算子(参见[95]P.282).

注意 $(L^1(B_k,\mathscr{F}_t^{(k)},P_k))^* = L^\infty(B_k,\mathscr{F}_t^{(k)},P_k)$,考虑

$$V: L^1(B_k,\mathscr{F}_t^{(k)},P_k) \to \mathbf{B}$$

V 的共轭算子 $V^* = T$.

则 V 是紧算子,从而(参见[1]p.68 定理2)存在本性有界的 $\mathbf{B}$ 值随机变量 W_k,使

$$V(\varphi) = \int \varphi W_k dP, (\varphi \in L^1(B_k), \mathscr{F}_t^{(k)}, P_k)). \tag{4.19}$$

由 $V^* = T$ 有

$$f(V(\varphi)) = (T(f))(\varphi), \begin{array}{l} f \in \mathbf{B}^*, \\ \varphi \in L^1(B_k,\mathscr{F}_t^{(k)},P_k). \end{array} \tag{4.20}$$

由(4.19)有

$$f(V(\varphi)) = \int f(W_k)\varphi dP. \tag{4.21}$$

由(4.20)、(4.21)得

$$T(f) = f(W_k). \tag{4.22}$$

将 $\{B_k, k \geqslant 1\}$ 不交化 $(B'_k = B_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} B_j)$ 以后,仍记之为 $\{B_k, k \geqslant 1\}$.易见 $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k) = 1$.令

$$Y_t = \sum_{k=1}^{\infty} I_{B_k} W_k,$$

则 $Y_t \in \mathscr{F}_t$,且

$$f(Y_t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{B_k} f(W_k) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{B_k} T(f)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} I_{B_k} E(\lim_{m\to\infty} f(X_{t_m}) | \mathscr{F}_t) \Big|_{B_k}$$

$$= E(\lim_{m\to\infty} f(X_{t_m}) | \mathscr{F}_t). \tag{4.23}$$

所以

$$|f(Y_t)| \leqslant \liminf_{m\to\infty} E(|f(X_{t_m})| | \mathscr{F}_t)$$

$$\leqslant \liminf_{m\to\infty} \mathrm{E}(\| \mathrm{X}_{t_m} \| | \mathscr{F}_t), (f \in S_0(1)). \tag{4.24}$$

$\forall \omega \in \Omega$,由 Hahn-Banach 定理存在 $f_\omega \in S_0(1)$ 使

$$|f_\omega(Y_t(\omega))| = \| Y_t(\omega) \|.$$

由(4.24)及 ω 的任意性得:

$$\| Y_t \| \leqslant \liminf_{m\to\infty} E(\| X_{t_m} \| | \mathscr{F}_t).$$

故由 $\{X_t\}_{t\in\Delta} L^1$ 有界得知 $\{Y_t\}_{t\in\Delta}$ 也是 L^1 有界的. 而由(4.23)得知 $\{f(Y_t), \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 是实值鞅($f \in \mathbf{B}^*$).

又

$$E(f(Y_t) | \mathscr{F}_s) = f(E(Y_t | \mathscr{F}_s)), (f \in \mathbf{B}^*, s, t \in \Delta), \tag{4.25}$$

所以

$$f(E(Y_t | \mathscr{F}_s)) = f(Y_s), \begin{pmatrix} s \leqslant t, s, t \in \Delta, \\ f \in \mathbf{B}^* \end{pmatrix}. \tag{4.26}$$

再一次应用 Hahn-Banach 定理得

$$E(Y_t | \mathscr{F}_s) = Y_s, (s \leqslant t, s, t \in \Delta). \tag{4.27}$$

总之,我们证明了 $\{Y_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 是 L^1 有界 **B** 值鞅. 令

$$Z_t = X_t - Y_t, t \in \Delta.$$

因为 $\{f(Y_t), \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 是一致可积实值鞅,($f \in \mathbf{B}^*$),而且由定理 4.1 得知它是 L^1 收敛与本性收敛于

$$E(\lim_{m\to\infty} f(X_{t_m}) | \bigvee_{t\in\Delta} \mathscr{F}_t) = \lim_{m\to\infty} f(X_{t_m}), \tag{4.28}$$

所以

$$\{f(Z_t) = f(X_t) - f(Y_t), t \in \Delta\}$$

L^1 收敛且本性收敛于 0,($f \in \mathbf{B}^*$). 所以

$\{Z_t, t \in \Delta\}$ 本性收敛于 0. 而 $\{Z_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 显然是 Mil,存在性证毕.

下面证明分解的唯一性.

设 $X_t = Y'_t + Z'_t$ 为 X_t 的另一分解,其中 $\{Y'_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 是 L^1 有界鞅,$\{Z'_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 是 Mil,且 $\{Z'_t\}_{t\in\Delta}$ 本性收敛于 0.

任意固定 t,有

$$\| Y'_t - Y_t \| = \| Z'_t - Z_t \| ;$$

$\{ \| Y'_s - Y_s \| , \mathscr{F}_s, s \in \Delta\}$ 为非负实值下鞅.

由于 $\{ \| Z_s \| \}_{s\in\Delta}$, $\{ \| Z'_s \| \}_{s\in\Delta}$ 均本性收敛于 0,所以,存在 $\{s_k\} \subset \Delta, s_k \geqslant t, s_k \leqslant s_{k-1}$,使

$$\lim_{k\to\infty} \| Z_{s_k} \| = \lim_{k\to\infty} \| Z'_{s_k} \| = 0, a.e..$$

由 Egoroff 定理,$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathscr{F}, P(B) > 1 - \varepsilon$,使 $\{ \| Z_{s_k} \| \}$、$\{ \| Z'_{s_k} \| \}$ 在 B 上一致收敛于 0. 由于 $\{ \| Y_s - Y'_s \| I_B, \mathscr{F}_s \cap B, s \in \Delta\}$ 是 $(B, \mathscr{F} \cap B, P(\cdot \mid B))$ 上的非负实值下鞅,所以

$$\begin{aligned} \| Y_t - Y'_t \| I_B &\leqslant E_B(\| Y_{s_k} - Y'_{s_k} \| I_B \mid \mathscr{F}_t \cap B) \\ &= E_B(\| Z_{s_k} - Z'_{s_k} \| I_B \mid \mathscr{F}_t \cap B), \end{aligned} \tag{4.29}$$

其中 E_B 是相对于概率测度 $P(\cdot \mid B)$ 的期望算子. 在(4.29)中令 $k \to \infty$ 即得

$$\| Y_t - Y'_t \| I_B = 0.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性知 $Y_t = Y'_t$. 定理证毕.

推论 4.8 设可分 Banach 空间 **B** 具有 RNP,$X = \{X_t, \mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 是 L^1 有界的 **B** 值 Mil,$\{\mathscr{F}_t, t \in \Delta\}$ 满足 Vitali 条件(V'),则 $\{X_t\}_{t\in\Delta}$ 本性收敛.

证 由定理 4.7 及定理 1.6 即知推论 4.8 成立.

参考文献

[1] J. Diested and J. J. Uhl, Jr., Vector Measures, Amer. Math. Soc. Surveys, No. 15, Providence, Rhode Island, 1977.

[2] J. Yeh, Stochastic Processes and the Wiener Integral, Marcel Dekker, INC New York, 1973.

[3] 甘师信、刘培德,E值轶型序列在条件期望下的收敛性与E值轶的局部收敛性,武汉大学学报(自然科学版),1990年第3期,7—16.

[4] W. Zieba, On the L^1 convergence for conditional amarts, Journal of multivariate analysis, **26**(1988), 104—110.

[5] D. Szynal and W. Zieba, On some characterization of almost sure convergence, Bull. of Polish Acad. of Sci. Math., **34**(1986)9—10, 635—642.

[6] Y. S. Chow and H. Teicher, Probability Theory, Independence, Interchangeability, Martingales, Springer-Verlag, 1988.

[7] M. M. Rao, Probability Theory with Applications, Academic Press, Inc., 1984.

[8] W. F. Stout, Almost Sure Convergence, Academic Press, New York, 1974.

[9] J. Neveu, Mathematical Foundations of the Calculus of Probability, Holden-Day, Inc., San Francisco, 1965.

[10] 甘师信,关于极限轶阵的依分布稳定收敛性,武汉大学学报(自然科学版),1985年第4期,13—16.

[11] D. L. Fisk, Quasi-martingales, Trans. Amer. Math. Soc.,

120(1965),369-389.

[12] S. Orey, F-Processes, Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Statist. Probab., **2**(1967), 304—313.

[13] C. Alloin, Martingales Progressives, Cahiers Centre Etudes Rech. Oper., **12**(1970), 201—210.

[14] R. J. Tomkins, Properties of Martingale-like Sequences, Pacific J. Math., **61**(1975), 521—525.

[15] R. V. Chacon and L. Sucheston, On Convergence of Vectorvalued Asymptotic Martingales, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, **33**(1975), 55—59.

[16] G. A. Edgar and L. Sucheston, Amarts: a class of asymptotic martingales, A. Discrete Parameter, J. Multivariate Anal. **6**(1976), 193—221.

[17] A. Millet and L. Sucheston, Convergence of Classes of Amarts Indexed by Directed Sets, Can. J. Math., **32**(1980) 1, 86—125.

[18] A. G. Mucci, Limits for Martingale-like Sequences, Pacific J. Math., **48**(1973), 197—202.

[19] M. Talagrand, Some Structure Results for Martingales in the Limit and Pramarts, Ann. Probab., **13**(1985)4, 1192—1203.

[20] L. H. Blake, A Generalization of Martingales and Two Consequent Convergence Theorems, Pacific J. Math., **35** (1970), 279—283.

[21] 汪振鹏,拟终鞅,华东师范大学学报(自然科学版),1988年第4期,5—11.

[22] Gan Shixin(甘师信) and Zhao Xingqiu(赵兴球), Local Convergence of Martingale-like Sequences and the Strong Law of Large Numbers, Northeastern Math. J. (China), 7

(1991)1,87－103.

[23] M. Yamasaki, Another Convergence Theorem for Martingales in the Limit, Tohoku Math. J. ,**33**(1981),555－559.

[24] 甘师信,Mil 的另一收敛定理及某些鞅型序列的稳定性,数学杂志,**9**(1989)3,327－336.

[25] 汪振鹏,停止一致渐近鞅的期望与 Mil 和 GFT 的收敛性,中国科学,A 辑,1989 年 8 月,809－818.

[26] R. J. Tomkins, Martingale Generalizations, Topics in Statistics: Proceedings of the 1981 Canadian Conference on Applied Statistics,1983.

[27] 严加安,测度与积分,陕西师范大学出版社,1988.

[28] P. Nelson, A Class of Orthogonal Series Related to Martingales, Math. Statist. ,**41**(1970),1684－1694.

[29] L. E. Dor, Some Inequalities for Martingales and Applications to the Study of L^1, Proc. Canb. Phil. Soc. ,**89**(1981),135－148.

[30] Gan Shixin(甘师信), A Convergence Theorem for Generalized Martingales in the Limit,数学杂志,**13**(1993)3,257－265.

[31] G. A. Edgar and L. Sucheston, Martingales in the Limit and Amarts, Proc. Amer. Math. Soc. ,**67**(1977),315－320.

[32] R. J. Tomkins, Martingale Generalizations and Preservation of Martingale properties, The Canadian Journal of Statistics,**12**(1984)2,99－106.

[33] 刘智慧,取值于 Banach 空间的 L^1 极限鞅及其性质,数学物理学报,**7**(1987)3,265－271.

[34] 甘师信,B 值 L^1 极限鞅及其诱导集函数,数学物理学报,**10**

(1990)1,57－68.

[35] A. Bellow, Stability Properties of the Class of Asymptotic Martingales, Bulletin of A. M. S., **82**(1976)2, 338－340.

[36] A. Bellow, Several Stability Properties of the Class of Asymptotic Martingales, Z. W., **37**(1977), 275－290.

[37] A. Gut, An Introduction to the Theory of Asymptotic Martingales, LNM, 1042, Springer-Verlag, 1983.

[38] 刘培德，概率渐近鞅和极限鞅的稳定性，数学物理学报，**8**(1984)4,467－473.

[39] 汪振鹏，鞅型序列，数学物理学报，**5**(1985)3,301－314.

[40] 汪振鹏，Semiamart 与 Gaft 类的收敛性，数学研究与评论，**6**(1986)1,141－145.

[41] 甘师信，随机元序列的收敛性，数学杂志，**6**(1986)3,291－296.

[42] L. E. Dubins and D. A. Freedman, On the Expected Value of a Stopped Martingale, Ann. Math. Statist., **37**(1966), 1505－1509.

[43] 甘师信，渐近鞅的局部收敛性，武汉大学学报(自然科学版)，1988 年第 2 期，11－16.

[44] Y. S. Chow, Local Convergence of Martingales and the Law of Large Numbers, Ann. Math. Statist., **36**(1965)2, 552－558.

[45] R. Cairoli, Une Ineqalite Pour Processus a Indices Multipleset set Applications, Sem. Prob. IV, Springer LNM **124** (1970), 1－27.

[46] R. Cairoli and J. B. Walsh, Stochastic Integrals in the Plane, Acta Math., **134**(1975), 111－183.

[47] J. B. Walsh, Convergence and Regularity of Multiparameter Strong Martingales, Z. W., **48**(1979), 177－192.

[48] P. Imkeller, Two — parameter Martingales and Their Quadratic Variation, LNM 1308, Springer—verlag, 1988.
[49] L. E. Dubins and J. Pitman, A Divergent, Two Parameter, Bounded Martingale, Proc. Amer. Math. Soc., **78**(1980)3, 414—416.
[50] 陈宗洵,一个有界而发散的两指标鞅,福建师范大学学报(自然科学版),1982年第二期.
[51] 庄兴元,李继陶,局部(F_4)条件和两指标鞅 a. s. 收敛性,数学学报,**30**(1987)3,412—418.
[52] 严加安,鞅与随机积分引论,上海科学技术出版社,1981.
[53] S. D. Chatterji, Martingales of Banach-valued Random Variables, Bull. A. M. S., **66**(1960), 395—398.
[54] M. Metivier, Limites Projectives de Mesures, Martingales, Applications, Ann. Math. Pura. Appl., **63** (1963), 225—352.
[55] I. J. Maddox, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, 1970.
[56] S. D. Chatterji, Martingale Convergence and the Radon—Nikodym Theorem in Banach Space, Math. Scand., **22** (1968), 21—41.
[57] 俞鑫泰,Banach 空间几何理论,华东师范大学出版社,1986.
[58] 胡迪鹤,随机过程概论,武汉大学出版社,1986.
[59] L. Egghe, Stopping Time Techniques for Analysts and Probabilists, London Math. Soc. Lecture Notes Series: 100, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.
[60] V. D. Milman, Geometric Theory of Banach Spaces, Part I: Geometry of the Unit Sphere, Uspekhi Mat. Nauk, **26** (1971)6, 73—149.

[61] J. Hoffmann－Jørgensen and G. Pisier, The Law of Large numbers and the Central Limit Theorem in Banach Spaces, Ann. Probab., **4**(1976)4, 587－599.

[62] W. A. Woyczynski, Geometry and Martingales in Banach Spaces, LNM 472, 229－275.

[63] 甘师信, Banach 空间值鞅不等式与弱大数定律, 全国概率论学术会报告. 桂林(1992).

[64] 杨小云, B 值随机变量序列部分和的矩的收敛速度, 吉林大学学报(自然科学版), 1992 年第 1 期, 21－28.

[65] G. Pisier, Martingales with Values in Uniformly Convex Spaces, Isreal Journal of Mathematics, **20**(1975)3－4, 326－350.

[66] S. Kwapien, Isomorphic Characterization of Inner Product Spaces by Orthoganal Series with Vector Valued Coefficients, Studia Math., **44**(1972), 583－595.

[67] 胡亦钧, 甘师信. 凸 Φ－不等式与 Hilbert 空间的刻划, 武汉大学学报(自然科学版), 1991 年第 3 期, 29－34.

[68] F. John and L. Mirenberg, On Functions of Bounded Mean Oscillation, Communications in Pure and Appl. Math. **14** (1961), 415－426.

[69] C. Herz, BMO and Regulated Martingales, Trans, Amer. Math. Soc., **193**(1974), 199－216.

[70] R. R. Coifman and P. Rochberg, Another Characterization of BMO. Proc. A. M. S., **79**(1980), 249－254.

[71] N. Th. Varopoulos, A Probabilistic Proof of the Garnett-Jones Theorem on BMO, Pacific J. M., **90**(1980)1, 201－221.

[72] Bui Khoi Dam, BMO-sequences and Amarts, Acta Math. Hung. **53**(1989)3－4, 271－287.

[73] 龙瑞麟,H_p 鞅论,北京大学出版社,1985.

[74] 胡迪鹤,B 值鞅及经典分析,应用概率统计,**2**(1986)4,362—370.

[75] D. L. Burkholder, Martingale Transforms, Ann. Math. Statist. **37**(1966),1494—1504.

[76] D. L. Burkholder, Distribution Function Inequalities for Martingales, Ann. Probability, **1**(1973)1,19—42.

[77] B. Maurey, Systeme de Haar, Seminaire Maurey-Schwartz, 1974—1975, Ecole Polytechnique, Paris.

[78] D. L. Burkholder, A Geometrical Characterization of Banach Spaces in which Martingale Difference Sequences are Unconditional, Ann. Probability, **9**(1981)6,997—1011.

[79] Gan Shixin(甘师信), Expectation of Stopped p-uniform Amarts and Convergence of Pramarts,第四届全国概率统计年会报告,千岛湖(1990).

[80] G. Pisier, Probabilistic Methods in the Geometry of Banach Spaces, LNM 1206, Springer-Verlag, 1986.

[81] 甘师信,有界线性算子的不变性与拟鞅变换的局部收敛性,武汉大学学报(自然科学版),1992 年第 1 期,1—10.

[82] 汪振鹏,极限鞅型序列与 GFT 的收敛,数学学报,**31**(1988)3,372—380.

[83] 李兵,B 值一致渐近鞅的强大数定律,武汉大学学报(自然科学版),1988 年第 1 期,19—25.

[84] 刘智慧,Banach 空间的光滑性与 B 值随机变量列的收敛性,数学物理学报,**6**(1986)3,333—345.

[85] 甘师信,B 值随机变量序列的变换与局部强大数定律,武汉大学学报(自然科学版),1993 年第 3 期,1—8.

[86] W. A. Woyczynski, Strong Law of Large Numbers in Certain Linear Spaces, Ann. Inst. Fourier, **24**(1974)2,205—

223.

[87] 甘师信,鞅型序列的变换及其收敛性,数学杂志,**11**(1991)3,275—286.

[88] P. Hall, C. C. Heyde, Martingale Limit Theory and its Application. Academic Press, 1980.

[89] P. Assouad, Espaces p-lisses et p-convexes, Inegalites de Burkholder, Seminaire Maurey-Schwartz (1975), Exp. XV.

[90] 赵兴球,B 值鞅的强大数定律,数学杂志,**10**(1991)1,85—92).

[91] 昌志华,取值于 Banach 空间的 BMO 过程,硕士论文.

[92] A. Bellow, Uniform Amarts: A Class of Asymptotic Martingales for which Strong Almost Sure Convergence Obtain, Z. W., **41**(1978),177—191.

[93] 陈学军,**B** 值随机向量加权和的强收敛速度,硕士论文.

[94] 胡迪鹤,Banach 代数中的鞅变换,武汉大学学报(自然科学版),1983 年第 4 期, 25—34.

[95] K. Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.

[96] K. Krickeberg, Convergence of Martingales with a Directed Index Set, Trans. Amer. Math. Soc., **83**(1956),313—337.

[97] 甘师信,任耀峰,定向集上的 **B** 值一致渐近鞅,数学物理学报,**12**(1992)1,105—114.

[98] T. G. Kurtz, The Optional Sampling Theorem for Martingales Indexed by Directed Sets, Ann. Prob., **8**(1980)4,675—681.

[99] 陈振庆,L^1 极限鞅及其诱导测度,华东师范大学学报(自然科学版),1986 年第 4 期,10—16.

[100] N. Dunford, J. T. Schwartz, Linear Operators I, New York Interscience, 1958.

[101] J. Neveu, Discrete Parameter Martingales, North Holland publishing Company, Amsterdam, 1975.

[102] Kabanov, Lipcer and Shiryaev, On the Question of Absolute Continuity and Singularity of Probability Measures, Math. USSR Sbornic, **33**(1977), 203—221.

[103] Bennett Eisenberg, Gan Shixin (甘师信), Positive Martingales and their Induced Measures, Proceedings of Amer. math. Soc., **89**(1983)4, 680—684.

[104] 甘师信,童光荣,正上鞅及其诱导出的集函数,武汉大学学报(自然科学版),1986 年第 3 期,1—8.

[105] 杨承民,薛行鸿,关于随机上、下极限及 Vitali 条件的若干结果,华东师范大学学报(自然科学版),1984 年第 2 期,16—19.

[106] A. Bellow, Martingales, Amarts and Related Stopping Time Techniques, LNM 860, 1981.

[107] 胡晓予,定向集上 B 值 Mil 的收敛性及 Riesz 分解,数学物理学报,**10**(1990)3,174—180.

索　引

中文部分(以笔画为序)

外文部分(以字母顺序排列)

英 文